УДК 519.21

В.О. Коваль, д.ф.-м.н., проф.
Житомирський державний технологічний університет

ПРО ШВИДКІСТЬ ЗБІЖНОСТІ ПРОЦЕДУРИ РОББІНСА-МОНРО

Досліджується швидкість збіжності одновимірної процедури Роббінса-Монро загального виду. Розглянуто процедуру з пробними кроками спеціального виду, швидкість збіжності якої є близькою до оптимальної.

Вступ. Теорія процедур стохастичної апроксимації з початку їх виникнення [1], [2] розвинулась в окремий напрям теорії ймовірностей і математичної статистики, який має численні застосування (див., напр., [3], [4]). Процедура Роббінса-Монро для знаходження кореня θ рівняння $F(x)=0$ має вигляд

$$X_n = X_{n-1} - a_n\left(F\left(X_{n-1}\right)+V_n\right),\ n \geq 1, X_0 \in R, \tag{1}$$

де $(a_n, n \geq 1)$ – послідовність додатних чисел така, що

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty \ ; \tag{2}$$

$(V_n, n \geq 1)$ – послідовність випадкових збурень. Щодо функції $F(x)$ – зазвичай припускається, що вона є неперервною, монотонно зростає і задовольняє умову:

$$\left|F(x)\right| \leq K\left(1+|x|\right),\ x \in R, \tag{3}$$

де K – деяка додатна стала. Збурення $(V_n, n \geq 1)$ часто розглядаються незалежними, але з точки зору охоплення різних застосувань потрібно припускати, що вони утворюють мартингал-різницю відносно фільтрації $(\mathrm{F}_n, n \geq 0)$, тобто $E\left(V_n \middle| \mathrm{F}_{n-1}\right)=0$ майже напевно (м.н.) при всіх $n \geq 1$, де E – знак математичного сподівання. Будемо припускати, що

$$\lim_{n\to\infty} EV_n^2 = \sigma^2 . \tag{4}$$

Тоді при зроблених вище припущеннях процедура (1) збігається до кореня θ рівняння $F(x)=0$ ([4], теорема 1.2.3), тобто

$$X_n \to \theta \quad \text{м.н.} \ (n \to \infty). \tag{5}$$

Природньо виникає запитання про швидкість збіжності в (5). При дослідженні швидкості збіжності процедури (1) будемо припускати, що функція $F(x)$ диференційовна в точці θ, тобто при деякому $\lambda > 0$

$$F(x) = \lambda\left(x-\theta\right)+o\left(x-\theta\right),\ x \to \theta . \tag{6}$$

В [5] показано, що коли послідовність пробних кроків $(a_n, n \geq 1)$ має вигляд $a_n = p/n^a$, де $a \in (0,1)$, $p > 0$, то швидкість збіжності має порядок $\left(\ln n/n^a\right)^{1/2}$, а якщо $a_n = p/n$, то – $\left(\ln\ln n/n\right)^{1/2}$, але при цьому має виконуватись умова $p > 1/(2\lambda)$. Тобто в другому випадку швидкість збіжності є близькою до оптимальної $1/n^{1/2}$, але умова $p > 1/(2\lambda)$ на практиці часто не може бути виконана, оскільки вона вимагає інформації хоча б про певні межі, в яких знаходиться значення похідної $F'(\theta)=\lambda$. Тому актуальним є знаходження інших видів пробних кроків $(a_n,\ n \geq 1)$, які б забезпечували близьку до оптимальної швидкість збіжності процедури (1), але при цьому не вимагали б додаткової інформації про властивості функції $F(x)$.

Основна частина. Розглянемо спочатку загальний випадок послідовності $(a_n, n \geq 1)$. Позначимо $l_n = \log_+\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right),\ n \geq 1$, де $\log_+ t = \ln\max\{t, e\},\ t \geq 0$.

Теорема 1. Нехай виконуються умови (2)–(4), (6) і наступні умови:

$$a_n \geq a_{n+1},\ n \geq 1; \tag{7}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_{n+1}}\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \tau < 2\lambda ; \tag{8}$$

$$\lim_{n\to\infty} E\left(V_n^2 \middle| \mathrm{F}_{n-1}\right) = \sigma^2 \ \text{м.н.} \tag{9}$$

Якщо при деякому $s \in (2,4)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{s/2} E\left|V_n\right|^s < \infty , \tag{10}$$

то

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{|X_n-\theta|}{(a_n l_n)^{1/2}}=\left(\frac{2}{2\lambda-\tau}\right)^{1/2}\sigma \quad \text{м.н.} \tag{11}$$

Доведення. Введемо позначення:

$$p_n=\prod_{j=1}^{n}\left(1-\lambda a_j\right),\ B_n=\sum_{k=1}^{n}a_k^2/p_k^2,\ L_n=\log_+\log_+ B_n .$$

Зауважимо, що в силу (2), (7), (8) мають місце співвідношення:

$$L_n \sim l_n \quad (n\to\infty); \tag{12}$$

$$p_n^2 B_n \sim \frac{1}{2\lambda-\tau}a_n \quad (n\to\infty). \tag{13}$$

Використовуючи умови (2), (4), (7)–(10) дістанемо, що при будь-якому $\varepsilon>0$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{B_n^2}E\left[\left(\frac{a_n V_n}{p_n}\right)^4 I\left(\left|\frac{a_n V_n}{p_n}\right|<\varepsilon B_n^{1/2}\right)\right]<\infty,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{B_n}E\left[\left(\frac{a_n V_n}{p_n}\right)^2 I\left(\left|\frac{a_n V_n}{p_n}\right|\ge\varepsilon B_n^{1/2}\right)\right]<\infty,$$

$$\frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^2}{p_k^2}E\left(V_k^2\middle|\mathrm{F}_{k-1}\right)\to\sigma^2 \quad \text{м.н.} \quad (n\to\infty).$$

Тому в силу теореми 1 з роботи [6] має місце закон повторного логарифма:

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\left|\sum_{k=1}^{n}(a_k/p_k)V_k\right|}{(2B_n L_n)^{1/2}}=\sigma \quad \text{м.н.} \tag{14}$$

Розглянемо лінійне стохастичне рекурентне рівняння:

$$Y_n=(1-\lambda a_n)Y_{n-1}+a_n V_n,\ n\ge 1,\ Y_0=0.$$

Оскільки

$$Y_n=p_n\sum_{k=1}^{n}(a_k/p_k)V_k,$$

то з (14), з урахуванням (12), (13) випливає:

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{|Y_n|}{(a_n l_n)^{1/2}}=\left(\frac{2}{2\lambda-\tau}\right)^{1/2}\sigma \quad \text{м.н.} \tag{15}$$

Нехай $\chi_n=(a_n l_n)^{-1/2}$, $n\ge 1$, і покажемо, що

$$\|X_n-Y_n\|=o\left(\chi_n^{-1}\right) \quad \text{м.н.} \quad (n\to\infty). \tag{16}$$

В силу припущень теореми має місце співвідношення (5). З (5) та (6) випливає, що рівняння (1) може бути записане у вигляді (без обмеження загальності припустимо $\theta=0$)

$$X_n=(1-\lambda a_n)X_{n-1}+a_n\delta_{n-1}X_{n-1}+a_n V_n,\ n\ge 1, \tag{17}$$

де $(\delta_n,\ n\ge 1)$ – послідовність випадкових векторів така, що

$$\|\delta_n\|\to 0 \quad \text{м.н.} \quad (n\to\infty). \tag{18}$$

Ітеруючи (17), дістанемо:

$$X_n=\sum_{i=1}^{n}a_i\prod_{j=i+1}^{n}\left(1-\lambda a_j\right)V_i+\sum_{i=1}^{n-1}a_{i+1}\prod_{j=i+2}^{n}\left(1-\lambda a_j\right)\delta_i X_i .$$

Введемо позначення:

$$\tilde{X}_n=\chi_n X_n,\ \tilde{Y}_n=\chi_n Y_n,$$

$$G_{n,i}=a_{i+1}\chi_n\chi_i^{-1}\prod_{j=i+2}^{n}\left(1-\lambda a_j\right)\delta_i,\ 1\le i\le n-1.$$

Тоді

$$\tilde{X}_n=\tilde{Y}_n+\sum_{i=1}^{n-1}G_{n,i}\tilde{X}_i . \tag{19}$$

З умови (8) випливає, що знайдуться додатні сталі c і α такі, що має місце нерівність

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left|G_{n,i}\right| \le c\sum_{i=1}^{n-1} a_{i+1}\prod_{j=i+2}^{n}\left(1-a_j\right)^{\alpha}\left|\delta_i\right|.$$

Звідси в силу (18) та леми Тепліца випливає, що

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n-1}\left|G_{n,i}\right| = 0 \quad \text{м.н.} \tag{20}$$

З (15) випливає, що $\sup\limits_{n\ge1}\left|\tilde{Y}_n\right| < \infty$ м.н. Тому в силу (19) і (20) робимо висновок, що $\sup\limits_{n\ge1}\left|\tilde{X}_n\right| < \infty$ м.н. Тоді на основі (19) дістанемо:

$$\left|\tilde{X}_n - \tilde{Y}_n\right| \le \sum_{i=1}^{n-1}\left|G_{n,i}\right| \sup_{n\ge1}\left|\tilde{X}_n\right|.$$

Звідси та з (20) випливає співвідношення (16). В свою чергу, з (16) та (15) випливає (11). Теорема 1 доведена.

Розглянемо далі послідовність $\left(a_n,\ n\ge1\right)$ спеціального виду: $a_n = \ln_p n/n$, де $\ln_1 n = \log_+ n$, $\ln_p n = \log_+\left(\ln_{p-1} n\right),\ p\ge 2$.

Теорема 2. Нехай у процедурі (1) $a_n = \ln_p n/n$, $p \ge 2$ і виконуються умови (3), (4), (6), (9). Якщо при деякому $s\in\left(2,4\right)$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\ln_p n/n\right)^{s/2} E\left|V_n\right|^{s} < \infty,$$

то

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{n}{\ln\ln n\ \ln_p n}\right)^{1/2}\left|X_n-\theta\right| = \frac{\sigma}{\sqrt{\lambda}} \quad \text{м.н.} \tag{21}$$

Доведення. Виконання умов (2) та (7) тереми 1 очевидне. Неважко також переконатися, що виконується умова (8) з $\tau = 0$ та $l_n \sim \ln\ln n$ $\left(n\to\infty\right)$. Тому в силу теореми 1 має місце (21).

Висновки. Розглянуто процедуру Роббінса-Монро з пробними кроками спеціального виду, швидкість збіжності якої у порівнянні з класичною процедурою (з пробними кроками $\left(1/n\right)$) є гіршою на як завгодно повільно зростаючу послідовність. Але при цьому не потрібна інформація про значення похідної функції у своєму нулі.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Robbins H., Monro S.* A stochastic approximation method // Ann. Math. Statist. – 1951. – Vol. 22. – № 1. – P. 400–407.
2. *Kiefer J., Wolfowitz J.* Stochastic estimation of the maximum of a regression function // Ann. Math. Statist. – 1952. – Vol. 23, № 3. – P. 462–466.
3. *Вазан М.* Стохастическая аппроксимация. – М.: Мир, 1972. – 342 с.
4. *Duflo M.* Random iterative models. – Berlin: Springer, 1997. – 385 p.
5. *Коростелев А.П.* Стохастические рекуррентные процедуры (локальные свойства). – М.: Наука, 1984. – 208 с.
6. *Heyde C.C., Scott D.J.* Invariance principles for the law of the iterated logarithm for martingales and processes with stationary increments // Ann. Probab. – 1973. – Vol. 1. – № 3. – P. 428–436.

КОВАЛЬ Валерій Олександрович – доктор фізико-математичних наук, професор кафедри вищої математики Житомирського державного технологічного університету.

Наукові інтереси:

– граничні теореми теорії ймовірностей.

Тел.: (0412) 24-37-89.

E-mail: vkoval@com.zt.ua

Подано 23.03.2005

Коваль В.О. Про швидкість збіжності процедури Роббінса-Монро.
Коваль В.А. О скорости сходимости процедуры Роббинса-Монро.
Koval' V.O. On the rate of convergence of the Robbins-Monro procedure.

УДК 519.21

Про швидкість збіжності процедури Роббінса-Монро / В.О. Коваль

Досліджується швидкість збіжності одновимірної процедури Роббінса-Монро загального виду. Розглянуто процедуру з пробними кроками спеціального виду, швидкість збіжності якої є близькою до оптимальної.

УДК 519.21

О скорости сходимости процедуры Роббинса-Монро / В.А. Коваль

Исследуется скорость сходимости одномерной процедуры Роббинса-Монро общего вида. Рассмотрена процедура с пробными шагами специального вида, скорость сходимости которой близка к оптимальной.

УДК 519.21

On the rate of convergence of the Robbins-Monro procedure / V.O. Koval'

The rate of convergence of the onedimensional Robbins-Monro procedure in general case is investigated. The procedure with steplengths of special form, the rate of convergence of which is close to optimal, is considered.