

**Р.В. Зінько, к.т.н., доц.  
О.М. Маковейчук, к.т.н.  
В.І. Тодавчич, бакалавр**

*Національний університет «Львівська політехніка»*

## **Опис фронтального зіткнення автомобілів в моделі системи нелінійних осциляторів**

*Розглянуто процес зіткнення автомобілів на основі математичної моделі нелінійних взаємодіючих осциляторів. Деталізація математичної моделі для дослідження фронтального зіткнення автомобілів поширюється до межі агрегатів. Для математичного моделювання використовувалась система (чотири маси зв'язані трьома «пружинками»), де маса 1 відповідає бамперу, маса 2 – рамі з двигуном, маси 3, 4 – кермовому механізмові з колонкою. Значення мас були прийняті для автомобіля Iveco Evrocargo 75E18. Проводилось два типи чисельних експериментів: при фіксованій швидкості зіткнення змінювалися параметри модельної залежності сили від зміщення; при фіксованих параметрах модельної залежності сили від зміщення змінювалась швидкість зіткнення. Якісний аналіз динамічних властивостей системи представлено на графіках фазових траєкторій. Було встановлено, що загальний вигляд фазових траєкторій залежить від початкових умов, найбільше нелінійні ефекти будуть проявлятися для осцилятора 1, який ударно збуджується. За рахунок нелінійності повертальної сили проходить «скидання» енергії, яка тратиться на деформацію або руйнування матеріалу.*

**Ключові слова:** процес зіткнення автомобіля; математична модель; нелінійні взаємодіючі осцилятори.

**Вступ.** Автомобільний парк визначається мобільністю, автономністю роботи і зручністю користування, що веде до його широкого застосування. По мірі збільшенню парку, зростання інтенсивності руху транспортних потоків збільшується вірогідність дорожньо-транспортних подій (ДТП). Тому важливими є напрямки досліджень, пов'язані з зниженням тяжкості ДТП і попередження травмування людей в результаті аварій.

Серед комплексу заходів, щодо зниженню тяжкості наслідків ДТП є вдосконалення конструкцій автомобілів, систем управління, систем захисту від ударів. Рішення проблем безпеки руху актуально також і з позиції збільшення продуктивності автомобільного транспорту, оскільки створює передумови для підвищення безпечних швидкостей переміщення людей і вантажів.

Тому ще на стадії проектування необхідно моделювати процеси аварійного зіткнення автомобілів, що дозволить отримувати конструкції транспортних засобів із заданими характеристиками безпеки [1].

**Аналіз останніх досліджень та публікацій.** Передбачити вимоги пасивної безпеки можна змодельовавши процес зіткнення автомобіля з іншим рухомим автомобілем або нерухомою перешкодою. Моделювання удару можливе за допомогою методу скінчених елементів [2, 3]. Але при цьому підготовка моделі і громіздкість її використання зменшують ефективність використання таких середовищ. До того ж для розрахунку вхідних параметрів (зміну швидкості, умов зчеплення з дорогою та інше) необхідно звертатися до інших програмних середовищ. Доцільним є створення математичної моделі, яка б описувала процес зіткнення без глибокого кількісного дослідження елементів автомобіля на деформацію.

В математичних моделях [3–5] розглядають механіку процесу зіткнення двох автомобілів. Як один з можливих випадків – центральне зіткнення [5], при якому деформація автомобілів носить місцевий пружно-пластичний характер, а їх кінематичні характеристики можна апроксимувати емпіричними залежностями. Такі моделі не дають можливості дослідити процеси деформації складових частин автомобіля – вони досліджують тільки зовнішні наслідки зіткнення автомобіля з іншим автомобілем або нерухомою перешкодою.

Тому виникає необхідність створення моделі, яка була б простішою середовищ, що досліджують тіла методами скінчених елементів і складнішою моделей, що досліджують лише кінематичні аспекти зіткнення.

**Постановка завдання.** Створення порівняно простої математичної моделі для дослідження фронтального зіткнення автомобілів, в якій деталізація повинна поширюватися до межі агрегатів.

**Викладення основного матеріалу.** Для спрощення математичної моделі можна вважати, що всі агрегати при ударі знаходяться на одній лінії. Це справді так, якщо говорити про напрям поширення удару – вектор прикладення деформуючої сили.

Замінивши кожен агрегат його приведеною масою, а його можливість деформуватися – пружиною з заданою жорсткістю  $k$ , отримаємо лінійний ланцюжок з обмеженого числа зв'язаних осциляторів (рис. 1).

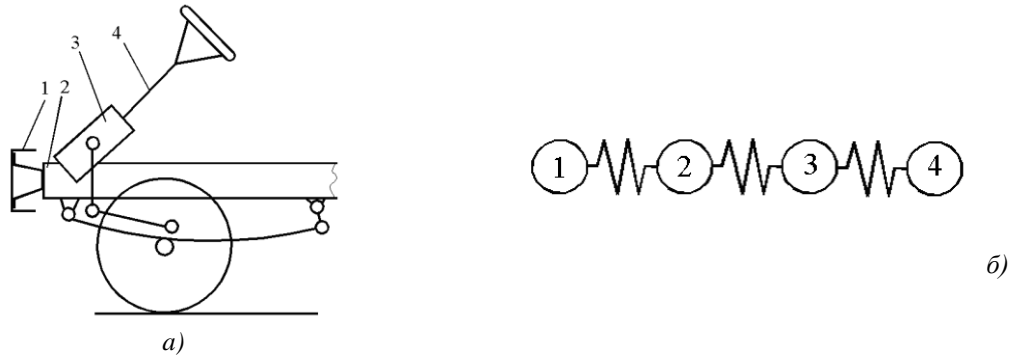


Рис. 1. Спрощена схема передньої частини автомобіля (а) і адекватна їй модель (б) зв'язаних осциляторів

Моделі, що представляють собою лінійні ланцюжки, які складаються з кінцевого чи нескінченного числа зв'язаних осциляторів, виявилися вельми ефективними і в даний час використовуються у різних галузях фізики: фізиці твердого тіла, фізиці суцільних серед, хімічній фізиці, радіофізиці і др. (Наприклад, в [6] для опису системи трьох зв'язаних електричних коливальних контурів була використана модель, що представляє собою систему кульок з масами  $m_1, m_2, m_3$ , які зв'язані між собою пружинами однакової жорсткості  $k$ ). Використовуючи моделі лінійних ланцюжків, можливо простим і природним способом здійснити перехід до хвильових процесів і ввести такі поняття як довжина хвилі, групова швидкість, фазова швидкість, дисперсія та ін. [7]

Відмічені обставини визначають доцільність розгляду даних моделей.

Для системи ланцюжка  $N$  зв'язаних осциляторів рівняння руху записуються як:

$$\begin{cases} m_0 \ddot{x}_0 = -\varphi(k_0, x_0) - \varphi(k_1, x_0 - x_1), & i = 0 \\ m_i \ddot{x}_i = -\varphi(k_i, x_i - x_{i-1}) - \varphi(k_{i+1}, x_i - x_{i+1}), & i = 1..N-1 \\ m_{N-1} \ddot{x}_{N-1} = -\varphi(k_{N-1}, x_{N-1} - x_{N-2}) - \varphi(k_N, x_{N-1}), & i = N \end{cases} \quad (1)$$

з початковими умовами:  $x = (0 \ 0 \ 0 \ 0)$ ,  $\dot{x} = (u \ 0 \ 0 \ 0)$  (ударне збудження), де введено модельну залежність сили від зміщення:

$$\varphi(k, x) = \begin{cases} kx, & x < a \\ \frac{x}{|x|} ka, & a \leq x \leq b; \\ \frac{x}{|x|} ka \exp\left(-\left(\frac{|x| - b}{\sigma}\right)^2\right), & x > b \end{cases} \quad (2)$$

де  $a$  – межа пружності,  $b$  – межа міцності,

$\sigma$  – модельний параметр, що описує швидкість спадання сили при перевищенні межі міцності (рис. 2).

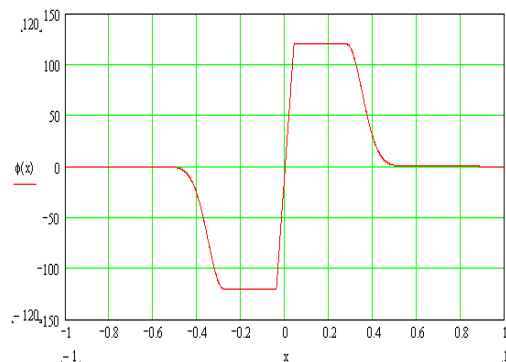


Рис. 2. Графік модельної залежності сили від зміщення

Слід зауважити, що залежність виду (2), більш точно описуючи пружні властивості [8, 9], є суттєво нелінійною, однак залишається досить простою для аналізу. Крім того (2) можна використовувати, щоб показати дисипацію енергії коливань – енергія буде втрачатися на зміну структури матеріалу (і його руйнування).

Для математичного моделювання використовувалась система (4 маси зв'язані 3 «пружинками»), де маса 1 відповідає бамперу, маса 2 – рамі з двигуном, маси 3, 4 – кермовому механізмові з колонкою. Значення мас були прийняті для автомобіля Iveco Evrocargo 75E18. Жорсткість осциляторів приймалась  $3 \cdot 10^5$ ,  $4 \cdot 10^5$ ,  $2 \cdot 10^5$  н/м відповідно. Швидкість удару досліджувалась в межах 15...27 м/с.

Дослідження розглянутої математичної моделі проводилось у системі MathCAD з використанням стандартних засобів розв'язування систем диференціальних рівнянь [10]. Для перевірки адекватності отриманих результатів, спочатку розглядалась система вільних осциляторів (яка описується при значенні параметра  $a \geq 0.28$ ). Проводилось два типи чисельних експериментів:

1) при фіксованій швидкості зіткнення  $u=27.0$  м/с (при меншій швидкості нелінійні ефекти виражалися несуттєво) змінювався параметр  $a$  модельної залежності сили від зміщення (рис. 3);

2) при фіксованих параметрах  $a$ ,  $b$  модельної залежності сили від зміщення змінювалася швидкість зіткнення (рис. 4).

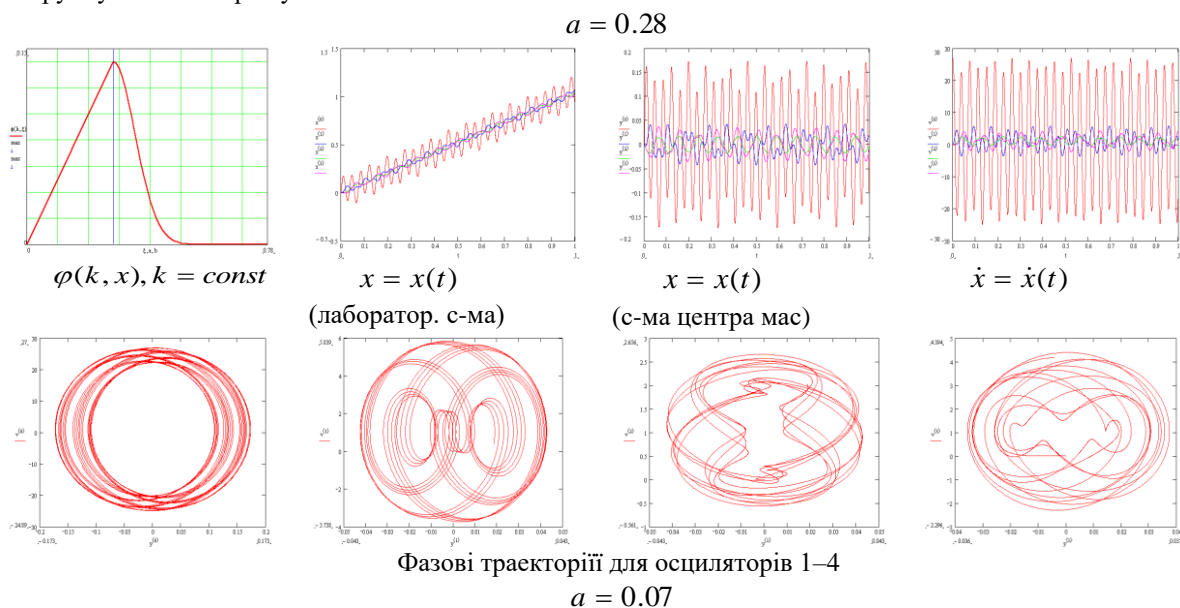
Перша група експериментів. Змінювалося значення параметра  $a = 0.28, 0.14, 0.07$  (при фіксованому значенні  $b = 0.28$ ). Видно, що із зменшенням  $a$  форма кривої  $\varphi(k, x)$  ( $k = const$ ) змінюється за рахунок видовження «полички», яка відповідає зоні, де закон Гука не справджується. Висота «полички» при цьому зменшується. Це призводить до зменшення потенційної енергії пружної сили (площа під кривою), тому при малих значеннях параметра  $a$  будуть суттєвими нелінійні ефекти і дисипативні процеси.

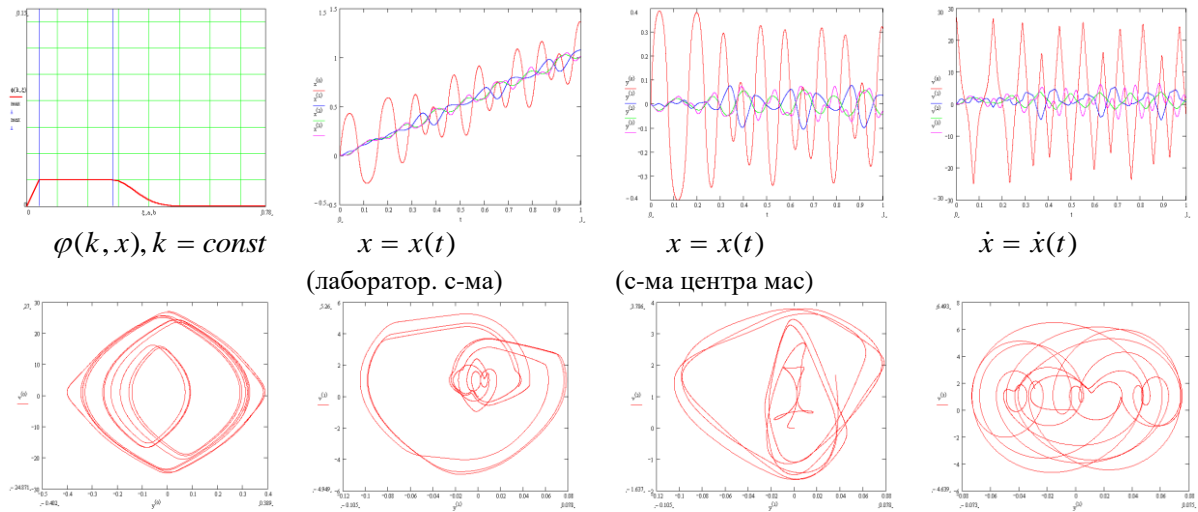
Залежність миттєвих значень зміщення від початку рівноваги для кожного осцилятора розраховувалася у лабораторній системі відліку, відносно якої спостерігається рівномірний рух системи як і у системі центру мас. Залежно від параметра  $a$  (при його зменшенні) форма коливань починає відхилятися від синусоїдальних – період збільшується, амплітуда робиться непостійною. Фактично коливання є ангармонійними і представляють собою суму декількох коливань. Динамічний режим системи – близький до хаотичного.

Аналогічну поведінку (із врахуванням зсуву фаз) проявляють графіки залежності миттєвих значень швидкості кожного осцилятора від часу. При малих значеннях параметра  $a$  форма кривих робиться «пилкоподібною», період збільшується.

Якісний аналіз динамічних властивостей системи можна провести по графіках фазових траєкторій. Як було вказано вище, значення параметра  $a = 0.28$  фактично відповідає системі вільних осциляторів – кожна траєкторія є замкненою і проходить лише через певні точки фазової площини (не всі значення швидкості і зміщення є дозволеними). При збільшенні нелінійності, форма фазових кривих робиться неправильною з характерними перехідними прямолінійними ділянками, що вказує на наявність 2 динамічних режимів, які групуються у певних «притягуючих» областях.

Загальний вигляд фазових траєкторій залежить від початкових умов, найбільше нелінійні ефекти будуть проявлятися для осцилятора 1, який ударно збуджується. Енергія удару передається по системі. За рахунок нелінійності повертальної сили проходить «скидання» енергії, яка тратиться на деформацію або руйнування матеріалу.





Фазові траєкторії для осциляторів 1–4

Рис. 3. Графічні результати першої групи експериментів.

Друга група експериментів. При фіксованих значеннях параметрів модельної залежності сили від зміщення  $a = 0.07$ ,  $b = 0.28$ , змінювалася швидкість удару (рис. 4). При швидкості удару  $u = 27.3$  відбувається руйнування осцилятора 1 («розрив пружини»). Дана швидкість є критичною для нашої системи. Нижче представлено графіки, які ілюструють динамічні властивості системи в околі критичної швидкості.

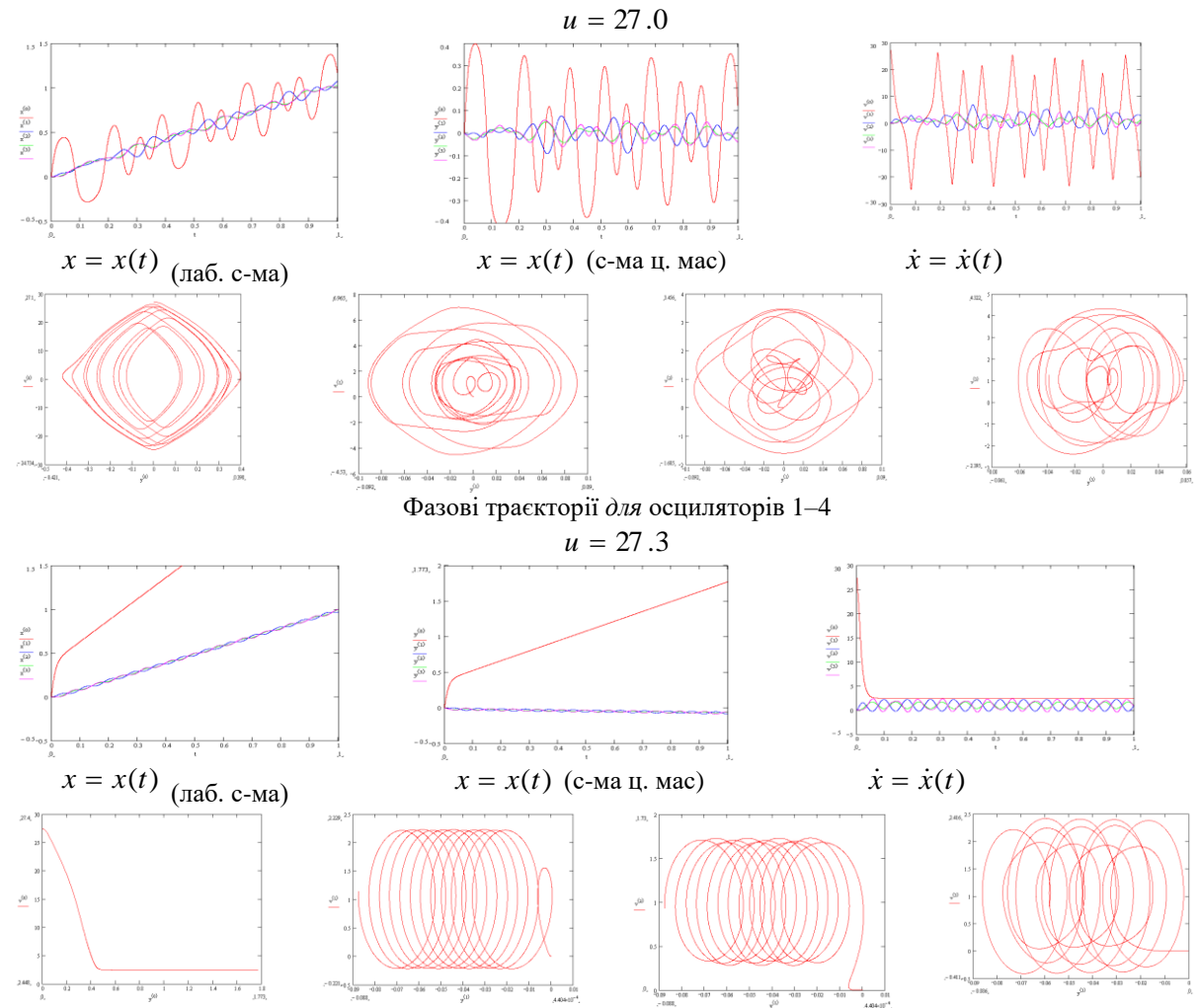


Рис. 4. Графічні результати другої групи експериментів

Система є суттєво нелінійною, що проявляється в ангармонійності коливань. Осцилятор 1 знаходиться у хаотичному режимі. Цікавою є наявність стоячих хвиль для осциляторів 2–4. Сумарна енергія їх співмірна із енергією осцилятора 1. Спостерігається характерна точка при значенні часу  $t = 0.45$  сек, у якій відбувається «віддзеркалювання» коливань швидкості. При подальшому зростанні швидкості до критичного значення  $u = 27.3$  м/с у цій точці відбувається руйнування осцилятора, при більшій швидкості система розпадається на 2 незв'язані підсистеми: осцилятор 1, що рухається рівномірно і прямолінійно і 3-осциляторна система, елементи якої лінійно взаємодіють між собою (синусоїдальні коливання, на які накладений рівномірний і прямолінійний рух системи як цілого). Варто зауважити, що доцільно робити перехід до системи центру мас 3-осциляторної підсистеми, щоб усунути її рівномірний рух, але це виходило за рамки даної роботи.

Досить інформативними є фазові траєкторії осциляторів, які мають характерну форму «подушки» і знаходяться у чітко визначених областях фазового простору.

По графіку фазової траєкторії осцилятора 1 після його відриву, зайшовши точку перегину кривої, можна визначити характерний час удару  $t = 0.45$  сек.

**Висновки.** Дана модель, не зважаючи на її простоту, дозволяє правильно якісно і певною мірою кількісно описати явище зіткнення – дисипацію енергії, наявність критичної швидкості, при якій виникає руйнування системи, нелінійний характер виникаючих коливань.

Встановлено, що при вхідних заданих параметрах моделі, що відповідають реальному автомобілеві Iveco Eurocargo 75E18, критична швидкість  $u = 27.3$  м/с. Така швидкість є дещо вищою реальних експлуатаційних швидкостей руху, але у випадку фронтального зіткнення двох автомобілів співмірних мас, швидкість удару може бути близькою до критичної. Час зіткнення є  $t = 0.45$  сек, звідки можна середнє прискорення під час зіткнення  $\frac{u}{t} \approx 60$  м/с<sup>2</sup> або близько  $6g$ , що може призвести до ушкоджень середньої важкості для людей, що знаходяться у автомобілі.

Для точнішого відображення реальної картини зіткнення варто розглядати більшу кількість осциляторів, що відповідають конструктивним елементам автомобіля. Слід також зауважити, що більш адекватною є не одновимірна, а дво-, трьохвимірна модель, однак це призведе до надмірного ускладнення розрахунків.

В подальших дослідженнях доцільно не задавати швидкість зіткнення, а враховувати її із врахуванням процесу гальмування автомобіля.

Однак використана математична модель є простою, адекватною і наочною для розуміння фізики процесу фронтального напівпружного (з врахуванням властивостей реальних матеріалів) зіткнення автомобіля з нерухомою перешкодою.

#### Список використаної літератури:

1. Едиобразные предписания, касающиеся официального утверждения транспортных средств в отношении защиты водителя от удара о систему рулевого управления : ДСТУ UN/ECE R 12-03:2004. – (UN/ECE R 12-03:1994, IDT).
2. Корольова Л.А. PC-CRASH програма для моделювання і аналізу дорожньо транспортних пригод / Л.А. Корольова, С.В. Куценко [Електронний ресурс]. – Режим доступу : <https://www.scienceforum.ru/2018/pdf/423.pdf>.
3. Кочанов Е.В. Оценка прочности и безопасности кузова при проектировании, доводке и сертификации автобусов / Е.В. Кочанов, А.Л. Орлов, Л.Н. Орлов : 8-я межд. иаучн.-техн. конф. по динамике и прочности автомобиля. – М., 2000. – С. 49–51.
4. Бухарин Н.А. Автомобили. Конструкция, нагрузочные режимы, рабочие процессы, прочность агрегатов / Н.А. Бухарин, В.С. Прозоров. – Л. : Машиностроение, 1973. – 504 с.
5. Рябчинский А.И. Регламентация активной и пассивной безопасности автотранспортных средств / А.И. Рябчинский, Б.В. Кисуленко, Т.Э. Морозова. – М. : Изд. центр «Академия», 2006. – 432 с.
6. Гетманова Е.Г. Резонансные явления в системе связанных осцилляторов / Е.Г. Гетманова, Д.Б. Костарев // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2001. – Т. 6, № 5. – С. 132–141.
7. Крауфорд Ф. Волны / Ф.Крауфорд. – М. : Наука, 1974. – 242 с.
8. Ландау Л.Д. Механика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М. : Наука, 2000. – 414 с.
9. Бажанов В.Л. Механика деформируемого твердого тела / В.Л. Бажанов. – М. : Издательство Юрайт, 2018. – 178 с.
10. Карімов І.К. Комп'ютерні методи та засоби розв'язання інженерних задач / І.К. Карімов. – Кам'янське : ДДТУ, 2017. – 283 с.

**References:**

1. DSTU (1994), «UN/ECE R 12-03:2004 Edinoobraznye predpisaniya, kasayushchiesya ofitsial'nogo utverzheniya transportnykh sredstv v otnoshenii zashchity voditelya ot udara o sistemu rulevogo upravleniya», (UN/ECE R 12-03:1994, IDT).
2. Korol'ova, L.A. and Kushhenko, S.V. «PC-CRASH programa dlja modeljvannja i analizu dorozhn'o transportnyh prygod», available at: <https://www.scienceforum.ru/2018/pdf/423.pdf>
3. Kochanov, E.V., Orlov, A.L. and Orlov, L.N. (2000), «Otsenka prochnosti i bezopasnosti kuzova pri proektirovanii, dovodke i sertifikatsii avtobusov», *8-ya mezhd. nauchn.-tehn. konf. po dinamike i prochnosti avtomobilya*, Moskva, Pp. 49–51.
4. Bukharin, N.A. and Prozorev, V.S. (1973), *Avtomobili. Konstruktsiya, nagruzochnye rezhimy, rabochie protsessy, prochnost' agregatov*, Mashinostroenie, Leningrad, 504 p.
5. Ryabchinskiy, A.I., Kisulenko, B.V. and Morozova, T.E. (2006), *Reglamentatsiya aktivnoy i passivnoy bezopasnosti avtotransportnykh sredstv*, Izd. tsentr «Akademiya», Moskva, 432 p.
6. Getmanova, E.G. and Kostarev, D.B. (2001), «Rezonansnye yavleniya v sisteme svyazannykh ostillyatorov», *Elektromagnitnye volny i elektronnye sistemy*, Vol. 6, No. 5, Pp. 132–141.
7. Krauford, F. (1974), *Volny*, Nauka, Moskva, 242p.
8. Landau, L.D. and Lifshits, E.M. (2000), *Mekhanika*, Nauka, Moskva, 414 p.
9. Bazhanov, V.L. (2018), *Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela: uchebnoe posob*, Izdatel'stvo Yurayt, Moskow, 178 p.
10. Karimov, I.K. (2017), *Komp'yuterni metody ta zasoby rozv'jazannja inzhenernykh zadach*, DDTU, Kam'jans'ke, 283 p.

**Зінько** Роман Володимирович – кандидат технічних наук, доцент кафедри автомобілебудування Національного університету «Львівська політехніка».

Наукові інтереси:

- наукові основи створення та експериментальні дослідження енергоощадних машин і механізмів та їх ефективне функціонування в змінних умовах експлуатації.

E-mail: rzinko@gmail.com.

**Маковейчук** Олександр Миколайович – кандидат технічних наук, провідний програміст фірми АВТО Software.

Наукові інтереси:

- моделювання процесів функціонування мобільних транспортних засобів.

E-mail: omakoveychuk@gmail.com.

**Тодавчич** Вячеслав Іванович – студент кафедри проектування та експлуатації машин Національного університету «Львівська політехніка».

Наукові інтереси:

- проектування та експлуатація мобільних транспортних засобів з урахуванням змінних умов їх експлуатації.

E-mail: viacheslavitodavchych@gmail.com.

Стаття надійшла до редакції 10.09.2018.