

В.Г. Вербицький, д.ф.-м.н., проф.
Запорізька державна інженерна академія
В.Г. Хребет, к.ф.-м.н., доц.
Національний авіаційний університет
А.М. Єфименко, к.т.н.
Національний транспортний університет

Аналіз стійкості стаціонарних станів нелінійної моделі колісного екіпажу

Наведено один із варіантів отримання нелінійних рівнянь поворотності двохосового колісного екіпажу та рівняння, що еквівалентне рівнянню Я.М. Певзнера для визначення всієї множини стаціонарних станів моделі. Переваги наведеного підходу полягають у подоланні неточності геометричних побудов, що використовувалися в методі Я.М. Певзнера та можливості аналітичного і чисельного аналізу всієї множини стаціонарних станів моделі екіпажу за умови існування оберненої функції для нелінійної залежності, що визначає силу відведення як функцію кута відведення. В роботі вперше отримано результати, що визначають аналітичні умови дивергентної втрати стійкості руху двохосового колісного екіпажу в круговій кривій з постійним значенням кута Аккермана. Проілюстровано цей випадок втрати стійкості екіпажу на фоні більш загальної картини дивергентної втрати стійкості всієї множини стаціонарних станів моделі.

Ключові слова: колісний екіпаж; стаціонарний стан; крива поворотності; нелінійні сили відведення; дивергентні біфуркації.

Постановка проблеми у загальному вигляді. В роботі запропоновано лаконічний алгебраїчний підхід виводу рівнянь, що є аналогом відомих рівнянь поворотності і рівняння Я.М. Певзнера, які дають можливість подальшого аналітичного дослідження стійкості стаціонарних станів, а саме: знайти аналітичні умови втрати стійкості на кривих поворотності.

Задача аналізу стійкості множини стаціонарних станів нелінійної моделі екіпажу бере свій початок у роботах Я.М. Певзнера [1], приблизно чверть століття потому.

Пацейка Х.Б. привернув увагу дослідників до графо-аналітичного методу Я.М. Певзнера, вважаючи, що в ньому є певний потенціал для подальшого розвитку. Його прогноз справдився: метод Певзнера було поширено на моделі автопоїзда [2], він активно використовувався в роботах Л.Г. Лобаса (Інститут механіки НАН України), В.П. Сахно (НТУ, м. Київ) та їх учнів [3–11] при дослідженні дивергентних біфуркацій стаціонарних станів моделей екіпажів.

Розглянемо один з варіантів (алгебраїчний) виводу рівняння поворотності екіпажу [12], що визначає багатовид стаціонарних станів нелінійної моделі двохосного колісного екіпажу в кругових кривих зі сталим значенням кута Аккермана. Найпростіші розв'язки рівнянь плоскопаралельного руху (1) (в рухомих осях, що пов'язані з екіпажем) [1, 13–15]

$$\begin{cases} m(\dot{u} + V\omega) = Y_1 \cos\theta + Y_2; \\ J\dot{\omega} = aY_1 \cos\theta - bY_2, \end{cases} \quad (1)$$

яким відповідають стаціонарні стани $u^* = const, \omega^* = const$ при фіксованих значеннях пари параметрів керування V, θ^* , можуть бути визначені як розв'язки кінцевої нелінійної системи

$$\begin{cases} mV\omega = Y_1 \cos\theta + Y_2; \\ aY_1 \cos\theta - bY_2 = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Тут V, u – позовжня і поперечна проекції вектора швидкості центру мас на осі, зв'язані з тягачем; ω – кутова швидкість відносно вертикальної осі; θ – кут повороту передніх коліс; m, J – маса та центральний момент інерції; a, b – відстані від центру мас тягача до центрів передньої (керованої) осі та задньої осі тягача. (Система (1) переходить у систему (2), якщо нас цікавлять лише стаціонарні розв'язки $\dot{u}^* = 0, \dot{\omega}^* = 0$).

Залежності сил відведення $Y_i = Y_i(\delta_i)$ є нелінійними функціями кутів відведення, останні визначаються наближеними лінійними співвідношеннями:

$$\delta_1 = \theta - \frac{u + a\omega}{V}; \delta_2 = \frac{-u + b\omega}{V}, \quad (3)$$

крім того, будемо вважати, що $\cos\theta \approx 1$.

Систему (2) приведемо до безрозмірного вигляду, використовуючи визначення безрозмірної сили відведення $\bar{Y}_i = Y_i/N_i$, де N_i – вертикальні реакції опорної поверхні на осях екіпажу ($i = 1, 2$).

$$\begin{cases} -\frac{V\omega}{g} + \bar{Y}_1 \frac{b}{l} + \bar{Y}_2 \frac{a}{l} = 0; \\ \bar{Y}_1 - \bar{Y}_2 = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Мета роботи. Питання стійкості множини стаціонарних станів моделі екіпажу на круговій кривій зі сталим кутом Аккермана лишилося відкритим, тому **метою** статті є розвиток аналітичних підходів, що дозволяють дослідити умови дивергентної втрати стійкості на кривій повороткості.

Викладення основного матеріалу. Розглянемо необхідні передумови для реалізації запропонованого підходу – залежності сил відведення як функції кутів відведення повинні мати аналітично визначені обернені залежності. Так, для випадку апроксимації сил відведення у вигляді дробово-ірраціональної функції $\bar{Y}_i = \frac{\bar{k}_i \delta_i}{\sqrt{1 + \left(\frac{\bar{k}_i \delta_i}{\kappa_i}\right)^2}}$, обернена функція визначається співвідношеннями:

$$\delta_i = \frac{\bar{Y}_i}{\bar{k}_i \sqrt{1 - \left(\frac{\bar{Y}_i}{\kappa_i}\right)^2}}; \quad G_i = \frac{\bar{a}_y}{\bar{k}_i \sqrt{1 - \left(\frac{\bar{a}_y}{\kappa_i}\right)^2}},$$

де \bar{k}_i – безрозмірні коефіцієнти опору бічному відведенню, κ_i – коефіцієнти щеплення в поперечному напрямі (графіки вихідних залежностей сил відведення і відповідних обернених функцій наведено на рисунку 1 а) і б) у випадку $\bar{k}_1 = 7,6845$; $\bar{k}_2 = 6,25$; $\kappa_1 = 0,8$; $\kappa_2 = 0,8$).

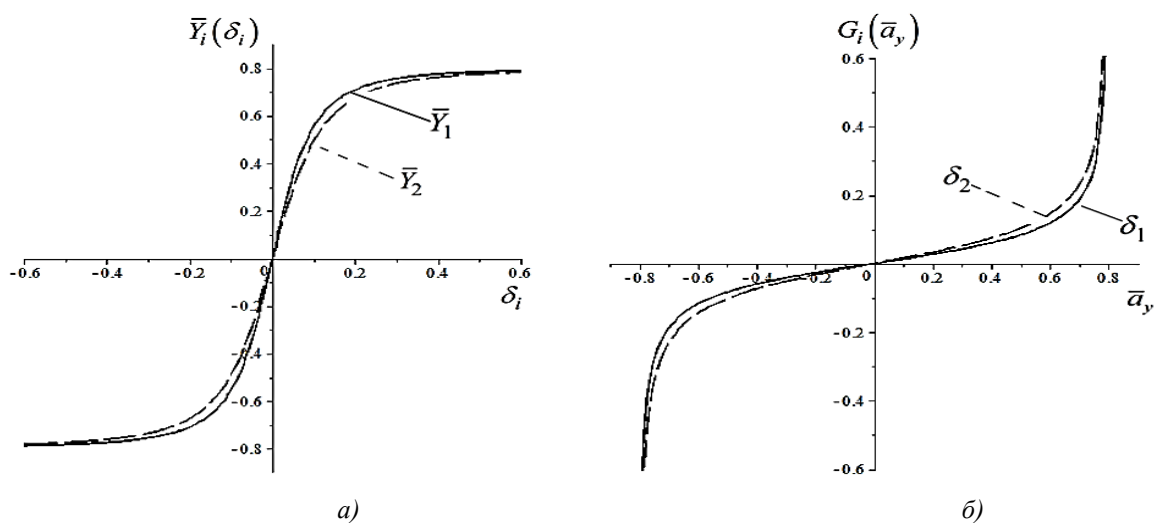


Рис. 1. Графіки нелінійних сил відведення а) та відповідних обернених залежностей б)

Кількісно величини сил відведення, що реалізуються в стаціонарних кругових станах, знаходяться як розв'язок лінійної системи рівнянь (4)

$$\bar{Y}_1 = \bar{Y}_2 = \bar{Y}; \quad \bar{Y} = \frac{V\omega}{g} = \bar{a}_y,$$

де \bar{a}_y – безрозмірне бокове прискорення Ц. М. екіпажу в стаціонарному круговому стані (проекція доцентрового прискорення Ц. М. на поперечну вісь). Далі, розв'язуючи співвідношення $\bar{Y}_i(\delta_i) = \bar{a}_y$ відносно аргументів δ_i (що еквівалентно знаходженню обернених функцій), маємо

$$\delta_i = G_i(\bar{a}_y). \quad (5)$$

Із співвідношення (3) випливає зв'язок між кутовою швидкістю та кутами відведення

$$\omega = \frac{V}{l}(\theta + \delta_2 - \delta_1),$$

що можна представити у вигляді ($\omega = V/R$):

$$\theta = \frac{l}{R} + \delta_1 - \delta_2,$$

де R – радіус кривизни точки поздовжньої осі екіпажу, швидкість якої лежить вздовж цієї осі.

Враховуючи, що в стаціонарному русі справедливі співвідношення (5), отримаємо нелінійне рівняння поворотності:

$$\theta = \frac{l}{R} + G_1(\bar{a}_y) - G_2(\bar{a}_y), \quad (6)$$

що при лінійних силах відведення переходить до відомого лінійного рівняння

$$\theta = \frac{l}{R} + \left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} \right) \bar{a}_y.$$

Аналіз умов втрати стійкості екіпажу в кривій сталого радіусу кривизни.

Система (4), що визначає множину стаціонарних станів при зміні параметрів V, θ , зводиться до одного визначального рівняння:

$$\frac{gl}{V^2} \bar{a}_y - \theta = G_2(\bar{a}_y) - G_1(\bar{a}_y). \quad (7)$$

Останнє рівняння (7) є аналогом рівняння Я.М. Певзнера. Його очевидна перевага – у можливості аналітичного визначення нелінійних функцій $G_i(\bar{a}_y)$ (у випадках існування відповідних обернених функцій).

Для нелінійної моделі екіпажу (1) характерним є дивергентна втрата стійкості (критичний випадок О.М. Ляпунова одного нульового кореня відповідного характеристичного рівняння), що супроводжується появою кратних стаціонарних станів у нелінійній динамічній системі. Ця обставина дає можливість дослідити умови появи кратних станів системи на підставі аналізу визначального рівняння (7).

Стаціонарним станам системи відповідають точки перетину прямої $\frac{gl}{V^2} \bar{a}_y - \theta$ та графіка нелінійної функції $G_{21}(\bar{a}_y) = G_2(\bar{a}_y) - G_1(\bar{a}_y)$, тому треба дослідити випадки, коли пряма дотична до графіка нелінійної функції.

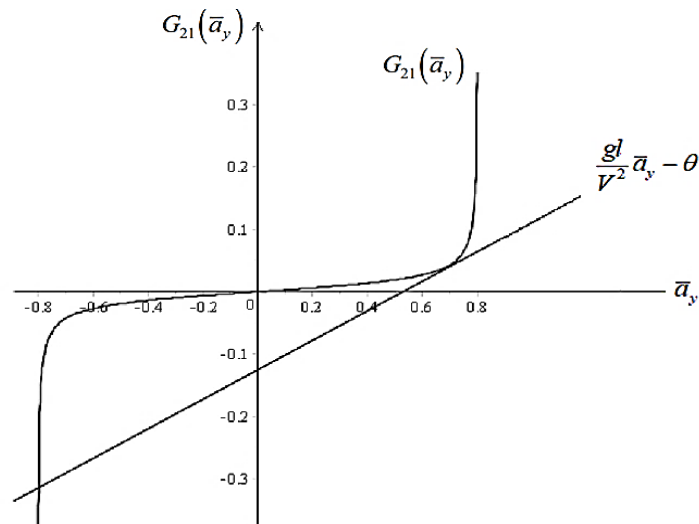


Рис. 2. До визначення умов реалізації кратних стаціонарних станів

Умови, за яких пряма $\frac{gl}{V^2} \bar{a}_y - \theta$ дотична до кривої $G_{21}(\bar{a}_y)$ (рис. 2):

$$\begin{cases} G'_{21} = \frac{gl}{V^2}; \\ G_{21} + \theta = G'_{21} \cdot \bar{a}_y, \end{cases} \quad (8)$$

визначають в параметричній формі множину параметрів V, θ (критичну або біфуркаційну) за яких відбувається дивергентна втрата стійкості стаціонарних станів нелінійної моделі екіпажу. Графік біфуркаційної множини для числового набору параметрів $m=1317$ кг; $\kappa_1=0,8$; $\kappa_2=0,8$; $a=1,2$ м; $b=1,22$ м; $k_1=50000$ н/м; $k_2=40000$ н/м наведено на рисунку 3.

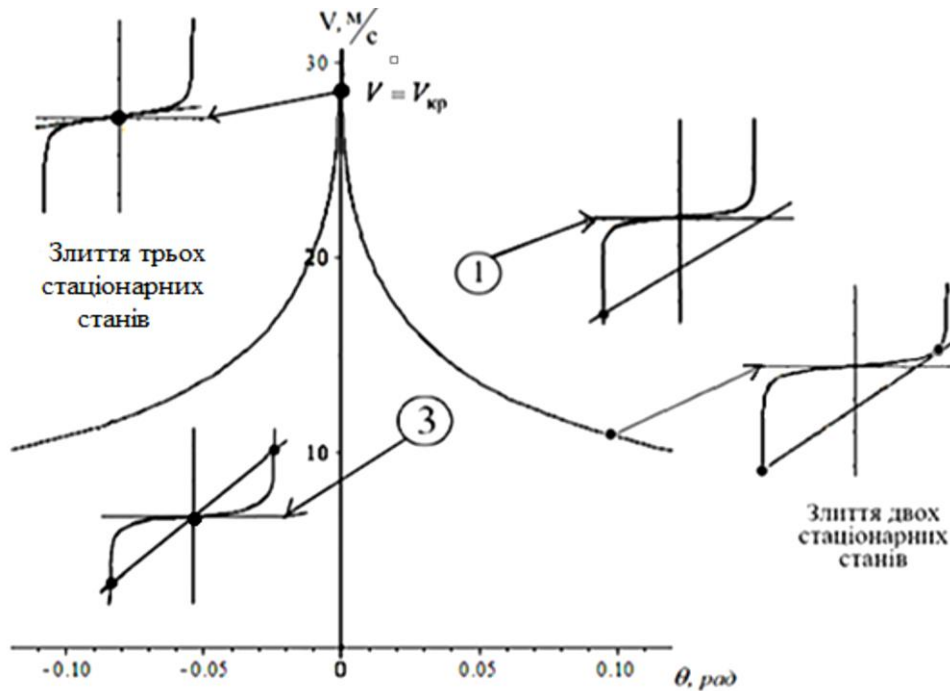


Рис. 3. Графік біфуркаційної множини та закономірність зміни кількості стаціонарних станів у площині параметрів V, θ .

Таким чином, площа параметрів керування (V, θ) розбивається біфуркаційною кривою на дві області – з трьома стаціонарними станами (під біфуркаційною кривою) та з одним стаціонарним станом (вище біфуркаційної кривої), на самій біфуркаційній кривій виникають кратні стаціонарні стани – відбувається дивергентна втрата стійкості стійких стаціонарних станів.

Для аналізу втрати стійкості на кривій поворотності (при зміні швидкості повздовжнього руху) доповнимо графік біфуркаційної множини кривою поворотності, де попередньо \bar{a}_y замінено на $\frac{V^2}{gR}$:

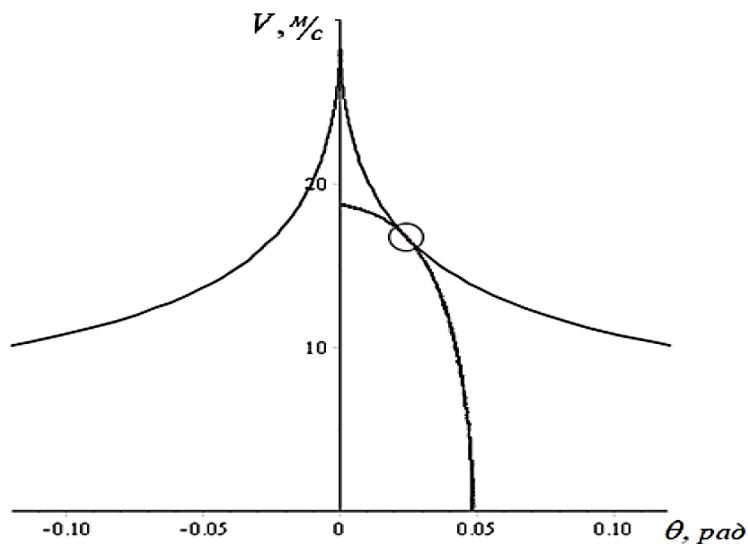


Рис. 4. Спільний графік біфуркаційної множини і рівняння поворотності

Точці дотику двох кривих відповідатиме втрата стійкості на кривій поворотності. Вкажемо на аналітичні співвідношення, що визначають цю точку незалежним чином. На основі двох умов: (6) та другого рівняння системи (8) маємо:

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{l}{R} - G_{21}; \\ \theta &= -G_{21} + G'_{21} \cdot \bar{a}_y; \end{aligned} \Rightarrow G'_{21} \cdot \bar{a}_y = \frac{l}{R}. \quad (9)$$

Рівняння (9) визначає критичне значення бокового прискорення \bar{a}_y , при якому відбувається втрата стійкості на кривій поворотності.

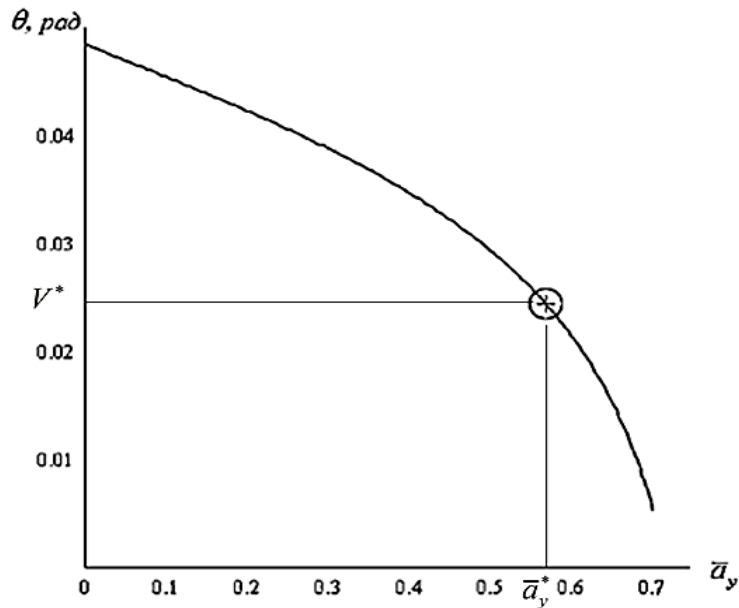


Рис. 5. Ілюстрація визначення точки дивергентної втрати стійкості на кривій поворотності

За визначених числових значень параметрів системи, рівняння (9) має єдиний розв'язок $\bar{a}_y^* = 0,567^*$, відповідна точка на кривій поворотності позначена на рисунку 5; за визначеного \bar{a}_y при $R = 50$ м можна перейти до відповідної поздовжньої швидкості $V^* = 16,67$ м/с, критичне значення по куту повороту керованих коліс $\theta^* = 0,0243$ рад.

Висновки. Таким чином, на основі запропонованого метода обернених функцій можна провести повний аналіз умов втрати стійкості множини стаціонарних станів нелінійної моделі екіпажа та отримати аналітичні умови дивергентної втрати стійкості на кривих поворотності без попереднього визначення самих стаціонарних станів.

Список використаної літератури:

1. Певзнер Я.М. Теория устойчивости автомобиля / Я.М. Певзнер. – М. : Машгиз, 1947. – 156 с.
2. Pauwelussen J.P. Analysis and prevention of excessive lateral behaviour of articulated vehicles / J.P. Pauwelussen : XII International Heavy Truck Conference, 13–15 September. – Budapest, Hungary. – 1995.
3. Лобас Л.Г. Качественные и аналитические методы в динамике колесных машин / Л.Г. Лобас, В.Г. Вербицкий. – К. : Наукова думка, 1990. – 216 с.
4. Вербицкий В.Г. Бифуркации стационарных состояний в системах с качением при постоянных силовых возмущениях / В.Г. Вербицкий, Л.Г. Лобас // Прикл. математика и механика. – 1994. – № 58 (5). – С. 165–170.
5. Вербицкий В.Г. О влиянии асимметрии сил увода на статическую устойчивость модели двухосного экипажа / В.Г. Вербицкий, В.А. Макаров, В.П. Сахно // Прикл. Механика. – 2004. – № 40 (4). – С. 136–143.
6. Автомобили. Устойчивость : монография / В.Г. Вербицкий, В.П. Сахно, А.П. Кравченко, А.В. Костенко, А.Э. Даниленко. – Луганск : Изд-во «Ноулидж», 2013. – 176 с.
7. Вербицкий В.Г. До аналізу поворотності дволанкового автопоїзда / В.Г. Вербицкий, В.Г. Хребет // Третя всеукраїнська науково-практична конференція «Автобусобудування та пасажирські перевезення в Україні» : Тези доп. – Львів : Видавництво Львівської політехніки. – 2018. – С. 28–31.
8. Лобас Л.Г. Об интегральном многообразии задачи о бифуркации Андропова-Хопфа в маятниковых двухзвенных системах с качением / Л.Г. Лобас, В.Г. Хребет // Прикл. механика. – 1994. – № 7, 30. – С. 85–93.
9. Хребет В.Г. Построение бифуркационного множества модели двухосного автомобиля / В.Г. Хребет, В.Г. Вербицкий, В.А. Банников, Н.А. Вельмагина // Сучасні технології в машинобудуванні та транспорті: науковий журнал. – Луцький НТУ : Луцьк, 2016. – № 2 (6). – С. 160–166.
10. Divergent bifurcations of stationary motion modes of wheeled vehicle model with controlled wheel module / A.Kravchenko, V.Verbitskii, V.Khrebet, N.Velmagina, A.Muranov // ТЕКА, Commission of Motorization and Energetics in Agriculture. An International Quarterly Journal on Motorization, Vehicle Operation, Energy Efficiency and Mechanical Engineering. – Lublin-Rzeszow, 2016. – Vol. 16. – № 3– P. 35–41.
11. Вербицкий В.Г. Характеристики поворачиваемости автомобиля при наличии внешней боковой силы / В.Г. Вербицкий, Р.А. Кулиев, А.Н. Ефименко, Ю. Н. Стрельник // Вісник СевНТУ : збірник наукових праць : Серія Машиноприладобудування та транспорт. – Севастополь, 2013. – Вип. 142/2013. – С. 96–99.

12. Gillespie Thomas D. *Fundamentals of Vehicle Dynamics / Thomas D. Gillespie.* – Society of Automotive Engineers. – 1992. – 470 p.
13. Рокар И. Неустойчивость в механике / И.Рокар. – М. : Изд-во иностр. лит., 1959. – 317 с.
14. Эллис Д.Р. *Управляемость автомобиля / Д.Р. Эллис.* – М. : Машиностроение, 1975. – 216 с.
15. Pacejka H.B. *Tire and Vehicle Dynamics / H.B. Pacejka.* – Butterworth-Heinemann is imprint of Elsevier, 2012. – 3rd. – 672 p.

References:

1. Pevzner, Ya. M. (1947), *Theory of stability of the automobile*, Mashgiz, M., 156 p.
2. Pauwelussen, J.P. (1995), *Analysis and prevention of excessive lateral behaviour of articulated vehicles*, XII International Heavy Truck Conference, Budapest, Hungary, Pp. 13–15.
3. Lobas, L.G. and Verbitsky, V.G. (1990), *Qualitative and analytical methods in the dynamics of wheeled vehicles*. Naukova Dumka, 216 p.
4. Verbitskii, V.G. and Lobas, L.G. (1994), «Bifurcations of stationary states in rolling systems at constant power disturbances», *Applied Mathematics and Mechanics*, No. 58 (5), Pp. 165–170.
5. Verbitskii, V.G., Makarov, V.A. and Sakhno, V.P. (2004), «Pro vplyv asymetriyi syl vidvedennya na statychnu stiykist' modeli dvovisnogo ekipazhu», *Prykl. Mekhanika*, No. 40 (4), Pp. 136–143.
6. Verbitsky, V.G., Sakhno, V.P., Kravchenko, A.P., Kostenko, A.V. and Danilenko, A.E. (2013), *Automobiles. Stability*, monografija, Publishing house «Noulidzh», Lugansk, 176 p.
7. Verbitsky, V.G. and Khrebet, V.G. (2018), «Do analizu povorotnosti dvolankovoho avtopoyizda. s'kyu», *Tretya vseukrayins'ka naukovo-praktychna konferentsiya «avtobusobuduvannya ta pasazhyrski perevezennya*, Pp. 28–31.
8. Lobas, L.G. and Khrebet, V.G. (1993), «Dynamic behavior of a two-tier system with a pendulum rolling on the boundary of stability», *Applied Mechanics*, No. 29 (4), Pp. 78–87.
9. Khrebet, V.G., Verbitskiy, V.G., Bannikov, V.A. and Velmagina, N.A. (2016), «Postroenie bifurkatsionnogo mnozhestva modeli dvukhosnogo avtomobilya», *Suchasni tekhnologii v mashinobuduvanni ta transporti*, Naukoviy zhurnal, Luts'kiy NTU, Luts'k, Vol. 2 (6), Pp. 160–166.
10. Kravchenko, A., Verbitskiy, V., Khrebet, V., Velmagina, N. and Muranov, A. (2016), «Divergent bifurcations of stationary motion modes of wheeled vehicle model with controlled wheel module», *TEKA, Commission of Motorization and Energetics in Agriculture. An International Quarterly Journal on Motorization, Vehicle Operation, Energy Efficiency and Mechanical Engineering*, Lublin-Rzeszow, Vol. 16, No. 3, Pp. 35–41.
11. Verbitsky, V.G., Kuliyyev, R.A., Yefymenko, A.N. and Strelnyk, Y.N (2013), «Kharakterystyky povorotnosti avtomobilya pry nayavnosti zovnishn'oyi bichnoyi syly», *Visnyk SevNTU, Zbirnyk naukovykh prats', Seriya Mashinoprikladobuduvannya ta transport*, Vol. 142/2013, Sevastopol, Pp. 96–99.
12. Gillespie Thomas, D. (1992), *Fundamentals of Vehicle Dynamics* Society of Automotive Engineers, 470 p.
13. Rokar, I. *Nestiykist' v mekhanitsi*, Yzd-vo inoz. lit., M., 317 p.
14. Ellis, D.R. (1975), *Kerovanist avtomobilya*, Mashynobuduvannya, M., 216 p.
15. Pacejka, H.B. (2012), *Tire and Vehicle Dynamics*, 3rd, Butterworth-Heinemann is imprint of Elsevier, 672 p.

Вербицкий Володимир Григорович – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри програмного забезпечення автоматизованих систем Запорізької державної інженерної академії.

Наукові інтереси:

- стійкість руху та динаміка колісних екіпажів;
- математичне моделювання.

E-mail: oxsi@bigmir.net.

Хребет Валерій Григорович – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри базових та спеціальних дисциплін Навчально-наукового інституту неперервної освіти Національного авіаційного університету.

Наукові інтереси:

- біфуркаційний аналіз та динаміка колісних екіпажів;
- математичне моделювання.

Тел.: +38 (099) 348–47–12.

E-mail: adipmi@gmail.com.

Єфименко Алла Миколаївна – кандидат технічних наук, асистент кафедри автомобілі Національного транспортного університету.

Наукові інтереси:

- стійкість колісних транспортних засобів;
- технічна експлуатація автомобілів.

Тел.: +38 (050) 152–47–20.

E-mail: alla.yefimenko.16@gmail.com.

Стаття надійшла до редакції 30.08.2018.