УДК 539.376

В.В. Михайленко, д.ф.-м.н., проф.
Житомирський державний технологічний університет
О.В. Лущиков, ст.викл.
Житомирський військовий інститут радіоелектроніки ім. С.П. Корольова
С.П. Давидчук, ст.викл.
Житомирський державний технологічний університет

МОДЕЛЮВАННЯ НЕЛІНІЙНОЇ ПОВЕДІНКИ НЕПРУЖНИХ П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНИХ ТІЛ ПРИ ГАРМОНІЧНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

Досліджується загальна структура амплітудних рівнянь, що описують одночастотне наближення коливань непружних фізично нелінійних п'єзоелектричних тіл. Визначено фундаментальну роль, яку відіграє при цьому умова інваріантності амплітуд відносно перетворення зсуву в часі.

В теорії нелінійних коливань знаходить застосування так званий принцип одночастотності, математичному обгрунтуванню якого присвячена монографія [1]. У випадку стаціонарних коливань непружних п'єзоелектричних тіл цей принцип означає наступне: припускається, що в результаті гармонічного електромеханічного навантаження в об'ємі п'єзоелектричного тіла встановлюється напружено-деформований і електричний стан вигляду:

$$\begin{aligned} &\sigma_{ij} = \sigma'_{ij}\cos\omega t - \sigma''_{ij}\sin\omega t, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon'_{ij}\cos\omega t - \varepsilon''_{ij}\sin\omega t, \\ &E_j = E'_j\cos\omega t - E''_j\sin\omega t, \quad D_j = D'_j\cos\omega t - D''_j\sin\omega t. \end{aligned} \tag{1}$$

Деякі висновки про точність розрахунків нелінійних стаціонарних коливань непружних тіл, що грунтуються на принципі одночастотності, можна знайти, наприклад, в роботах [2], [3]. З особливо великою точністю одночастотний режим витримується при резонансних коливаннях непружних тіл.

Приймемо за незалежні змінні складові механічної деформації ε'_{ij}, ε''_{ij} та індукції електричного поля D'_j, D''_j. Тоді складові механічних напружень σ'_{ij}, σ''_{ij} й напруженості електричного поля E'_j, E''_j розглядаються як тензорні та векторні функції незалежних змінних:

$$\begin{aligned} &\sigma'_{ij} = \sigma'_{ij}\left(\varepsilon'_{kl},\varepsilon''_{kl},D'_k,D''_k\right), \quad \sigma''_{ij} = \sigma''_{ij}\left(\varepsilon'_{kl},\varepsilon''_{kl},D'_k,D''_k\right), \\ &E'_j = E'_j\left(\varepsilon'_{kl},\varepsilon''_{kl},D'_k,D''_k\right), \quad E''_j = E''_j\left(\varepsilon'_{kl},\varepsilon''_{kl},D'_k,D''_k\right). \end{aligned} \tag{2}$$

При такому підході нелінійна поведінка п'єзоелектричного тіла враховується нелінійністю залежностей (2). Ці залежності повинні задовольняти умову інваріантності відносно перетворення зсуву в часі, тобто інваріантності відносно заміни в (1) ωt на $\omega t+\varphi$. Цю умову можна записати в символічному матричному вигляді:

$$\boldsymbol{QS}\left(\boldsymbol{Л}\right) = \boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{QЛ}\right), \tag{3}$$

де

$$\boldsymbol{S} = \left(\sigma'_{ij},\sigma''_{ij},E'_k,E''_k\right)^T, \quad \boldsymbol{Л} = \left(\varepsilon'_{ij},\varepsilon''_{ij},D'_k,D''_k\right)^T,$$

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Далі вважаємо функції (2) неперервно-диференційовними по $\varepsilon'_{kl},\varepsilon''_{kl},D'_k,D''_k$. Тоді шляхом виключення параметра φ рівності (3) можна записати в диференціальній формі:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\tilde{\sigma}_{ij}}{\partial\varepsilon'_{kl}}\varepsilon''_{kl} - \frac{\partial\tilde{\sigma}_{ij}}{\partial\varepsilon''_{kl}}\varepsilon'_{kl} + \frac{\partial\tilde{\sigma}_{ij}}{\partial D'_k}D''_k - \frac{\partial\tilde{\sigma}_{ij}}{\partial D''_k}D'_k + i\tilde{\sigma}_{ij} = 0, \\ &\frac{\partial\tilde{E}_i}{\partial\varepsilon'_{kl}}\varepsilon''_{kl} - \frac{\partial\tilde{E}_i}{\partial\varepsilon''_{kl}}\varepsilon'_{kl} + \frac{\partial\tilde{E}_i}{\partial D'_k}D''_k - \frac{\partial\tilde{E}_i}{\partial D''_k}D'_k + i\tilde{E}_i = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

де введено позначення:

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \sigma'_{ij} + i\sigma''_{ij},\ \tilde{E}_k = E'_k + iE''_k,\ i = \sqrt{-1}\ . \tag{5}$$

Розглянемо диференціальне рівняння першого порядку:

$$\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial\varepsilon'_{kl}}\varepsilon''_{kl} - \frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial\varepsilon''_{kl}}\varepsilon'_{kl} + \frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial D'_k}D''_k - \frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial D''_k}D'_k = 0\ , \tag{6}$$

де $\tilde{\Phi} = \Phi_1 + i\Phi_2$ – комплекснозначна функція 18 дійсних змінних $\varepsilon'_{kl}, \varepsilon''_{kl}, D'_k, D''_k$. Записавши відповідну характеристичну систему, або безпосередньою підстановкою в рівняння (6), легко переконатися, що будь-яка з величин:

$$\Gamma_{ijkl} = \varepsilon'_{ij}\varepsilon'_{kl} + \varepsilon''_{ij}\varepsilon''_{kl},\ \Gamma_{ijk} = \varepsilon'_{ij}D'_k + \varepsilon''_{ij}D''_k,\ \Gamma_{kl} = D'_kD'_l + D''_kD''_l, \tag{7}$$

$$\overset{€}{\Gamma}_{ijkl} = \varepsilon'_{ij}\varepsilon''_{kl} - \varepsilon''_{ij}\varepsilon'_{kl},\ \overset{€}{\Gamma}_{ijk} = \varepsilon'_{ij}D''_k - \varepsilon''_{ij}D'_k,\ \overset{€}{\Gamma}_{kl} = D'_kD''_l - D''_kD'_l \tag{8}$$

є частинним інтегралом рівняння (6).

Величини (7) і (8) можна записати в термінах повних амплітуд і зсувів фаз:

$$\begin{gathered}\Gamma_{ijkl} = \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}\overset{\circ}{\varepsilon}_{kl}\cos\left(\varphi^{\varepsilon}_{kl} - \varphi^{\varepsilon}_{ij}\right),\ \Gamma_{ijk} = \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}\overset{\circ}{D}_k\cos\left(\varphi^{D}_{k} - \varphi^{\varepsilon}_{ij}\right),\ \Gamma_{kl} = \overset{\circ}{D}_k\overset{\circ}{D}_l\cos\left(\varphi^{D}_{l} - \varphi^{D}_{k}\right),\\ \overset{€}{\Gamma}_{ijkl} = \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}\overset{\circ}{\varepsilon}_{kl}\sin\left(\varphi^{\varepsilon}_{kl} - \varphi^{\varepsilon}_{ij}\right),\ \overset{€}{\Gamma}_{ijk} = \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}\overset{\circ}{D}_k\sin\left(\varphi^{D}_{k} - \varphi^{\varepsilon}_{ij}\right),\ \overset{€}{\Gamma}_{kl} = \overset{\circ}{D}_k\overset{\circ}{D}_l\sin\left(\varphi^{D}_{l} - \varphi^{D}_{k}\right),\end{gathered} \tag{9}$$

де

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} = \left(\varepsilon'^2_{ij} + \varepsilon''^2_{ij}\right)^{0,5},\ \overset{\circ}{D}_k = \left(D'^2_k + D''^2_k\right)^{0,5},\ \operatorname{tg}\varphi^{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon''_{ij}/\varepsilon'_{ij},\ \operatorname{tg}\varphi^{D}_{k} = D''_k/D'_k\ , \tag{10}$$

і внаслідок цього виразити через 9 амплітуд $\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}, \overset{\circ}{D}_k$ і 8 зсувів фаз, наприклад $\varphi^{\varepsilon}_{ij} - \varphi^{\varepsilon}_{11}$, $\varphi^{D}_{k} - \varphi^{D}_{1}$ (всього 17 незалежних змінних). Довільна функція цих 17 змінних є загальним розв'язком рівняння (6). Разом з тим, цей загальний розв'язок надалі зручніше зображати у вигляді довільної функції

$$\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}\left(\Gamma_{ijkl},\ \Gamma_{ijk},\ \Gamma_{kl},\ \overset{€}{\Gamma}_{ijkl},\ \overset{€}{\Gamma}_{ijk},\ \overset{€}{\Gamma}_{kl}\right). \tag{11}$$

Зрозуміло, що аргументи в (11) не є незалежними. Наприклад легко переконатися в правдивості рівностей:

$$\begin{aligned}\overset{€}{\Gamma}_{ijkl}\overset{€}{\Gamma}_{pqrs} &= \Gamma_{ijpq}\Gamma_{klrs} - \Gamma_{ijrs}\Gamma_{klpq},\\ \overset{€}{\Gamma}_{ijk}\overset{€}{\Gamma}_{pqr} &= \Gamma_{ijpq}\Gamma_{kq} - \Gamma_{ijr}\Gamma_{pqk},\\ \overset{€}{\Gamma}_{kl}\overset{€}{\Gamma}_{pq} &= \Gamma_{kp}\Gamma_{lq} - \Gamma_{kq}\Gamma_{lp}.\end{aligned} \tag{12}$$

Звернемося до співвідношень:

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \tilde{C}^{D}_{ijkl}(;)\tilde{\varepsilon}_{kl} + \tilde{h}_{kij}(;)\tilde{D}_k,\ \ \tilde{E}_k = \tilde{h}^{*}_{kij}(;)\tilde{\varepsilon}_{ij} + \tilde{\beta}^{\varepsilon}_{kl}(;)\tilde{D}_l, \tag{13}$$

де поряд з (5) використовуються позначення:

$$\begin{gathered}\tilde{e}_{kl} = e'_{kl} + ie''_{kl},\ \tilde{D}_k = D'_k + iD''_k,\\ \tilde{p} = \left\{\tilde{C}^{D}_{ijkl}(;),\ \tilde{h}_{kij}(;),\ \tilde{h}^{*}_{kij}(;),\ \tilde{\beta}^{\varepsilon}_{kl}(;)\right\} = p' + ip'',\end{gathered} \tag{14}$$

а комплексні коефіцієнти $\tilde{C}^{D}_{ijkl}(;)$, $\tilde{h}_{kij}(;)$, $\tilde{h}^{*}_{kij}(;)$, $\tilde{\beta}^{\varepsilon}_{kl}(;)$ є функціями компонент тензорів (7) і (8). Якщо припустити диференційовність цих функцій і підставити співвідношення (13) в рівняння (4), то легко переконатися, що ці рівняння задовольняються тотожно. Для цього необхідно врахувати сказане про рівняння (6) і його загальний розв'язок (11). Більше того, можна показати, що внаслідок довільності коефіцієнтів $\tilde{C}^{D}_{ijkl}(;)$, $\tilde{h}_{kij}(;)$, $\tilde{h}^{*}_{kij}(;)$, $\tilde{\beta}^{\varepsilon}_{kl}(;)$ зображення величин $\tilde{\sigma}_{ij}$ і $\tilde{E}_k$ у вигляді (13) є загальним розв'язком рівнянь (4).

Отже, якщо деякі диференційовні функції (2) задовільняють умову інваріантності відносно перетворення зсуву в часі (3), то їх можна записати у вигляді (13). З іншого боку, приймаючи до уваги інваріантність величин (7) і (8) відносно перетворення зсуву в часі, тобто відносно заміни:

$$\varepsilon'_{kl} \to \varepsilon'_{kl}\cos\varphi - \varepsilon''_{kl}\sin\varphi\ ,\ \varepsilon''_{kl} \to \varepsilon'_{kl}\sin\varphi + \varepsilon''_{kl}\cos\varphi\ , \tag{15}$$

$$D'_k \to D'_k \cos\varphi - D''_k \sin\varphi,\ D''_k \to D'_k \sin\varphi + D''_k \cos\varphi,$$

безпосередньою перевіркою переконуємося, що функції (13) задовільняють умову (3).

Таким чином, необхідною і достатньою умовою інваріантності функцій (2) відносно перетворення зсуву в часі є їх зображення у вигляді (13). При цьому, звичайно, припускається диференційовність коефіцієнтів $\tilde{C}^D_{ijkl}(;)$, $\tilde{h}_{kij}(;)$, $\tilde{h}^*_{kij}(;)$, $\tilde{\beta}^\varepsilon_{kl}(;)$.

Надалі викладення матеріалу спирається на наступне зауваження.

Зауваження 1. Виділимо з множини всіх можливих фізично нелінійних матеріалів клас матеріалів, нелінійні властивості яких можна вважати «симетричними» відносно знака збурюючих факторів. Наприклад матеріал з кубічною нелінійністю однаково («симетрично») реагує на розтяг–стиск або, скажімо, на зміну знака електричної індукції. Якщо ж матеріалу, крім того, властива помітна квадратична нелінійність, то його реакція на подібні збурення вже «несиметрична».

Нижче розглядаються тільки матеріали виділеного класу, які будемо називати *матеріалами з «симетричними» нелінійними властивостями*

У розглядуваному випадку одночастотного наближення коливань нелінійні властивості матеріалу проявляються в залежності коефіцієнтів з (13) від амплітуд і зсувів фаз незалежних змінних, а матеріалу з «симетричними» нелінійними властивостями – від амплітуд і абсолютних величин зсувів фаз. Це означає, що величини (8) згідно з їх зображенням (9) повинні входити до числа аргументів у вигляді добутків або квадратів. Але тоді з (12) випливає, що коефіцієнти в (13) можна вважати функціями лише величин (7).

Зрозуміло, що співвідношення (13) можна використовувати як вихідні й у випадку одночастотного наближення коливань для матеріалів з «несиметричними» нелінійними властивостями. Для цього коефіцієнти цих рівнянь слід вважати функціями не тільки величин (7), а й величин типу (8), які залежать від знака зсуву фаз. Однак такий опис коливань не буде повним без врахування сталих складових цих коливань, що можуть суттєво впливати на осцилюючі складові (1) [4].

Отже, коефіцієнти в рівняннях (13) вважаємо далі функціями компонент тензорів (7): $(;) = \left(\Gamma_{ijkl}, \Gamma_{ijk}, \Gamma_{kl}\right)$.

Звернемося до питання про симетрію цих коефіцієнтів відносно перестановки індексів. Симетрія

$$\tilde{C}^D_{ijkl}(;) = \tilde{C}^D_{jikl}(;) = \tilde{C}^D_{ijlk}(;),$$
$$\tilde{h}_{kij}(;) = \tilde{h}_{kji}(;),\ \tilde{h}^*_{kij}(;) = \tilde{h}^*_{kji}(;) \tag{16}$$

є очевидною. Що стосується симетрії

$$\tilde{C}^D_{ijkl}(;) = \tilde{C}^D_{klij}(;),\ \tilde{\beta}^\varepsilon_{kl}(;) = \tilde{\beta}^\varepsilon_{lk}(;), \tag{17}$$

або рівності коефіцієнтів

$$\tilde{h}_{kij}(;) = \tilde{h}^*_{kij}(;), \tag{18}$$

то з вищевикладеного про них нічого сказати не можна. Для з'ясування цього питання звернемося до функції дисипації:

$$\bar{D} = \sigma''_{ij}\varepsilon'_{ij} - \sigma'_{ij}\varepsilon''_{ij} + E''_k D'_k - E'_k D''_k. \tag{19}$$

Якщо записати вираз для цієї функції з врахуванням рівностей (4), то можна показати, що:

$$\bar{U} = \sigma'_{ij}\varepsilon'_{ij} + \sigma''_{ij}\varepsilon''_{ij} + E'_k D'_k + E''_k D''_k \tag{20}$$

як функція незалежних змінних ε'_{kl}, ε''_{kl}, D'_k, D''_k задовольняє диференціальному рівнянню (6)

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial \varepsilon'_{kl}}\varepsilon''_{kl} - \frac{\partial \bar{U}}{\partial \varepsilon''_{kl}}\varepsilon'_{kl} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial D'_k}D''_k - \frac{\partial \bar{U}}{\partial D''_k}D'_k = 0. \tag{21}$$

Цьому ж рівнянню задовольняє і функція $\bar{D}$. Для цього слід записати, з врахуванням (4), вираз для $\bar{U}$ (20).

Зауваження 2. Зазначені вище перетворення з врахуванням рівностей (4) зручно проводити в комплексному записі, якщо ввести комплекснозначну функцію:

$$\tilde{\Phi} = \tilde{\sigma}_{ij}\bar{\tilde{\varepsilon}}_{ij} + \tilde{E}_k \bar{\tilde{D}}_k \tag{22}$$

і врахувати, що

$$\operatorname{Im}\tilde{\Phi} = \bar{D}\,,\ \operatorname{Re}\tilde{\Phi} = \bar{U}\,. \tag{23}$$

Тоді, використовуючи в (22) рівності (4), приходимо до диференціального рівняння (6).

Функцію (20) $\bar{U}$ будемо називати функцією накопичення. Енергетичний зміст цієї функції розкривається, наприклад, в [5].

Оскільки як функції дисипації і накопичення задовольняють диференціальному рівнянню (6), то для матеріалів з «симетричними» нелінійними властивостями вони, як і коефіцієнти рівнянь (13), є функціями вигляду:

$$\bar{D} = \bar{D}\left(\Gamma_{ijkl}, \Gamma_{ijk}, \Gamma_{kl}\right),\ \bar{U} = \bar{U}\left(\Gamma_{ijkl}, \Gamma_{ijk}, \Gamma_{kl}\right). \tag{24}$$

З іншого боку, виділяючи в рівняннях (13) дійсну і уявну частини і використовуючи їх в співвідношеннях (19) і (20), можна записати:

$$\bar{D} = \bar{D}_1 + \bar{D}_2\,,\ \bar{U} = \bar{U}_1 - \bar{U}_2\,, \tag{25}$$

де, з врахуванням позначень (7) і (8):

$$\begin{aligned}
\bar{D}_1 &= C^{D''}_{ijkl}(;)\,\Gamma_{ijkl} + \left(h''_{kij}(;) + h^{*\,\prime\prime}_{kij}(;)\right)\Gamma_{ijk} + \beta''_{kl}(;)\,\Gamma_{kl}\,,\\
\bar{D}_2 &= C^{D'}_{ijkl}(;)\,\hat{\Gamma}_{ijkl} + \left(h'_{kij}(;) - h^{*\prime}_{kij}(;)\right)\hat{\Gamma}_{ijk} + \beta'_{kl}(;)\,\hat{\Gamma}_{kl}\,,\\
\bar{U}_1 &= C^{D'}_{ijkl}(;)\,\Gamma_{ijkl} + \left(h'_{kij}(;) + h^{*\prime}_{kij}(;)\right)\Gamma_{ijk} + \beta'_{kl}(;)\,\Gamma_{kl}\,,\\
\bar{U}_2 &= C^{D''}_{ijkl}(;)\,\hat{\Gamma}_{ijkl} + \left(h''_{kij}(;) - h^{*\prime\prime}_{kij}(;)\right)\hat{\Gamma}_{ijk} + \beta''_{kl}(;)\,\hat{\Gamma}_{kl}\,.
\end{aligned} \tag{26}$$

Зауваження 3. В результаті перетворення зсуву в часі (15) повні амплітуди деформацій $\overset{0}{\varepsilon}_{ij}$ та індукції електричного поля $\overset{0}{D}_k$ (10) не змінюються, а фази $\varphi^{\varepsilon}_{ij}$ і φ^{D}_{k} змінюються відповідно на $\varphi^{\varepsilon}_{ij} + \varphi$ і $\varphi^{D}_{k} + \varphi$. Разом з перетворенням (15) розглянемо перетворення незалежних змінних вигляду:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon'_{kl} \to \varepsilon'_{kl}\cos\varphi + \varepsilon''_{kl}\sin\varphi\,,\ \varepsilon''_{kl} \to \varepsilon'_{kl}\sin\varphi - \varepsilon''_{kl}\cos\varphi\,,\\
&D'_{k} \to D'_{k}\cos\varphi + D''_{k}\sin\varphi\,,\ D''_{k} \to D'_{k}\sin\varphi - D''_{k}\cos\varphi\,.
\end{aligned} \tag{27}$$

Зауважимо, що це перетворення не випливає з (15) при жодному φ. Перетворення (27) також не змінює повних амплітуд деформації $\overset{0}{\varepsilon}_{ij}$ й індукції електричного поля $\overset{0}{D}_k$. Що стосується фаз $\varphi^{\varepsilon}_{ij}$ і φ^{D}_{k}, то вони змінюються відповідно на $-\varphi^{\varepsilon}_{ij} + \varphi$ і $-\varphi^{D}_{k} + \varphi$.

Оскільки величини (7) згідно з зображенням (9) визначаються косинусами зсувів фаз, то вони в результаті перетворення (27) не змінюються. В цьому можна перконатися безпосередньо, підставляючи (27) в (7). Звідси випливає, що функції дисипації і накопичення (24), як функції аргументів (7), інваріантні до перетворення (27). Те ж саме стосується і коефіцієнтів $C^{D'}_{ijkl}(;)$, $C^{D''}_{ijkl}(;)$, $h'_{kij}(;)$, $h''_{kij}(;)$, $h^{*\prime}_{kij}(;)$, $h^{*\prime\prime}_{kij}(;)$, $\beta'_{kl}(;)$, $\beta''_{kl}(;)$ у співвідношеннях (26). Щодо величин (8) $\hat{\Gamma}_{ijkl}, \hat{\Gamma}_{ijk}$ і $\hat{\Gamma}_{kl}$, які входять в (26), то вони в результаті перетворення (27) змінюють знак на протилежний.

Згідно з вищевикладеним ліві частини рівностей (25) і перші складові правих частин цих рівностей не змінюються при заміні (27), тоді як другі складові $\bar{D}_2$ і $\bar{U}_2$ правих частин змінюють знак на протилежний. Тому, вимагаючи однозначної визначеності функцій накопичення і дисипації (24) своїми аргументами, слід допустити, що

$$\bar{D}_2 = 0\,,\ \bar{U}_2 = 0\,. \tag{28}$$

Достатніми умовами виконання рівностей (28) є наступні умови симетрії:

$$\begin{aligned}
&C^{D'}_{ijkl}(;) = C^{D'}_{klij}(;)\,,\ h'_{kij}(;) = h^{*\prime}_{kij}(;)\,,\ \beta'_{kl}(;) = \beta'_{lk}(;)\,;\\
&C^{D''}_{ijkl}(;) = C^{D''}_{klij}(;)\,,\ h''_{kij}(;) = h^{*\prime\prime}_{kij}(;)\,,\ \beta''_{kl}(;) = \beta''_{lk}(;)\,.
\end{aligned} \tag{29}$$

Отже ми отримуємо загальну структуру амплітудних визначальних рівнянь у вигляді:

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \tilde{C}^{D}_{ijkl}(;)\,\tilde{\varepsilon}_{kl} + \tilde{h}_{kij}(;)\,\tilde{D}_k\,, \tag{30}$$

$$\tilde{E}_k = \tilde{h}_{kij}(;)\tilde{\varepsilon}_{ij} + \tilde{\beta}^{\varepsilon}_{kl}(;)\tilde{D}_l .$$

Зауваження 4. В лінійному випадку коефіцієнти в рівняннях (30) сталі, а умови (29) є не лише достатніми, а й необхідними для виконання рівностей (28). Тому в цьому випадку структура амплітудних рівнянь повністю визначається умовою їх інваріантності відносно перетворення зсуву в часі.

У роботі [6] рівняння вигляду (30) отримані шляхом усереднення по Гальоркіну співвідношень загальної кратноінтегральної теорії електров'язкопружності з використанням принципу взаємності, тобто припущення що ядра кратноінтегральної теорії мають таку ж симметрію відносно перестановки індексів, що і відповідні коефіцієнти нелінійного електропружного середовища. На відміну від [6] амплітудні рівняння (30) даної роботи не залежать від того, яке мехнічне середовище розглядається: в'язкопружне, пружнопластичне чи пружнов'язкопластичне. Єдиною умовою є реалізація в даному середовищі моногармонічного стану вигляду (1). Тому рівняння (30) в інтерпретації даної роботи мають більш широке застосування.

Подальше спрощення рівнянь (30) можливе з використанням припущення про їх потенціальність. Теорія потенціальних амплітудних рівнянь для непружних п'єзоелектричних матеріалів розроблена в роботі [7].

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 504 с.
2. *Сенченков И.К., Карнаухов В.Г.* Термомеханическое поведение нелинейно-вязкоупругих материалов при гармоническом нагружении // Прикл. механика. – 2001. – 37. – № 11. – С. 33–67.
3. *Киричок И.Ф., Михайленко В.В., Давидчук С.П.* Нелинейные колебания и виброразогрев вязкоупругого стержня с кубической характеристикой упругости // Прикл. механика. – 2002. – 38. – № 9. – С. 110–115.
4. *Лущиков А.В., Давидчук С.П.* Нелинейные колебания вязкоупругого стержня с квадратичной характеристикой упругости // Прикл. механика. – 2002. – 38. – № 8. – С. 125–129.
5. *Михайленко В.В.* До питання про дисипацію та накопичення електромеханічної енергії при коливаннях в'язкопружних п'єзоелектричних тіл // Вісник Київського ун-ту / Серія Ж / Фіз.-мат. науки. – 1997. – С. 128–132.
6. *Михайленко В.В.* Общая структура амплитудных определяющих уравнений неупругих пьезоэлектрических тел при циклических электромеханических процессах // Прикл. механика. – 1996. – 32. – № 12. – С. 37–42.
7. *Михайленко В.В. Лущиков А.В., Якименко С.Н.* Определяющие уравнения для неупругих физически нелинейных пьезоэлектрических тел при гармоническом электромеханическом нагружении // Збірник наукових праць КДТУ. – Випуск 10. – Кіровоград: КДТУ, 2001. – С. 175–185.

МИХАЙЛЕНКО Василь Васильович – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри вищої математики Житомирського державного технологічного університету.

Наукові інтереси:

– механіка деформівного твердого тіла.

ЛУЩИКОВ Олександр Володимирович – старший викладач кафедри математики Житомирського військового інституту радіоелектроніки ім. С.П. Корольова.

Наукові інтереси:

– механіка деформівного твердого тіла.

ДАВИДЧУК Сергій Петрович – старший викладач кафедри вищої математики Житомирського державного технологічного університету.

Наукові інтереси:

– механіка деформівного твердого тіла.

Подано 11.11.2004

Михайленко В.В., Лущиков О.В., Давидчук С.П. Моделювання нелінійної поведінки непружних п'єзоелектричних тіл при гармонічному навантаженні

Михайленко В.В., Лущиков А.В., Давидчук С.П. Моделирование нелинейного поведения неупругих пьезоэлектрических тел при резонансном нагружении

УДК 539.376

Моделювання нелінійної поведінки непружних п'єзоелектричних тіл при гармонічному навантаженні / В.В. Михайленко, О.В. Лущиков, С.П. Давидчук

Досліджується загальна структура амплітудних рівнянь, що описують одночастотне наближення коливань непружних фізично нелінійних п'єзоелектричних тіл. Визначено фундаментальну роль, яку відіграє при цьому умова інваріантності амплітуд відносно перетворення зсуву в часі.

УДК 539.376

Моделирование нелинейного поведения неупругих пьезоэлектрических тел при резонансном нагружении / В.В.Михайленко, А.В.Лущиков, С.П.Давидчук.

Исследуется общая структура амплитудных уравнений, которые описывают одночастотное приближение колебаний неупругих физически нелинейных пьезоэлектрических тел. Отмечена фундаментальная роль, которую играет при этом условие инвариантности амплитуд относительно преобразования сдвига по времени

УДК 539.376

There are investigated the general structure of amplitude equations describing the one frequency approximation of no elastic physically nonlinear piezoelectric body oscillations. Fundamental role in studied physical phenomena was marked to play the condition of amplitude invariance with respect to translation to time