

УДК 539.374

Н.І. Вовкодав, к.ф.-м.н., доц.

Національний університет харчових технологій

І.Ф. Киричок, д.ф.-м.н., с.н.с.

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України

В.В. Михайленко, д.ф.-м.н., проф.

Житомирський державний технологічний університет

ПРО РЕЗОНАНСНІ РАДІАЛЬНІ КОЛИВАННЯ ТА ДИСИПАТИВНИЙ РОЗІГРІВ П'ЕЗОКЕРАМІЧНОЇ ПОРОЖНИСТОЇ КУЛІ

Розглядається зв'язана задача електротермов'язкопружності про радіальні коливання та саморозігрів порожнистої кулі з в'язкопружної п'єзокераміки, що поляризована по товщині та навантажена на граничних поверхнях гармонічною в часі різницею електричного потенціалу. Враховується температурна залежність електромеханічних комплексних характеристик в діапазоні температур до температури деполяризації включно. Нелінійна зв'язана задача розв'язується чисельно з використанням методів дискретної ортогоналізації для інтегрування рівнянь електромеханіки та кінцевих різниць – для рівнянь теплопровідності.

В сучасній техніці широке застосування знаходять п'єзоелементи, що працюють в режимі гармонічних коливань. Через внутрішні втрати п'єзоактивних матеріалів напружено-деформований стан таких елементів супроводжується дисипативним розігрівом, температура якого може досягати критичних значень (точки Кюрі), при яких матеріал деполяризується. Розв'язок крайових задач та дослідження впливу неоднорідностей, що обумовлені структурними особливостями та явищами деполяризації через саморозігрів, на електротермомеханічну поведінку п'єзоелементів знайшли відображення в ряді статей [1]–[3] й ін. Детальний аналіз публікацій з цієї проблеми є в обзорах [4], [5].

Розширення галузей застосування та ускладнення умов експлуатації п'єзоелементів вимагає подальшого поглибленого вивчення закономірностей їх електромеханічної поведінки, особливо в діапазоні резонансних частот гармонічного навантаження та підвищених температур розігріву. В цій публікації в динамічній постановці розглядається задача про моногармонічні електромеханічні коливання та дисипативний розігрів радіально поляризованої порожнистої кулі з урахуванням температурної залежності електромеханічних властивостей п'єзокераміки в діапазоні, що включає і область критичних температур, коли розпочинається втрата п'єзоелектричних властивостей матеріалу.

Постановка задачі. Розглядається порожниста куля з внутрішнім r_1 та зовнішнім r_2 радіусами, яка виготовлена з радіально поляризованої п'єзокераміки.

Сферичні поверхні повністю покриті тонкими суцільними електродами, до яких підводиться різниця електричного потенціалу $\tilde{\psi}(r_2, t) - \tilde{\psi}(r_1, t) = \text{Re}(V_0 \cdot e^{i\omega t})$, де $V_0 = \text{const}$, ω – колова частота, t – час. При такому навантаженні реалізуються радіальні електромеханічні коливання та центрально-симетричний напружено-деформований стан ($\varepsilon_\varphi = \varepsilon_\theta$). Складовими електричної індукції, що перпендикулярні напрямку поляризації, нехтуємо [6]. На сферичних поверхнях $r = r_1$, $r = r_2$ виконуються умови нульових радіальних напружень та конвективного теплообміну з навколишнім середовищем. Дисипативні властивості п'єзокераміки моделюються концепцією комплексних модулів, складові яких залежать від температури.

Задача про моногармонічні радіальні коливання та дисипативний розігрів розглядуваної кулі відносно комплексних шуканих величин (множник $e^{i\omega t}$ опускається) зводиться до розв'язку рівнянь механічних коливань і електростатики [6]:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{2}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) + \rho_* \omega^2 u = 0, \quad \frac{dD_r}{dr} + \frac{2}{r} \cdot D_r = 0; \quad (1)$$

співвідношень електров'язкопружності:

$$\varepsilon_r = S_{33}^E \cdot \sigma_r + 2S_{13}^E \sigma_\theta + d_{33} \sigma_r, \quad (2)$$

$$\varepsilon_\theta = S_{13}^E \sigma_r + (S_{11}^E + S_{12}^E) \sigma_\theta + d_{31} \sigma_r,$$

$$D_r = d_{33} \cdot \sigma_r + 2d_{31} \cdot \sigma_\theta + \varepsilon_{33}^T \cdot E_r, \quad (3)$$

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}, \quad E_r = -\frac{d\psi}{dr}; \quad (4)$$

та усередненого за період коливань рівняння теплопровідності:

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{\lambda} \bar{W} \quad (5)$$

з дисипативною функцією:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\omega} \bar{W} = & S_{33}'' \cdot (\sigma_r'^2 + \sigma_r''^2) + 2\tilde{S}_{11}'' \cdot (\sigma_\theta'^2 + \sigma_\theta''^2) + 4 \cdot S_{13}'' \cdot (\sigma_r' \sigma_\theta' + \sigma_r'' \sigma_\theta'') + \\ & + 2 \cdot d_{33}'' \cdot (\sigma_r' E_r' + \sigma_r'' E_r'') + 4d_{31}'' \cdot (\sigma_\theta' E_r' + \sigma_\theta'' E_r'') + \varepsilon_{33}^T \cdot (E_r'^2 + E_r''^2) \end{aligned} \quad (6)$$

Електромеханічні й теплові граничні умови мають вигляд:

$$\sigma_r = 0, \quad \psi = -V_0 (r = r_1); \quad \sigma_r = 0, \quad \psi = V_0 (r = r_2); \quad (7)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \pm \frac{\alpha_{1,2}}{\lambda} \cdot (T - T_c) \quad (r = r_1; \quad r = r_2); \quad T = T_c \quad (t = 0). \quad (8)$$

В рівняннях (1)–(8) мають місце такі позначення:

$$\begin{aligned} S_{mn}^E = S_{mn}' - iS_{mn}'' = S_{mn}'(1 - i\delta_{mn}^S); \quad d_{mn} = d_{mn}' - id_{mn}'' = d_{mn}'(1 - i\delta_{mn}^D); \\ \varepsilon_{33}^T = \varepsilon_{33}' - i\varepsilon_{33}'' = \varepsilon_{33}'(1 - i\delta_{33}^E) \quad (m, n = 1 \div 3), \end{aligned} \quad (9)$$

залежні від температури відповідно комплексні податливості, п'єзомодулі та електрична проникність; $u = u' + iu''$, $\sigma_r = \sigma_r' + i\sigma_r''$, $\sigma_\theta = \sigma_\theta' + i\sigma_\theta''$ – комплексні амплітуди механічних переміщень та напружень; $D_r = D_r' + iD_r''$, $E_r = E_r' + iE_r''$, $\psi = \psi' + i\psi''$ – комплексні амплітуди індукції, напруженості та потенціалу електричного поля відповідно; ρ_* – густина п'єзокераміки; λ і a – коефіцієнти тепло- і температуропровідності; α_1, α_2 – коефіцієнти теплообміну з навколишнім середовищем температури T_c . Тут і далі одним та двома штрихами позначено відповідно дійсну та уявну складові комплексних величин.

Побудова розв'язку. Для розв'язку сформульованої задачі електротермов'язкопружності (1)–(8) запишемо рівняння електромеханіки (1)–(4) у вигляді системи звичайних диференціальних рівнянь відносно невідомих комплексних величин.

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_r}{dr} = & -\frac{2(1-\tilde{\nu}_p)}{r} \sigma_r + \left(\frac{2\tilde{E}_s}{r^2} - \rho_* \omega^2\right) \cdot u - \frac{2\tilde{d}_r}{r} D_r; \\ \frac{du}{dr} = & (S_{33}^E + 2S_{13}^E \tilde{\nu}_p - \tilde{\nu}_e d_{33}) \sigma_r + \frac{2}{r} (S_{13}^E \tilde{E}_s - d_{33} \tilde{d}_r) u + (d_{33} \tilde{d}_e - 2S_{13}^E \tilde{d}_r) D_r; \\ \frac{d\psi}{dr} = & \tilde{\nu}_e \sigma_r + \frac{2\tilde{d}_r}{r} u - \tilde{d}_e D_r; \\ \frac{dD_r}{dr} = & -\frac{2}{r} D_r, \end{aligned} \quad (10)$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{E}_s = \frac{1}{\tilde{S}_{11}(1 - \tilde{K}_p^2)}; \quad \tilde{S}_{11} = S_{11}^E(1 - \nu_E); \quad \nu_E = -\frac{S_{12}^E}{S_{11}^E}; \quad \tilde{K}_p^2 = \frac{2}{1 - \nu_E} K_p^2; \\ K_p^2 = \frac{d_{31}^2}{\varepsilon_{33}^T S_{11}^E}; \quad \tilde{\varepsilon}_{33}^p = \varepsilon_{33}^T(1 - \tilde{K}_p^2); \quad \tilde{\nu}_p = \frac{1}{S_{11}} (\tilde{\nu}_e d_{31} - S_{13}^E); \\ \tilde{\nu}_e = \frac{\tilde{d}_{33}}{\tilde{\varepsilon}_{33}^p}; \quad \tilde{d}_{33} = d_{33} - 2d_{31} \frac{S_{13}^E}{\tilde{S}_{11}}; \quad \tilde{d}_r = \frac{d_{31}}{\tilde{\varepsilon}_{33}^p \tilde{S}_{11}}; \quad \tilde{d}_e = \frac{1}{\tilde{\varepsilon}_{33}^p}. \end{aligned}$$

Через температурну залежність комплексних електромеханічних характеристик (9) систему (10) при умовах (7) після розділення на дійсну і уявну складові необхідно розв'язувати разом з рівнянням теплопровідності, як зв'язану нелінійну задачу. Для цього використовується метод покрокового інтегрування за часом [6]. На кожному кроці задача електромеханіки (10), (7) інтегрується методом дискретної ортогоналізації розв'язку системи звичайних диференціальних рівнянь нормального вигляду з використанням типової програми [7], а рівняння теплопровідності (5), (6), (8) – методом скінченних різниць з використанням явної схеми.

При розв'язку нелінійної задачі використовувалось два підходи. Перший полягав у тому, що для фіксованих частоти або амплітуди підведеного електричного збудження на першому кроці за часом задача електромеханіки (10), (7) розв'язується при ізотермічних ($T = T_R$) електромеханічних характеристиках. З використанням отриманих розв'язків обчислюється дисипативна функція (6) та

розв'язується задача теплопровідності. На основі розрахованого температурного поля обчислюються електромеханічні характеристики для наступного кроку в часі. Процес продовжується до виходу температури дисипативного розігріву на ustalений тепловий режим. Для наступних значень параметрів навантаження на першому кроці розв'язується задача електромеханіки знову при ізотермічних характеристиках.

При другому підході використовувався засіб продовження розв'язку за параметром навантаження. Він полягає у тому, що при розрахунках амплітудно-частотних характеристик з наступним збільшенням або зменшенням параметра навантаження на першому кроці за часом використовується вже отриманий розв'язок задачі електротермомеханіки. По суті це є випадком, коли навантаження діє на тіло, температурний стан якого обумовлений попереднім гармонічним навантаженням.

Результати розрахунків. В розрахунках використовувалися експериментальні результати про температурні залежності електромеханічних характеристик п'єзокераміки ЦТС-7БС-2 [8], аналітичні апроксимації яких наведені в роботі [9]. Для цього типу п'єзокераміки в області критичних температур ($160^{\circ}\text{C} \leq T \leq 180^{\circ}\text{C}$) має місце різке зменшення величин п'єзомодулів, що характеризує поступове погіршення п'єзоелектричних властивостей матеріалу.

При чисельних розрахунках розглядалася порожниста куля товщиною стінки $H = r_2 - r_1$ при $r_1 = 0,03$ м, $r_2 = 0,05$ м, $T_0 = T_C = 20^{\circ}\text{C}$.

На рис. 1 і рис. 2 показано обчислені з врахуванням температурної залежності властивостей п'єзокераміки при першому (суцільні лінії) та другому (штрихові лінії) підходах частотні значення амплітуд кільцевих напружень $\sigma_{\theta}^* = |\sigma_{\theta}|/V_0 \left[\frac{H}{B \cdot M^2} \right]$ і ustalеної ($\tau = \frac{a \cdot t}{H} \geq 10$) температури дисипативного розігріву T на внутрішній поверхні ($r = r_1$) порожнистої кулі. Штрихпунктирні криві відповідають значенням ізотермічних характеристик п'єзокераміки при $T = T_R = 20^{\circ}\text{C}$. Криві 1, 2, 3 розраховані при $V_0 = 10$ В для безрозмірних коефіцієнтів теплообміну $\gamma_{1,2} = \frac{\alpha_{1,2} \cdot H}{\lambda} = 5,0; 0,5; 0,05$ відповідно.

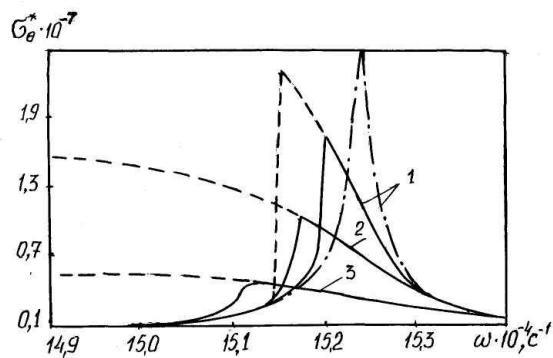


Рис. 1

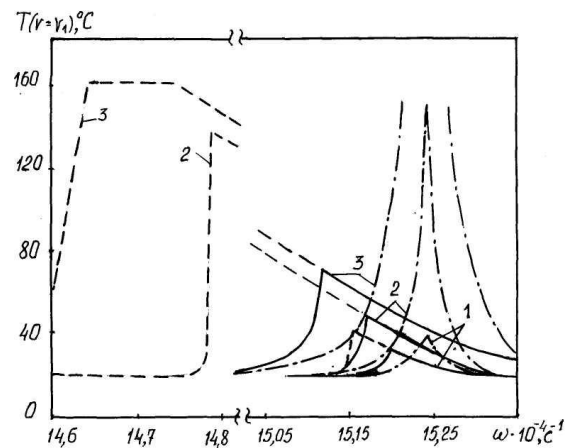


Рис. 2

Аналіз обчислених з врахуванням температурної залежності властивостей матеріалу кривих на рис. 1, 2 показує, що при фіксованому електричному навантаженні зменшення параметра теплообміну посилює нелінійність частотних характеристик і знижує резонансну частоту розглядуваної п'єзокерамічної кулі. Термомеханічна поведінка тіла характеризується зниженням амплітуди механічних напружень та підвищенням температури дисипативного розігріву. Для розрахованих з використанням другого підходу високотемпературних частотних характеристик (штрихові лінії) з параметрами теплообміну $\gamma_1 = \gamma_2 \geq 0,05$ (криві 3) має місце частотний діапазон, в якому температура розігріву стабілізується на рівні критичних значень ($T \geq 160^{\circ}\text{C}$), при яких розпочинається деполяризація п'єзокераміки. При інтенсивному теплообміні ($\gamma_1 = \gamma_2 \geq 5$) на поверхнях шару його термомеханічна поведінка супроводжується значно меншим розігрівом, але досить високим рівнем механічних напружень (криві 1), які можуть досягти межі міцності ($\sigma_{II} = 0,2 \cdot 10^8 \frac{H}{M^2}$) п'єзокераміки.

На рис. 3 для розглядуваної сфери показано розподіл максимальних значень усталеної температури дисипативного розігріву T_{max} (криві 1, 2, 3) і амплітуди кільцевих напружень $|\sigma_\theta|_{max} = (\sigma_\theta^{r^2} + \sigma_\theta^{n^2})^{\frac{1}{2}}$ (криві 1', 2', 3') залежно від величини електричного навантаження V_0 . Розрахунки отримані на основі другого підходу розв'язку нелінійної зв'язаної задачі при наступних значеннях коефіцієнтів теплообміну і біля резонансних частот, що відповідають навантаженню $V_0 = 10$ В: $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2 = 5,0$, $\omega = 15,20 \cdot 10^4 \text{ c}^{-1}$ (криві 1, 1'); $\gamma = 0,5$, $\omega = 15,17 \cdot 10^4 \text{ c}^{-1}$ (криві 2, 2'); $\gamma = 0,05$, $\omega = 15,12 \cdot 10^4 \text{ c}^{-1}$ (криві 3, 3'). Зауважимо, що максимальних значень досягають амплітуди напружень $|\sigma_\theta|$ та радіальних переміщень $|u|$ на граничній поверхні при $x = \frac{(r-r_1)}{H} = 0$, а температури – при $x \approx 0,3 \div 0,35 \text{ Н}$.

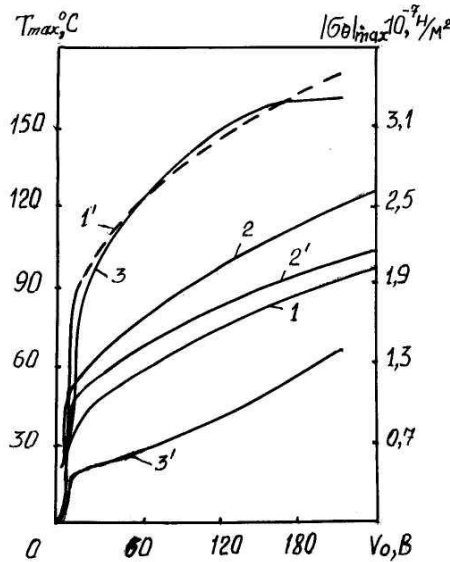


Рис. 3

Із рис. 3 видно, що при інтенсивній тепловіддачі з поверхні сфери ($\gamma = 5,0$) із зростанням навантаження V_0 спостерігається помірне підвищення температури розігріву (крива 1) та стрімке зростання амплітуди механічних напружень (крива 1'), які досягають межі міцності п'єзокераміки (штрихові лінії) при порівняно малих електричних навантаженнях ($V_0 \approx 20$ В). Для малих значень безрозмірного параметра теплообміну ($\gamma \approx 0,05$), навпаки, має місце стрімке зростання температури саморозігріву (крива 3), яка досягає критичних значень ($T = 160^\circ\text{C}$) при таких електричних навантаженнях ($V_0 \approx 160$ В), коли максимальна амплітуда механічних напружень значно менша межі міцності п'єзокераміки (крива 3'). Подальше збільшення V_0 сприяє розширенню по товщині кулі зони ℓ критичних температур в сторону внутрішньої поверхні кулі. При навантаженні $V_0 \approx 220$ В ця зона досягає розмірів $0 \leq \ell \leq 0,4 \text{ Н}$ та біля внутрішньої поверхні формується область $0 \leq \ell_1 \leq 0,1 \text{ Н}$, де амплітуди напружень $|\sigma_\theta|$ різко зменшуються, а переміщень $|u| \rightarrow 0$.

Аналіз проведених числових експериментів показує, що при розглядуваному врахуванні температурної залежності властивостей п'єзокераміки умови теплообміну на граничних поверхнях порожнистої кулі можуть відігравати визначальну роль в механізмі втрати працездатності п'єзоелектричного елемента при електромеханічних коливаннях. Так, в умовах, близьких до теплоізоляції, при допустимому рівні механічних напружень, втрата працездатності елемента визначатиметься появою деполаризованих областей, обумовлених високим рівнем саморозігріву, а при інтенсивному теплообміні – високим рівнем механічних напружень, що досягають межі міцності матеріалу.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Карнаухов В.Г., Козлов В.И., Михайленко В.В., Михайленко С.В. Планарные колебания пьезокерамической пластины с учетом деполаризации материала, вызванной температурой виброразогрева // Прикл. механика. – К. – 1994. – 30. – № 3. – С. 67–73.

2. Киричок И.Ф., Карнаухова Т.В. Осесимметрическая задача электровязкоупругости частично деполяризованной пьезокерамической сферы при квазистатическом гармоническом нагружении // Прикл. механика. – К. – 2002. – 38. – № 3. – С. 93–99.
3. Венгренюк Ю.А., Киричок И.Ф., Обизюк Н.И. Резонансные колебания и диссипативный разогрев пьезоэлектрических сферических оболочек с учетом явления тепловой деполяризации // Акуст. вестник. – 1999. – 2. – № 2. – С. 3–10.
4. Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф., Козлов В.И. Электромеханические колебания и диссипативный разогрев вязкоупругих тонкостенных элементов с пьезоэффектом // Прикл. механика. – К. – 2001. – 37. – № 2. – С. 1–35.
5. Карнаухов В.Г., Михайленко В.В. Нелинейные одночастотные колебания и диссипативный разогрев неупругих пьезокерамических тел // Прикл. механика. – К.: – 2002. – 38. – № 5. – С. 13–48.
6. Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф. Механика связанных полей в элементах конструкций. Электротермовязкоупругость. – К.: Наук. думка, 1988. – Т. 4. – 320 с.
7. Григоренко Я.М., Мукоед А.П. Решение нелинейных задач теории оболочек на ЭВМ. – К.: Вища школа, 1983. – 278 с.
8. Боякисев А.М., Карлаш В.Л., Шульга Н.Л. О зависимости свойств пьезокерамических материалов от температуры // Прикл. механика. – 1984. – 20. – № 7. – С. 70–74.
9. Вовкодав Н.І., Киричок І.Ф., Михайленко В.В. Про електромеханічні коливання та вібророзігрів кільцевих п'єзокерамічних пластин з радіальною поляризацією // Вісник ЖДТУ. – 2003. – 1(25). – С. 12–16.

ВОВКОДАВ Наталія Іванівна – кандидат фізико-математичних наук, доцент Національного університету харчових технологій.

Наукові інтереси:

– розв'язок зв'язаних задач електромеханіки пластин та оболонок із в'язкопружних п'єзоактивних матеріалів з врахуванням взаємодії механічних, електричних і теплових полів при гармонічному навантаженні.

Т.: 227-96-31.

КИРИЧОК Іван Федорович – доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник, провідний науковий співробітник Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України.

Наукові інтереси:

– розробка теорії і методів розв'язку зв'язаних задач термомеханіки і електромеханіки пластин та оболонок із в'язкопружних пасивних і п'єзоактивних матеріалів з врахуванням взаємодії механічних, електричних і теплових полів при гармонічному навантаженні.

Т.: 441-77-63.

МИХАЙЛЕНКО Василь Васильович – доктор фізико-математичних наук, завідувач кафедри вищої математики Житомирського державного технологічного університету.

Наукові інтереси:

– термомеханіка в'язкопружних п'єзоелектричних матеріалів та елементів.

Подано 11.09.2004

Вовкодав Н.І., Киричок І.Ф., Михайленко В.В. Про резонансні радіальні коливання та дисипативний розігрів п'єзокерамічної порожнистої кулі

Вовкодав Н.И., Киричок И.Ф., Михайленко В.В. О резонансных радиальных колебаниях и диссипативном разогреве пустотелого пьезокерамического шара

Vovkodav N.I., Kirichok I.F., Mihailenko V.V. Resonant radial vibrations and dissipative heating of a hollow piezoceramic sphere

УДК 539.374

Про резонансні радіальні коливання та дисипативний розігрів п'єзокерамічної порожнистої кулі / Н.І. Вовкодав, І.Ф. Киричок, В.В. Михайленко

Розглядається зв'язана задача електротермов'язкопружності про радіальні коливання та саморозігрів порожнистої кулі з в'язкопружної п'єзокераміки, що поляризована по товщині та навантажена на граничних поверхнях гармонічною в часі різницею електричного потенціалу. Враховується температурна залежність електромеханічних комплексних характеристик в діапазоні температур до температури деполізації включно. Нелінійна зв'язана задача розв'язується чисельно з використанням методів дискретної ортогоналізації для інтегрування рівнянь електромеханіки та кінцевих різниць – для рівнянь теплопровідності.

УДК 539.374

О резонансных радиальных колебаниях и диссипативном разогреве пустотелого пьезокерамического шара / Н.И. Вовкодав, И.Ф. Киричок, В.В. Михайленко

Рассматривается связанная задача электротермовязкоупругости о радиальных колебаниях и саморазогреве пустотелого шара из вязкоупругой пьезокерамики, поляризованной по толщине и нагруженной на граничных поверхностях гармонической во времени разностью электрического потенциала. Учитывается температурная зависимость электромеханических комплексных характеристик в диапазоне температур до температуры деполаризации включительно. Нелинейная связанная задача решается численно с использованием методов дискретной ортогонализации для интегрирования уравнений электромеханики и метода конечных разностей для уравнения теплопроводности.

УДК 539.374

Resonant radial vibrations and dissipative heating of a hollow piezoceramic sphere / N.I. Vovkodav, I.F. Kirichok, V.V. Mihailenko.

A latent problem of electrothermoviscoelasticity of radial vibrations and self – heating of a hollow viscoelastic piezoceramic sphere with the thickness polarization and under harmonical in time electric potential difference is constructed on the limit planes. Temperature dependence of electromechanical complex characteristics is taken into account into bandwidth up to the depolarization temperature. Nonlinear latent problem is solved numerically with the method of discrete orthogonalization for the equations of electroelasticity and the method of finite differences for the equations of heat conduction, respectively.