

Е.А. Сдвижкова, д.т.н, проф.
ГВУЗ «Национальный горный университет»
А.С. Ковров, к.т.н, доц.
ГВУЗ «Национальный горный университет»
Т.В. Мнишенко, студ. гр. ГК-15
ГВУЗ «Национальный горный университет»

Вероятностно-стохастическая модель распределения физико-механических свойств мягких горных пород

Физико-механические характеристики грунтов и мягких горных пород получаемые в результате лабораторных испытаний являются важными исходными параметрами для оценки устойчивости природных склонов и искусственных откосов. Такие свойства пород, как сцепление и угол внутреннего трения, обусловлены влиянием ряда природных и техногенных факторов.

При этом, из множества факторов, влияющих на устойчивость откоса, выделяют наиболее значимые, которые в большей степени обуславливают свойства пород. Чем больше факторов учитывается в геотехнической модели, тем детальнее исследуются свойства пород, что повышает точность научного прогноза оползнеопасности откоса. С другой стороны, увеличение количества факторов, входящих в модель, усложняет ее и обуславливает уменьшение достоверность геотехнических расчетов.

Цель работы заключается в построении статистического распределения изучаемых физико-механических свойств мягких горных пород и обосновании вероятностно-статистической модели.

По результатам лабораторных испытаний пород построены статистические распределения изучаемых количественных признаков – угла внутреннего трения φ и сцепления C . Установлено, что статистическое распределение физико-механических свойств пород близко к равномерному закону.

Ключевые слова: откос; сцепление; угол внутреннего трения; график Пирсона; равномерный закон распределения.

Введение. Экспериментальные исследования физико-механических характеристик мягких покрывающих пород являются важной составляющей частью инженерно-геологических изысканий при оценке устойчивости естественных склонов, техногенных откосов и геотехнических сооружений. Такими породами обычно являются светло-желтые лессовые суглинки, желто-бурые плотные суглинки, супеси и другие инженерно-геологические элементы, физические свойства которых подвержены значительным вариациям. Достоверные значения таких величин как сцепление, угол внутреннего трения, полученных экспериментальным путем, предопределяют устойчивость и надежность разнообразных сооружений и геотехнических объектов в процессе их строительства и эксплуатации.

Методы лабораторного исследования свойств грунтов обычно не учитывают особенности макроструктуры, специфику его естественного строения и залегания, а также характер распределения в нем неоднородностей и включений. Использование методов теории вероятностей и математической статистики дает возможность более строго и научно обоснованно определять расчетные свойства пород, слагающих откос [1].

Анализ последних исследований и публикаций. Вопросами статистической обработки результатов испытаний прочностных характеристик горных пород занимались Г.К. Бондарик, И.С. Комаров, Н.Н. Маслов, А.Д. Коган и др. Анализ этих работ показывает, что при обработке результатов испытаний с целью получения их расчетных показателей последние рассматриваются как детерминированные величины, хотя их распределение носит случайный характер. В лучшем случае между отдельными показателями определяются корреляционные связи, когда при известных одних показателях, используя графики и эмпирические зависимости, определяются другие [2]. Определению уровня риска при решении задач устойчивости карьерных откосов посвящен ряд работ Б.Д. Половова [3, 4], который отмечает, что расчетные схемы устойчивости откосов рассматриваются при детерминированных входных параметрах. Вероятностные методы расчета по сравнению с детерминированным подходом обладают следующими преимуществами: объективностью решения, возможностью оценки точности получаемых результатов, оценки уровня значимости исходных параметров и необходимости их уточнения. Большой вклад в развитие вероятностных методов расчета устойчивости внесли работы проф.

П.С. Шпакова, проф. Г.Г. Поклада, С.Т. Омарова [5–7], в которых заложены основы и разработана методика вероятностного расчета коэффициента запаса и параметров устойчивых откосов.

Формулировка цели статьи. Учитывая, что массив грунта или мягких горных пород, из которых состоит природный склон или искусственный откос, является сложной геомеханической системой, на которую влияют как основные, так и второстепенные факторы, рассматривать проблему устойчивости целесообразно с позиций вероятностно-статистического подхода. Такие факторы, как структурная неоднородность породного массива (наличие трещин и включений), погрешности при определении физических свойств грунтов на срезных приборах приводят к ошибкам определения прочностных характеристик грунтов и других мягких пород. Такие параметры как сцепление и угол внутреннего трения, которые фигурируют как основные в геомеханических расчетах, являются случайными величинами, значения которых могут варьировать в определенных диапазонах. Для решения прикладных задач, содержащих случайные величины и элементы неопределенности, целесообразно использовать вероятностно-статистические методы [8].

Цель статьи заключается в обосновании вероятностно-статистической модели распределения физико-механических свойств мягких горных пород по исходным данным лабораторных измерений.

Определение физико-механических характеристик мягких вскрышных пород. Для лабораторного определения физико-механических свойств мягких горных пород на карьере Мотроновско-Анновского месторождения титано-циркониевых россыпных руд (г. Вольногорск) были отобраны образцы мягких вскрышных пород ненарушенного сложения в соответствии с ДСТУ Б В.2. 1-8-2001. Образцы мягких вскрышных пород, представленные бурами, желто-бурами и красно-бурами суглинками, серо-зелеными глинами отбирались на участках обрабатываемых рабочих уступов, подвергшихся обрушениям и оползневому процессам. Размеры образцов 100x100x100 мм. Количество отобранных образцов – 3 для каждой литологической разности, отобранные в разных точках карьера. Для определения основных прочностных характеристик грунтов и мягких вскрышных пород применен метод одноплоскостного среза широко применяемый в практике инженерно-геологических исследований с использованием прибора ПС-10. Методика проведения испытаний описана в ДСТУ Б В.2.1-4-96.

Определялись следующие характеристики: сопротивление пород срезу τ , угол внутреннего трения φ и удельное сцепление C [9]. Удельные значения угла внутреннего трения φ и сцепления C при анализе не менее 3-х проб каждой литологической разности, вычислялись по формулам:

$$tg \varphi = \frac{n \sum \tau_i \sigma_i - \sum \tau_i \sum \sigma_i}{n \sum (\sigma_i)^2 - (\sum \sigma_i)^2}; \quad (1)$$

$$c = \frac{\sum \tau_i \sum \sigma_i^2 - \sum \sigma_i \sum \tau_i \sigma_i}{n \sum (\sigma_i)^2 - (\sum \sigma_i)^2}; \quad (2)$$

где τ_i – опытные значения сопротивления срезу, определенные при различных значениях σ_i и относящиеся к одному инженерно-геологическому элементу или отдельному монолиту грунта (при $n \geq 3$), n – число испытаний.

Построение статистического распределения изучаемых количественных признаков – угла внутреннего трения φ и сцепления C . Полученные экспериментальным путем значения угла внутреннего трения φ и сцепления C со статистической точки зрения представляют собой выборки из генеральных совокупностей объектов, которым присущи указанные механические характеристики. Для систематизации и визуализации наблюдаемого необходимо построить статистическое распределение каждого изучаемого количественного признака: угла внутреннего трения и сцепления. С этой целью данные (значения каждого изучаемого признака X) группируются в интервальные ряды (табл. 1).

Количество интервалов может быть выбрано произвольно, исходя из лучшей визуализации данных, либо определено по формуле [10]:

$$r = 1 + 3.21 \lg n, \quad (3)$$

где n – объем выборки.

Таблица 1

Вид интервального ряда для признака X

| | | | | |
|---------------------------------------|-------|-------|-------|-------|
| Интервалы с границами $x_{i-1} - x_i$ | 1 | 2 | | R |
| Длины интервалов | l_1 | l_2 | | l_r |
| Частоты | m_1 | m_2 | | m_r |
| Относительные частоты | w_1 | w_2 | | w_r |
| Середины интервалов | u_1 | u_2 | | u_r |

Графическим изображением интервального ряда является гистограмма относительных частот, высоты которой определяются формулой

$$h_i = \frac{w_i}{l_i}, \quad i = 1, r, \quad (4)$$

Гистограммы относительных частот для исследуемых количественных признаков угла внутреннего трения и сцепления приведены на рисунках 1 и 2.

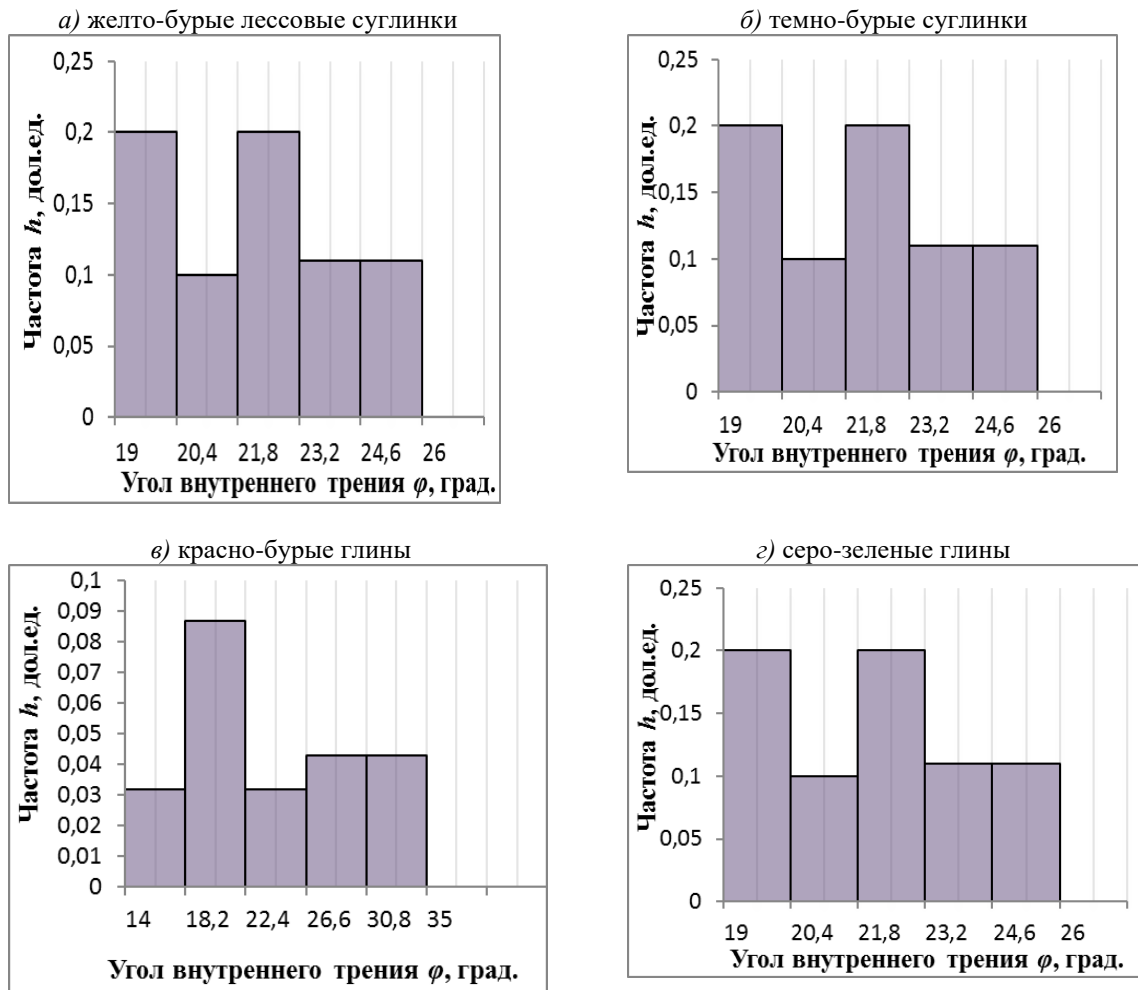


Рис. 1. Гистограммы частот для угла внутреннего трения

Для каждого распределения получены статистические моменты (параметры распределения), оценивающие среднее значение и разброс:

- начальный момент первого порядка (выборочная средняя)

$$\bar{x}^* = \sum_{i=1}^r u_i \cdot w_i; \quad (5)$$

- центральный момент второго порядка (выборочная дисперсия)

$$D^* = \sum_{i=1}^r u_i^2 \cdot w_i - (\bar{x}^*)^2; \quad (6)$$

- исправленная дисперсия

$$S^2 = \frac{n}{n-1} \cdot D^*; \quad (7)$$

- среднее квадратическое отклонение (стандарт)

$$S = \sqrt{S^2}; \quad (8)$$

- относительная вариация

$$\eta^* = \frac{S}{\bar{x}^*}. \quad (9)$$

а) желто-бурые лессовые суглинки

б) темно-бурые суглинки

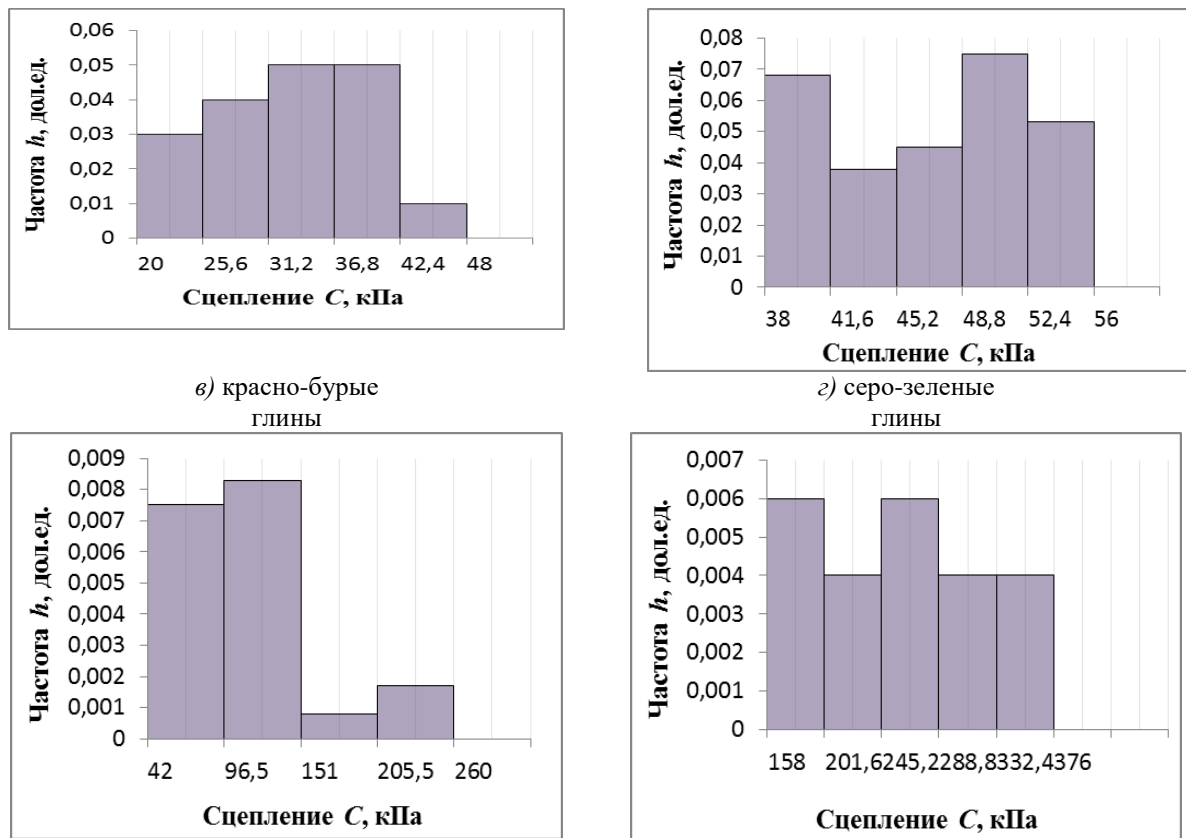


Рис. 2. Гистограммы частот для сцепления

Вычисленные значения статистических моментов сведены в таблицах 2 и 3.

Из анализа распределений угла внутреннего трения следует, что для суглинков вариация значений относительно среднего не превышает 10%, для глин вариация значений больше, но не превосходит 24%.

Разброс значений сцепления также невелик для суглинков, составляет 11–18%. Но значения сцепления, полученные на образцах глины, имеют значительный разброс. Вариация сцепления красно-бурой глины достигает 43 %.

Таблица 2

Параметры статистических распределений угла внутреннего трения φ

| Порода | Параметры статистического распределения | | |
|-------------------------------|---|------|----------|
| | \bar{x}^* | S | η^* |
| желто-бурые лессовые суглинки | 22,15 | 1,97 | 0,09 |
| темно-бурые суглинки | 25,87 | 2,30 | 0,09 |
| красно-бурые глины | 24,08 | 5,78 | 0,24 |
| серо-зеленые глины | 21,74 | 4,85 | 0,22 |

Таблица 3

Параметры статистических распределений сцепления C

| Порода | Параметры статистического распределения | | |
|-------------------------------|---|-------|----------|
| | \bar{x}^* | S | η^* |
| желто-бурые лессовые суглинки | 30,96 | 5,70 | 0,18 |
| темно-бурые суглинки | 47,09 | 5,33 | 0,11 |
| красно-бурые глины | 113,83 | 49,41 | 0,43 |
| серо-зеленые глины | 259,73 | 62,54 | 0,24 |

Как видно из гистограмм, для полученных статистических совокупностей характерно отсутствие интервалов, в которые значения изучаемых величин попадают с наибольшей частотой. В основном, и угол внутреннего трения и сцепление с одинаковой частотой принимают значения из разных интервалов равной длины. Например, гистограмма величин сцепления, полученных для серо-зеленой глины показывает, что с одинаковой частотой сцепление принимает значение и в наименьшем интервале (158–201 кПа) и в наибольшем интервале (332–376 кПа), и в интервале, содержащем среднюю выборочную (259,7 кПа). Следует отметить, что попытка увеличить при обработке данных число интервалов не

изменила общей картины. Вид гистограммы не свидетельствует в пользу нормального распределения, которое чаще всего используется в качестве статистической модели механических характеристик. В грубом приближении можно предположить, что распределение изучаемых количественных признаков близко к равномерному закону.

Гипотеза о том или ином теоретическом распределении важна с точки зрения учета изменчивости изучаемого количественного признака. В частности, при моделировании механических процессов, развивающихся в грунтах под действием различных природных и техногенных факторов, важен учет разброса основных характеристик, определяющих устойчивость грунтовых склонов – сцепления и угла внутреннего трения. Использование в расчетах только среднего значения механической характеристики без рассмотрения крайних значений может привести к грубым ошибкам при проектировании объектов. Одним из способов учета изменчивости исходных данных является выполнение многовариантных расчетов с вариацией входных параметров в пределах установленного разброса. В частности, при использовании современных численных методов возможно проведение вычислительного эксперимента, в рамках которого исходные данные – значения механических свойств грунтов могут генерироваться как случайные числа в соответствии с установленным законом распределения этих свойств [11].

В этой связи выбор теоретического закона распределения входных параметров является одним из важных этапов исследований.

Выбор теоретического распределения. Для обоснованного выбора теоретического распределения воспользуемся графиком Пирсона [12], на котором известные теоретические законы распределения вероятностей представлены в двумерном пространстве (рис. 3, 4) посредством нормированного показателя асимметрии

$$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} \quad (10)$$

и нормированного показателя эксцесса:

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}, \quad (11)$$

определяемые через центральные моменты второго μ_2 , третьего μ_3 и четвертого μ_4 порядков. Статистические аналоги указанных моментов в случае интервальной группировки данных определяются формулами:

$$\mu_2^* = \sum_{i=1}^r (u_i - \bar{x}^*)^2 \cdot w_i; \quad \mu_3^* = \sum_{i=1}^r (u_i - \bar{x}^*)^3 \cdot w_i; \quad \mu_4^* = \sum_{i=1}^r (u_i - \bar{x}^*)^4 \cdot w_i \cdot \quad (12)$$

Соответствующие значения статистических показателей асимметрии и эксцесса (β_1^* ; β_2^*) для всех исследуемых статистических совокупностей представлены в таблицах 4 и 5.

Таблица 4

Оценки асимметрии и эксцесса для сцепления

| Порода | β_1^* | β_2^* |
|-------------------------------|-------------|-------------|
| Желто-бурые лессовые суглинки | 0,00 | 1,98 |
| Темно-бурые суглинки | 0,02 | 1,61 |
| Красно-бурые глины | 1,31 | 3,78 |
| Серо-зеленые глины | 0,013 | 1,77 |

Таблица 5

Оценки асимметрии и эксцесса для угла внутреннего трения

| Порода | β_1^* | β_2^* |
|-------------------------------|-------------|-------------|
| Желто-бурые лессовые суглинки | 0,03 | 1,81 |
| Темно-бурые суглинки | 0,00 | 1,59 |
| Красно-бурые глины | 0,08 | 1,78 |
| Серо-зеленые глины | 0,24 | 1,87 |

Для подбора теоретического распределения на основе эмпирических данных точки с координатами (β_1^* ; β_2^*) наносят на график Пирсона, на котором известные теоретические распределения представлены точками (нормальное, равномерное, экспоненциальное и др.), а также линиями (гамма-распределение, бета-распределение и др.).

На рисунке 3 на график Пирсона нанесены точки, координаты которых – статистические оценки β_1^* , β_2^* – определены по данным для сцепления, а на рисунке 4 – точки, соответствующие статистическим оценкам угла внутреннего трения.

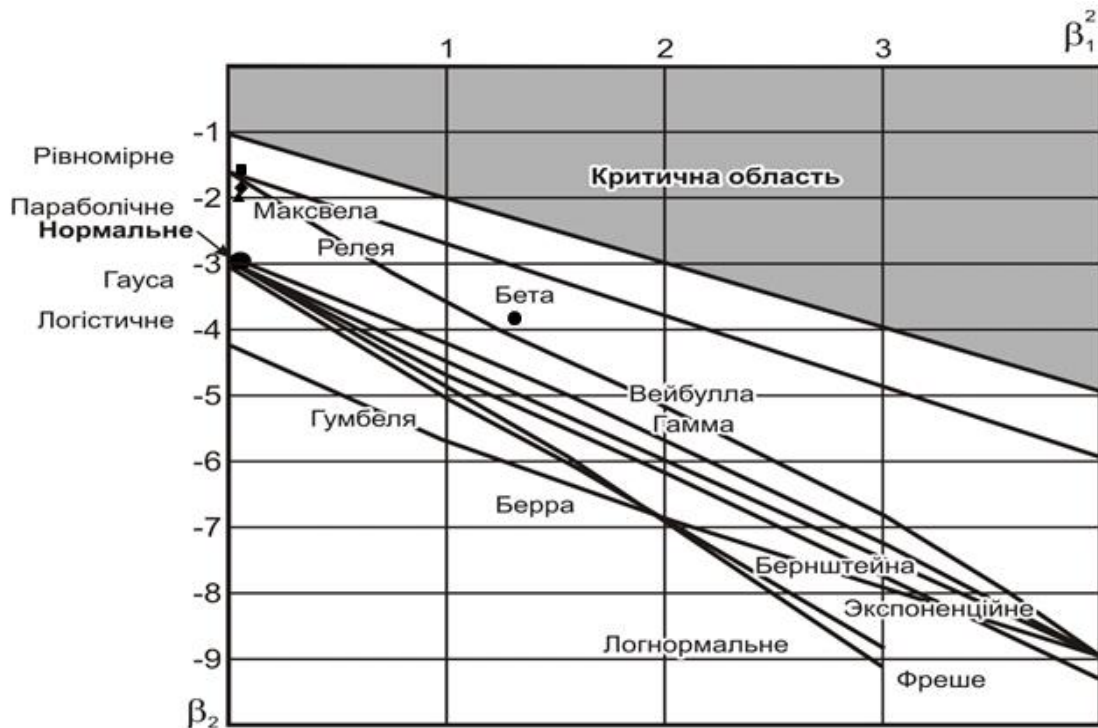


Рис. 3. Графік Пірсона з нанесеними на нього точками, відповідними статистическим оцінкам сцеплення: ▲ – красно-бурі глини; ● – серо-зелені глини; ◆ – жовто-бурі лессові суглинки; ■ – темно-бурі суглинки

Для величин сцеплення, отриманих на зразках суглинків і серо-зеленої глини, характерно те, що статистическі сукупності мають показателі асиметрії, близькі до нуля, а показателі ексцеса становлять 1,6...1,98 (табл. 4), то є близькі до величини 2,0. Точка на графіку Пірсона з координатами (0,2) відповідає рівномірному закону розподілення. Следователно, в отношенні перелічених вище сукупностей можна видвинути гіпотезу про рівномірне розподілення. Исключення становить статистическа сукупність, отримана для сцеплення зразків красно-бурої глини. Оцінки асиметрії і ексцеса для данної виборки становлять 1,31 і 3,78 відповідно (табл. 4). Точка з такими координатами (рис. 3) лежить в області бета-розподілення, для якого рівномірне розподілення являється частним случаем.

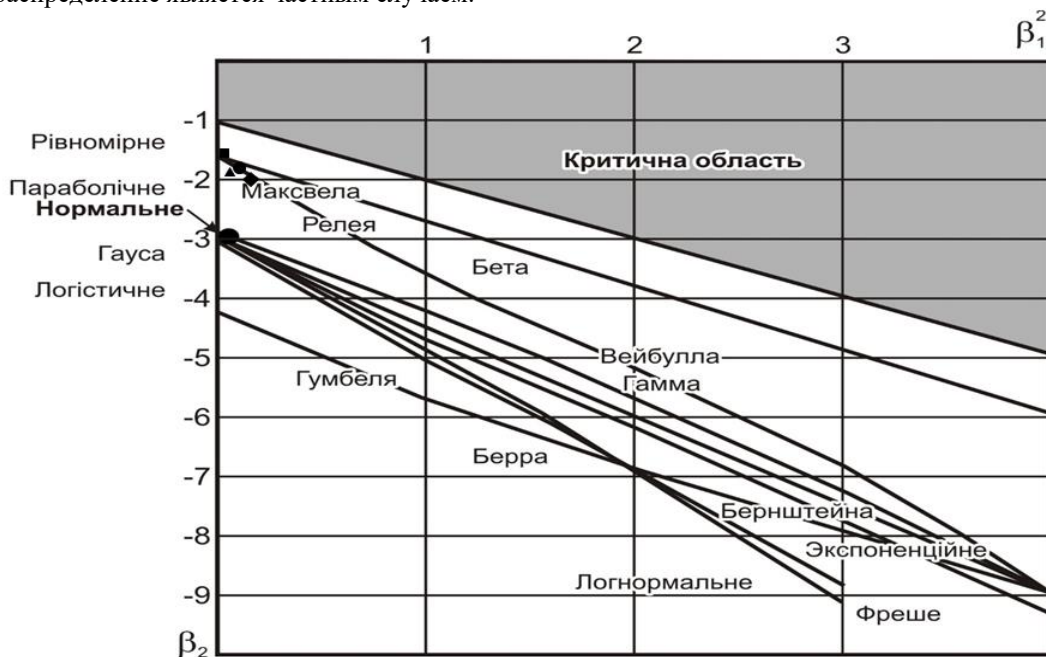


Рис. 4. Графік Пірсона з нанесеними на нього точками, відповідними статистическим оцінкам для кута внутрішнього тертя: ▲ – красно-бурі глини; ● – серо-зелені глини; ◆ – жовто-бурі лессові суглинки; ■ – темно-бурі суглинки

Для величин внутреннего трения все эмпирические точки в области β_1^*, β_2^* локализуются вокруг точки, соответствующей равномерному распределению.

Таким образом, в отношении исследуемых количественных признаков (сцепления и угла внутреннего трения) суглинков и глин, можно выдвинуть гипотезу о равномерном распределении вероятностей.

Выше отмечалось, что при моделировании механических процессов в грунтах, сложенных указанными типами глин и суглинков, возможно выполнение вычислительного эксперимента со случайной вариацией значений сцепления и угла внутреннего трения в соответствии с установленным законом распределения этих величин. Выполненный анализ распределений указанных величин показывает, что статистической моделью для таких механических характеристик как сцепление и угол внутреннего трения суглинков и глин является равномерный закон распределения, определяемый плотностью вероятностей вида:

$$f_x(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases} \quad (13)$$

где a, b – границы интервала распределения (рис. 5,а). Имеет место элементарное утверждение: если случайная величина X распределена равномерно в интервале $(0,1)$, то случайная величина $Y=a+(b-a)X$ распределена нормально в интервале (a, b) . Таким образом, имея генератор случайной выборки из стандартного непрерывного равномерного распределения $(0,1)$, легко построить генератор выборки любого непрерывного равномерного распределения.

Следует отметить, что процедура многовариантных расчетов со случайной генерацией исходных данных требует большого временного ресурса. Кроме того, выходные данные, также являясь случайными величинами, требуют обработки.

Рассмотрим другой подход, позволяющий в расчетах состояний породных или грунтовых объектов учитывать стохастический разброс исходных механических характеристик.

Примем аргумент, что реальная механическая характеристика X грунтового массива x_m отличается от средней выборочной величины \bar{x} , полученной по результатам испытаний образцов грунта. Это отличие будет характеризоваться коэффициентом структуры k_c , равным

$$k_c = \frac{x_m}{\bar{x}} \quad (14)$$

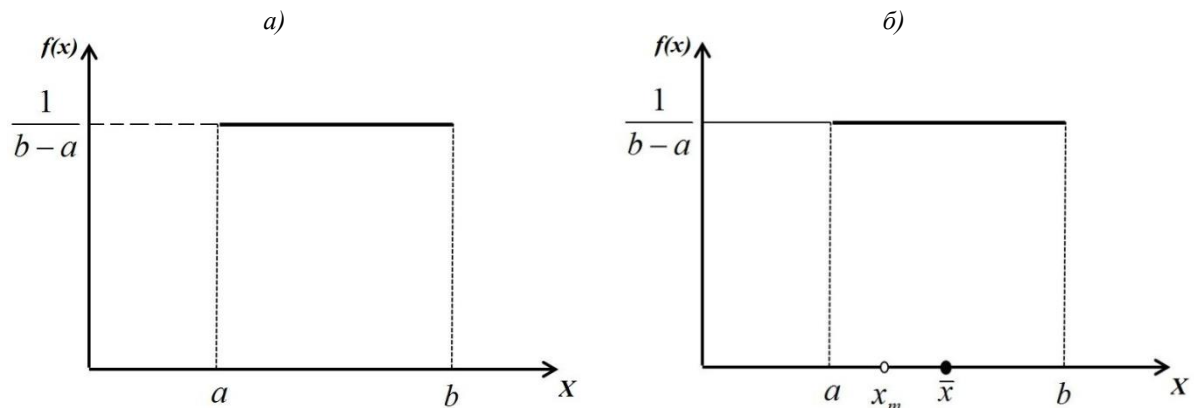


Рис. 5. График плотности распределения равномерного закона (а); положение средней величины x_m в интервале (a,b) распределения (б)

Величина x_m является наименьшей из всех значений данной механической характеристики X (рис. 5, б), полученных для структурных элементов массива, т.е. имеет место неравенство $X \geq x_m$.

Вероятность этого неравенства определим через функцию распределения $F(x)$:

$$P(X \geq x_m) = 1 - F(x_m) = P_0 \quad (15)$$

Для равномерного закона распределения

$$F(x) = \frac{x-a}{b-a} \quad (16)$$

С учетом (16) получим

$$P_0 = 1 - \frac{x_m - a}{b - a} \quad (17)$$

Известно, что для равномерного закона распределения математическое ожидание \bar{x} , дисперсия $D(x)$ и среднее квадратическое отклонение равны:

$$\bar{x} = \frac{b+a}{2}; D(x) = \frac{(b-a)^2}{12}; \sigma(x) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}. \quad (18)$$

Из (17) следует, что

$$x_m = (b-a)(1-P_0) + a. \quad (19)$$

Разделив обе части уравнения (19) на \bar{x} с учетом (18) и (14) получим

$$k_c = 2\sqrt{3}\eta(1-P_0) + \frac{a}{\bar{x}}. \quad (20)$$

Здесь $\eta = \frac{\sigma}{\bar{x}}$ – относительная вариация значений механической характеристики X относительно среднего. Из соотношений (18) легко получить, что

$$\frac{a}{\bar{x}} = 1 - \sqrt{3}\eta. \quad (21)$$

Тогда из (20) с учетом (21) получим

$$k_c = \sqrt{3}\eta(2(1-P_0)-1) + 1 \quad (22)$$

или после преобразования

$$k_c = \sqrt{3}\eta(1-2P_0) + 1 \quad (23)$$

Видно, что коэффициент структуры k_c зависит, во-первых, от относительной вариации η , которая по сути характеризует степень неоднородности среды; во-вторых, от вероятности P_0 , которая характеризует собой уровень значимости объекта. Этой вероятностью будем задаваться аргіогі. Исследуем зависимость (23).

Если в (23) принять $P_0 = 1$, то есть считать, что x_m совпадает с левой границей интервала распределения (крайний случай $x_m = a$), получим, что

$$k_c = 1 - \sqrt{3}\eta. \quad (24)$$

Определим наибольшее значение вариации η . Из соотношений (18) легко получить, что

$$\eta = \frac{b-a}{b+a} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (25)$$

или

$$\eta = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(1 - \frac{2a}{b+a} \right). \quad (26)$$

Если длину интервала обозначить l , то $b = a + l$, и тогда

$$\eta = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(1 - \frac{2a}{2a+l} \right). \quad (27)$$

Таким образом, при бесконечном увеличении интервала распределения, т.е. при $l \rightarrow \infty$, получим

$$\eta \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3}. \quad (28)$$

Таким образом, из (25) при наибольшем значении разброса ($\eta \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3}$) и $x_m = a$, коэффициент структуры примет наименьшее значение: $k_c \rightarrow 0$. При уменьшении длины интервала l уменьшается вариация значений η , соответственно увеличивается коэффициент структуры k_c , и соответственно увеличивается расчетное значение механической характеристики породы.

Таким образом, при использовании в геомеханических расчетах таких характеристик, как ϕ и C следует принимать во внимание их естественный разброс путем введения коэффициента структуры k_c в соответствующую формулу

$$x_m = k_c \bar{x}. \quad (29)$$

При этом, основной характеристикой получаемой из статистической обработки, является относительная вариация, которая однозначно определяется коэффициентом структуры η .

Выводы. В работе представлены результаты исследований физико-механических характеристик грунтов с использованием методов теории вероятностей и математической статистики. Методом одноплоскостного среза определены значения сцепления C и угла внутреннего трения ϕ для образцов суглинков и глин, отобранных на участках обрушения и активизации оползневых процессов.

По результатам лабораторных испытаний пород построены статистические распределения для значений угла внутреннего трения и сцепления. Из анализа распределений угла внутреннего трения следует, что для суглинков вариация значений относительно среднего не превышает 10 %, для глин вариация значений больше, но не превосходит 24 %. Разброс значений сцепления также невелик для суглинков, составляет 11–18 %. Но значения сцепления, полученные на образцах глины, имеют значительный разброс. Вариация сцепления красно-бурой глины достигает 43 %. Установлено, что распределение изучаемых количественных признаков близко к равномерному закону.

На основе гипотезы о равномерном распределении физико-механических характеристик мягких пород (грунтов), получен коэффициент структуры, учитывающий различие прочностных характеристик реального грунта и лабораторных образцов, обусловленного структурной неоднородностью массива.

Список использованной литературы:

1. *Попов В.Н.* Управление устойчивостью карьерных откосов / *В.Н. Попов, П.С. Шпаков, Ю.Л. Юнаков* / Московский государственный горный университет. – Москва : Горная книга, 2008. – 683 с.
2. *Бондарик Б.К.* Основы теории изменчивости инженерно-геологических свойств горных пород / *Б.К. Бондарик*. – Москва : Недра, 1971. – 270 с.
3. *Полозов Б.Д.* Решение задач устойчивости откосов в условиях риска / *Б.Д. Полозов* // Известия вузов. Серия : Горный журнал. – 1981. – Т. 4. – С. 30–33.
4. *Полозов Б.Д.* Анализ погрешностей методов расчета устойчивости карьерных откосов / *Б.Д. Полозов* // Известия вузов. Серия : Горный журнал. – 1983. – Т. 6. – С. 33–38.
5. *Шпаков П.С.* Основы вероятностного метода решения задач устойчивости склонов и открытых поверхностей / *П.С. Шпаков, Г.Г. Поклад, С.Т. Омаров* // Материалы Международного симпозиума «Освоение месторождений минеральных ресурсов и подземное строительство в сложных гидрогеологических условиях». – Белгород, 1991. – Т. 2. – С. 148–156.
6. *Шпаков П.С.* Вероятностный способ решения задач устойчивости карьерных откосов / *П.С. Шпаков, Г.Г. Поклад, С.Т. Омаров* // Известия вузов. Серия : Горный журнал. – 1991. – Т. 6. – С. 45–52.
7. *Шпаков П.С.* Необходимый коэффициент запаса устойчивости откосов, зависимость параметров предельных откосов от уровня риска / *П.С. Шпаков, Г.Г. Поклад, С.Т. Омаров* // Изд-во МГТУ. – Москва, 2002. – Т. 4. – С. 35–38.
8. Элементы теории вероятностей и математической статистики в горном деле / *О.О. Сдвижкова, О.В. Бугрим, Д.В. Бабетс, О.С. Иванов*. – Днепр : Национальный горный университет, 2015. – 103 с.
9. *Solodyankin O.V.* Investigation of physical and mechanical properties of subsident soils at the Yevpatoriyskaya ravine of Dnepropetrovsk City / *O.V. Solodyankin, O.S. Kovrov, N.N. Ruban* // Scientific Bulletin of the National Mining University. – 2015. – Vol. 1. – Pp. 51–57.
10. *Гмурман В.Е.* Теория вероятностей и математическая статистика / *В.Е. Гмурман*. – Москва : Высшая школа, 2003. – 479 с.
11. *Babets D.V.* Numerical modeling rocks properties random distribution in the geomехanical problems / *D.V. Babets, Ye.V. Kirichenko, O.O. Sdvizhkova* // Scientific bulletin of the National Mining University. – Dnipro, 2008. – Vol. 6. – Pp. 47–49.
12. *Хан Г.* Статистические модели в инженерных задачах / *Г.Хан, С.Шануро*. – Москва : Мир, 1969. – 396 с.
13. *Левицький В.Г.* Дослідження точності вимірювання лінійних розмірів товарних блоків природного каменю та її впливу на техніко-економічні показники кар'єру / *В.Г. Левицький, Р.В. Соболевський* // Вісник ЖДТУ. Серія : Технічні науки. – Житомир : ЖДТУ, 2007. – № 4 (43). – С. 149–155.
14. *Соболевський Р.В.* Обґрунтування методики підрахунку об'ємів складів готової продукції булощебеневої сировини / *Р.В. Соболевський, О.М. Вацук* // Вісник Житомирського державного технологічного університету. – 2012. – № 4. – С. 174–182.
15. *Левицький В.Г.* Створення тривимірних моделей природних окремоостей кар'єру як етап удосконалення маркшейдерського забезпечення видобування декоративного каменю / *В.Г. Левицький, Р.В. Соболевський* // Наукові праці ДонНТУ : серія гірничо-геологічна. – Донецьк : ДонНТУ, 2010. – Вип. 12 (173). – С. 232–238.
16. *Sobolevskiy R.* Quality control of drilling operations for efficiency upgrading of creation of separation plane by lineage drilling / *R.Sobolevskiy, V.Shlapak* // Metallurgical and mining industry. – 2016. – № 2. – Pp. 167–173.
17. Cluster analysis of fracturing in the deposits of decorative stone for the optimization of the process of quality control of block raw material / *R.Sobolevskiy, N.Zuievskaya, V.Korobiichuk, O.Tolkach, V.Kotenko* // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2016. – Issue 5/3 (83). – Pp. 21–29.
18. Definition of hue of different types of pokostivskiy granodiorite using digital image processing / *V.Korobiichuk, V.Shamrai, O.Iziumova, O.Tolkach, R.Sobolevskiy* // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2016. – Issue 4/5 (82). – Pp. 52–57.
19. *Sobolevskiy R.V.* Evaluation of accuracy of photogrammetric methods and laser scanning for measuring of parameters of cracks natural separateness / *R.V. Sobolevskiy, V.H. Levytskyi, V.O. Shlapak* // Journal of Zhytomyr State Technological University. – 2016. – № 1. – Pp. 158–163.
20. *Levytsky V.H.* Decorative stone block quality control based on surface digital photogrammetry / *V.H. Levytsky, R.V. Sobolevsky* // Scientific Bulletin of National Mining University. – 2014. – Vol. 6. – Pp. 58–66.
21. *Соболевський Р.В.* Геостатистичний підрахунок запасів Велико-Гадоминецького родовища первинних каоолінів з урахуванням сортової диференціації / *Р.В. Соболевський, О.М. Вацук* // Вісник ЖДТУ. – 2014. – № 1. – С. 124–132.

22. *Левицький В.Г.* Обґрунтування оптимальних технологічних параметрів видобування гранітних блоків на основі показників тріщинуватості / *В.Г. Левицький, Р.В. Соболевський* // *Восточно-европейский журнал передовых технологий.* – Харьков : Технологический центр, 2014. – Вып. 3/3 (69). – С. 48–52.
23. *Sobolevskiy R.* Development of methodology for assessing geospatial variability of primary kaolin / *R.Sobolevskiy, O.Vashchuk, O.Tolkach* // *New Developments in Mining Engineering 2015. Theoretical and Practical Solutions of Mineral Resources Mining.* – Hardback – Publ. October 14th 2015. – Pp. 505–509.
24. *Соболевський Р.В.* Управління якістю бурових робіт для підвищення ефективності алмазно-канатного різання / *Р.В. Соболевський, В.О. Шлапак, О.В. Камських* // *Вісник Кременчуцького національного університету ім. Михайла Остроградського.* – Кременчук, 2015. – № 5. – С. 106–111.
25. *Соболевський Р.В.* Оцінка достовірності геометризації якісних показників Велико-Гадоминецького родовища первинних каолінів на основі підбору оптимальної моделі варіограми за площинним критерієм / *Р.В. Соболевський, О.М. Вацук, О.М. Толкач* // *Вісник КрНУ ім. Михайла Остроградського.* – 2015. – № 1. – С. 57–64.
26. Визначення оптимального напрямку ведення гірничих робіт при видобуванні блоків з природного каменю / *А.О. Криворучко, В.В. Коробійчук, Р.В. Соболевський, О.В. Камських, І.В. Павлюк* // *Вісник Житомирського державного технологічного університету. Серія : Технічні науки.* – Житомир, 2016. – № 3 (78). – С. 150–163.
27. Застосування інформаційно-комп'ютерних технологій для дослідження гірничо-екологічних особливостей родовищ рудних і нерудних корисних копалин / *А.О. Криворучко, В.В. Коробійчук, Ю.О. Подчаїшинський, О.О. Ремезова* // *Вісник Житомирського державного технологічного університету. Серія : Технічні науки.* – 2007. – № 1 (40). – С. 186–195.
28. *Коробійчук В.В.* Геометризація супутньої корисної копалини в умовах Лезниківського родовища гранітів та гірничо-геометричний аналіз його показників / *В.В. Коробійчук, О.О. Кісель, В.А. Стріха* // *Вісник Національного університету водного господарства та природокористування. Серія : Технічні науки.* – 2012. – № 2 (58). – С. 175–184.
29. *Криворучко А.О.* Розробка узагальненої методики геометризації масивів природного каменю з метою отримання комплексної моделі родовища / *А.О. Криворучко, В.В. Коробійчук, С.С. Іськов* // *Вісник Житомирського державного технологічного університету. Серія : Технічні науки.* – 2012. – № 4 (63). – С. 190–202.

References:

1. Popov, V.N., Shpakov, P.S. and Junakov, Ju.L. (2008), *Upravlenie ustojchivost'ju kar'ernyh otkosov*, Moskovskij gosudarstvennyj gornyj universitet, Gornaja kniga, Moskva, 683 p.
2. Bondarik, B.K. (1971), *Osnovy teorii izmenchivosti inzhenerno-geologicheskikh svojstv gornyh porod*, Nedra, Moskva, 270 p.
3. Polozov, B.D. (1981), «Reshenie zadach ustojchivosti otkosov v uslovijah riska», *Izvestija vuzov, Serija Gornyj zhurnal*, Vol. 4, pp. 30–33.
4. Polozov, B.D. (1983), «Analiz pogreshnostej metodov rascheta ustojchivosti kar'ernyh otkosov», *Izvestija vuzov, Serija Gornyj zhurnal*, Vol. 6, pp. 33–38.
5. Shpakov, P.S., Poklad, G.G. and Omarov, S.T. (1991), «Osnovy verojatnostnogo metoda reshenija zadach ustojchivosti sklonov i otkrytyh poverhnostej», *Materialy Mezhdunarodnogo simpoziuma «Osvoenie mestorozhdenij mineral'nyh resursov i podzemnoe stroitel'stvo v slozhnyh gidrogeologicheskikh uslovijah»*, Vol. 2, Belgorod, pp. 148–156.
6. Shpakov, P.S., Poklad, G.G. and Omarov, S.T. (1991), «Verojatnostnyj sposob reshenija zadach ustojchivosti kar'ernyh otkosov», *Izvestija vuzov, Serija Gornyj zhurnal*, Vol. 6, pp. 45–52.
7. Shpakov, P.S., Poklad, G.G. and Omarov, S.T. (2002), «Neobhodimyj koeficient zapasa ustojchivosti otkosov, zavisimost' parametrov predel'nyh otkosov ot urovnja riska», *Izd-vo MGGU*, Vol. 4, Moskva, pp. 35–38.
8. Sdvizhkova, O.O., Bugrim, O.V., Babets, D.V. and Ivanov, O.S. (2015), *Jelementy teorii verojatnostej i matematicheskoj statistiki v gornom dele*, Nacional'nyj gornyj universitet, Dnepr, 103 p.
9. Solodyankin, O.V., Kovrov, O.S. and Ruban, N.N. (2015), «Investigation of physical and mechanical properties of subsident soils at the Yevpatorijskaya ravine of Dnepropetrovsk City», *Scientific Bulletin of the National Mining University*, Vol. 1, pp. 51–57.
10. Gmurman, V.E. (2003), *Teorija verojatnostej i matematicheskaja statistika*, Vysshaja shkola, Moskva, 479 p.
11. Babets, D.V., Kirichenko, Ye.V. and Sdvizhkova, O.O. (2008), «Numerical modeling rocks properties random distribution in the geomехanical problems», *Scientific bulletin of the National Mining University*, Vol. 6, Dnipro, pp. 47–49.
12. Han, G. and Shapiro, S. (1969), *Statisticheskie modeli v inzhenernyh zadachah*, Mir, Moskva, 396 p.
13. Levyc'kyj, V.G. and Sobolevs'kyj, R.V. (2007), «Doslidzhennja tochnosti vymirjuvannja liniynyh rozmiriv tovarnyh blokv pryrodnoho kamenju ta ii' vplyvu na tehniko-ekonomichni pokaznyky kar'jeru», *Visnyk ZhDTU, Serija Tehnichni nauky*, No. 4 (43), ZhDTU, Zhytomyr, pp. 149–155.
14. Sobolevs'kyj, R.V. and Vashchuk, O.M. (2012), «Obgruntuvannja metodyky pidrahunku ob'jemiv skladiv gotovoi' produkci' butoshhebenevoi' syrovyny», *Visnyk Zhytomyr's'kogo derzhavnogo tehnologichnogo universytetu*, No. 4, pp. 174–182.
15. Levyc'kyj, V.G. and Sobolevs'kyj, R.V. (2010), «Stvorennja tryvymirnyh modelej pryrodnyh okremostej kar'jeru jak etap udoskonalennja markshejders'kogo zabezpechennja vydobuvannja dekoratyvnogo kamenju», *Naukovi praci DonNTU, serija girnycho-geologichna*, Vol. 12 (173), DonNTU, Donec'k, pp. 232–238.
16. Sobolevskiy, R. and Shlapak, V. (2016), «Quality control of drilling operations for efficiency upgrading of creation of separation plane by lineage drilling», *Metallurgical and mining industry*, No. 2, pp. 167–173.

17. Sobolevskiy, R., Zuiavska, N., Korobiihuk, V., Tolkach, O. and Kotenko, V. (2016), «Cluster analysis of fracturing in the deposits of decorative stone for the optimization of the process of quality control of block raw material», *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, Issue 5/3 (83), pp. 21–29.
18. Korobiihuk, V., Shamrai, V., Iziumova, O., Tolkach, O. and Sobolevskiy, R. (2016), «Definition of hue of different types of pokostivskiy granodiorite using digital image processing», *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, Issue 4/5 (82), pp. 52–57.
19. Sobolevskiy, R.V., Levytskyi, V.H. and Shlapak, V.O. (2016), «Evaluation of accuracy of photogrammetric methods and laser scanning for measuring of parameters of cracks natural separateness», *Journal of Zhytomyr State Technological University*, No. 1, pp. 158–163.
20. Levytskyi, V.H. and Sobolevsky, R.V. (2014), «Decorative stone block quality control based on surface digital photogrammetry», *Scientific Bulletin of National Mining University*, Vol. 6, pp. 58–66.
21. Sobolevskiy, R.V. and Vashhuk, O.M. (2014), «Geostatystychnyj pidrahunok zapasiv Velyko-Gadomynećkogo rodovyshha pervynnyh kaoliniv z urahuvannjam sortovoi' dyferenciacii'», *Visnyk ZhDTU*, No. 1, pp. 124–132.
22. Levyc'kyj, V.G. and Sobolevskiy, R.V. (2014), «Obg'runtuvannja optymal'nyh tehnologichnyh parametriv vydobuvannja granitnyh blokiv na osnovi pokaznykiv trishhynuvatosti», *Vostochno-evropejskij zhurnal peredovyh tehnologij*, Vol. 3/3 (69), Tehnologicheskij centr, Har'kov, pp. 48–52.
23. Sobolevskiy, R., Vashchuk, O. and Tolkach, O. (2015), «Development of methodology for assessing geospatial variability of primary kaolin», *New Developments in Mining Engineering 2015. Theoretical and Practical Solutions of Mineral Resources Mining*, publ. from October 14th, pp. 505–509.
24. Sobolevskiy, R.V., Shlapak, V.O. and Kams'kyh, O.V. (2015), «Upravlinnja jakistju burovyh robit dlja pidvyshhennja efektyvnostialmazno-kanatnogo rizannja», *Visnyk Kremenčuc'kogo nacional'nogo universytetu im. Myhajla Ostrograds'kogo*, Kremenčuk, No. 5, pp. 106–111.
25. Sobolevskiy, R.V., Vashhuk, O.M. and Tolkach, O.M. (2015), «Ocinka dostovirnosti geometryzacii' jakisnyh pokaznykiv Velyko-Gadomynećkogo rodovyshha pervynnyh kaoliniv na osnovi pidboru optymal'noi' modeli variogramy za ploshhynnym kryterijem», *Visnyk KrNu im. Myhajla Ostrograds'kogo*, No. 1, pp. 57–64.
26. Kryvoruchko, A.O., Korobijchuk, V.V., Sobolevskiy, R.V., Kams'kyh, O.V. and Pavljuk, I.V. (2016), «Vyznachennja optymal'nogo naprjamku vedennja girnychyh robit pry vydobuvanni blokiv z pryrodnogo kamenju», *Visnyk Zhytomyrs'kogo derzhavnogo tehnologichnogo universytetu*, Serija Tehnichni nauky, No. 3 (78), Zhytomyr, pp. 150–163.
27. Kryvoruchko, A.O., Korobijchuk, V.V., Podchashynskiy, Ju.O. and Remezova, O.O. (2007), «Zastosuvannja informacijno-kop'juternyh tehnologij dlja doslidzhennja girnycho-ekologichnyh osoblyvostej rodovyshh rudnyh i nerudnyh korisnyh kopalyn», *Visnyk Zhytomyrs'kogo derzhavnogo tehnologichnogo universytetu*, Serija Tehnichni nauky, No. 1 (40), pp. 186–195.
28. Korobijchuk, V.V., Kisjel', O.O. and Striha, V.A. (2012), «Geometryzacija suputn'oi' korisnoi' kopalyny v umovah Leznykivs'kogo rodovyshha granitiv ta girnycho-geometrychnyj analiz jogo pokaznykiv», *Visnyk Nacional'nogo universytetu vodnogo gospodarstva ta pryrodokorystuvannja*, Serija Tehnichni nauky, No. 2 (58), pp. 175–184.
29. Kryvoruchko, A.O., Korobijchuk, V.V. and Is'kov, S.S. (2012), «Rozrobka uzagal'nenoi' metodyky geometryzacii' masyviv pryrodnogo kamenju z metoju otrymannja kompleksnoi' modeli rodovyshha», *Visnyk Zhytomyrs'kogo derzhavnogo tehnologichnogo universytetu*, Serija Tehnichni nauky, No. 4 (63), pp. 190–202.

Сдвижкова Елена Александровна – доктор технических наук, профессор, заведующая кафедрой высшей математики ГВУЗ «Национальный горный университет».

Научные интересы:

- механика горных пород;
- статистические методы в геомеханике.

Тел.: (056) 373–07–88.

E-mail: sdvyzhkova@gmail.com.

Ковров Александр Станиславович – кандидат технических наук, доцент, профессор кафедры экологии и технологий защиты окружающей среды ГВУЗ «Национальный горный университет».

Научные интересы:

- устойчивость естественных склонов и техногенных откосов;
- технология защиты окружающей среды.

Тел.: (056) 247–07–66.

E-mail: kovralex1@gmail.com.

Мнишенко Таисия Владимировна – студентка группы ГК-15 ГВУЗ «Национальный горный университет».

Научные интересы:

- статистические методы анализа.

Тел.: (056) 373–07–88.

E-mail: taisiia0773@gmail.com.

Статья поступила в редакцию 04.10.2017.