

С.П. Фриз, к.т.н., доц.
Житомирський військовий інститут ім. С.П. Корольова
Національного авіаційного університету

СИСТЕМАТИЗОВАНИЙ МАТЕМАТИЧНИЙ АПАРАТ ДЛЯ РОЗРАХУНКІВ РОЗМІРІВ КОНТРОЛЬОВАНИХ ДІЛЯНОК ЗЕМНОЇ ПОВЕРХНІ В ЗАДАЧАХ КОСМІЧНИХ СПОСТЕРЕЖЕНЬ КОНІЧНОЮ ЗОНОЮ ОГЛЯДУ ПРИ ЇЇ ВІДВОРОТАХ ВІД НАДИРА ПО КРЕНУ

У статті пропонується систематизований математичний апарат для розрахунків розмірів контрольованих ділянок земної поверхні за допомогою космічних апаратів (КА) дистанційного зондування Землі (ДЗЗ) з урахуванням кривизни Землі, орбітальних параметрів КА та технічних характеристик бортової цільової апаратури (БЦА) оптико-електронного типу з конічною зоною огляду при її відворотах від надира по крену. Розроблений математичний апарат дає змогу розраховувати розміри контрольованих ділянок земної поверхні з точністю, достатньою для вирішення практичних завдань ДЗЗ.

Постановка проблеми. В епоху інтенсивного застосування космічних технологій в різних сферах людської діяльності, зокрема, в задачах ДЗЗ, часто виникають потреби у створенні власних космічних систем спостереження (КСС) або у використанні інформації від діючих іноземних КА, доступних за певних умов для вітчизняних користувачів [1, 2]. При цьому як у першому, так і в другому випадках одним із критеріїв вибору придатних для певних цільових задач КА є їх просторово-часове положення як у космічному просторі, так і відносно заданих наземних об'єктів (НО) спостереження [3].

Зокрема, в задачах ДЗЗ за допомогою БЦА оптико-електронного спостереження (ОЕСп) однією із умов успішного виконання задач є наявність геометричної видимості між КА і заданими НО. У цьому випадку зазначені об'єкти повністю або частково потраплять у деякий момент часу в зону огляду БЦА або “накриватимуться” смугою огляду чи смугою захвата КА на заданому інтервалі спостережень [4]. Розміри і положення фактично відзнятої ділянки земної поверхні щодо заданого НО можуть бути одним із показників цільової ефективності КСС [5]. В свою чергу, точність визначення розмірів і положення спостережуваної ділянки однозначно залежить від точності розрахунків розміру площі проекції зони огляду БЦА КА на Землю.

Особливістю сучасних КСС є те, що в них з метою забезпечення необхідної детальності зображень використовують БЦА ОЕСп з вузьким полем зору, а для підвищення їх оглядовості застосовують кутові маневри КА. Зокрема, на практиці найчастіше використовують відвороти від надира візирної осі КА по крену η (перпендикулярно до траси орбіти). Однак при цьому можуть виникати недопустимі спотворення зображень.

У зв'язку з цим виникає **актуальне завдання** підвищення точності розрахунків розмірів контрольованої ділянки земної поверхні з урахуванням кривизни Землі, орбітальних параметрів та технічних характеристик БЦА ОЕСп, яка формує, зокрема, конічну зону огляду та забезпечує її відвороти від надира по крену. Такі розрахунки необхідні як на етапі планування космічної зйомки, так і на етапі оцінювання її результатів.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Питання розрахунку розмірів контрольованих ділянок земної поверхні тією чи іншою мірою порушуються в ряді наукових праць останнього часу [8–12], але в них розглядаються лише окремі показники або підходи.

Зокрема, у статті [8] наведено підхід до планування спостережень з урахуванням геометричної форми заданої області земної поверхні, а також її розташування відносно траси КА та смуги огляду БЦА. Але математичний апарат для розрахунків параметрів проекції зони огляду на Землю не наведено.

У роботі [9] запропоновано алгоритм розрахунку площі контрольованої частини заданого району та обчислення коефіцієнта накривання зоною огляду цього району. При цьому введено припущення, що розміри району невеликі й через це його границі можна задавати плоскою трапецією.

У публікації [10] розроблено методику, що дозволяє оцінювати потенційні варіанти космічного знімання заданого району за різними показниками, включаючи і площу цього району, але власне ані його лінійні розміри, ані площа не розраховуються, а використовується відносний показник – коефіцієнт накривання.

Стаття [11] присвячена тільки одній стороні проблеми – оцінюванню висоти об'єктів за розмірами їх тіней на космічних знімках, а стаття [12] – проблемі розрахунків контрольованої площі за допомогою діаграм спрямованості передавальних антен штучних супутників Землі.

Виходячи з цього, **метою статті** є систематизація і удосконалення математичного апарату для розрахунків розмірів контрольованої ділянки земної поверхні при ОЕСп заданих НО конічною зоною огляду

БЦА при її відворотах від надира по крену. В подальшому передбачається розробка серії таких статей, в яких досліджуватимуться інші ситуації.

Викладення основного матеріалу. КА ОЕСп сприймають оптичне випромінювання НО в межах зони огляду. При цьому під *зоною огляду* КА розумітимемо [4] частину простору, обмежену відносно *нерухомого* КА по дальності його висотою H над поверхнею Землі, а по кутах – його полем зору.

Поле зору КА, як правило, формується за рахунок технічних характеристик і геометричних параметрів БЦА. Якщо БЦА установлена на КА нерухомо, а її візирна вісь співпадає з головною віссю симетрії КА, то поля зору БЦА і КА, а також їх зони огляду є поняттями тотожними. Зона огляду зазвичай характеризує просторові можливості КА по спостереженню за наземними об'єктами. На основі параметрів зони огляду визначають: а) лінійні розміри проекції зони огляду на поверхні Землі L_* або $L_\alpha \times L_\beta$; б) ширину смуги огляду $L_{озл}$; в) площу проекції зони огляду на поверхні Землі $S_{озл}$; г) площу знятої сцени $S_{цн}$; д) ширину смуги захвату $L_{зхв}$ тощо.

Прикладом *лінійних розмірів* прямокутної проекції зони огляду на поверхні Землі можуть служити її ширина L_α та довжина L_β (рис. 1, а). Якщо проекція еліптична, то її можна характеризувати великою L_α та малою L_β осями еліпса. Лінійним розміром кола служить його діаметр L_* .

Смуга огляду утворюється за рахунок *поступального* руху КА (рис. 1, а). Вона являє собою частину поверхні Землі, що накривається проекцією зони огляду БЦА на Землю при фіксованому кутовому положенні КА. При цьому, як видно із прикладу (рис. 1, а), ширина смуги огляду $L_{озл} = L_\alpha$.

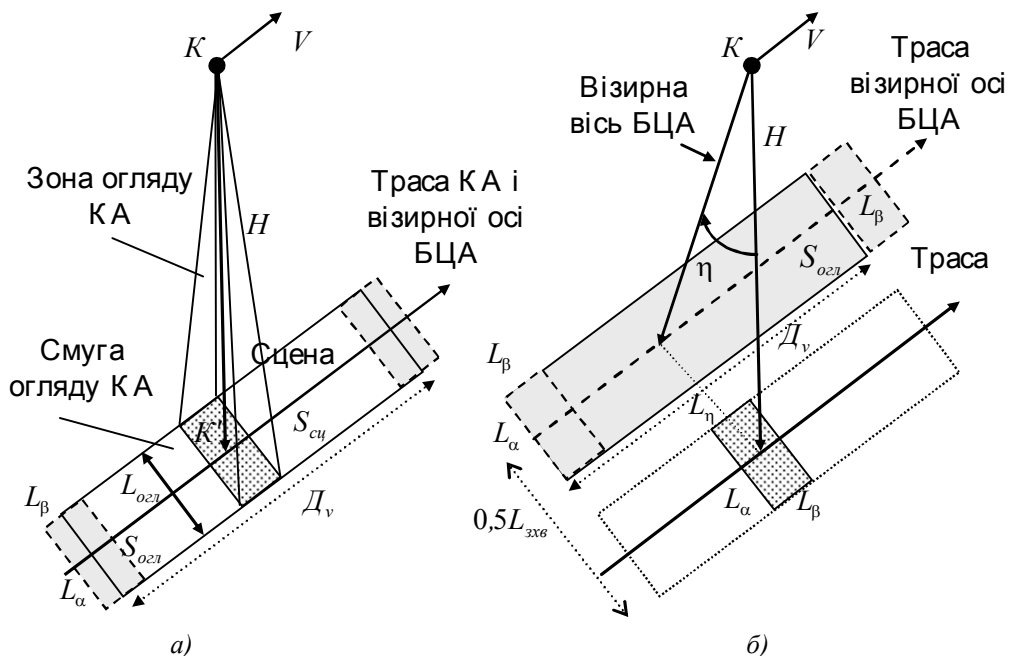


Рис. 1. До поняття смуги огляду, сцени (а) та смуги захвату (б)

Знята сцена – це частина смуги огляду БЦА, що обмежена шириною смуги огляду $L_{озл}$ та довжиною спостережуваної ділянки D_v , яка утворюється за рахунок орбітального руху КА з лінійною швидкістю V за час спостереження:

$$\Delta t_{cn} = t_k - t_n, \quad (1)$$

де t_n і t_k – моменти початку і кінця спостереження відповідно.

Зазначимо, що в задачах ДЗЗ час спостереження за НО займає, як правило, від десятків секунд до декількох хвилин. Виходячи з цього, вважатимемо, що кутова швидкість обертання Землі навколо своєї осі $\omega_z \approx 0$. Крім того, прийемо, що Земля має сферичну форму, а її середній радіус $R_z = 6371$ км.

Тоді *площу знятої сцени* (рис. 1, а) можна знайти як [4]:

$$S_{цн} = S_{озл} + L_{озл} D_v. \quad (2)$$

У цій формулі довжина знятої сцени D_v у загальному випадку може бути знайдена через лінійну швидкість підсупутникової точки (ПТ) $V_{nm}(t) = V_{nm}$ як:

$$D_v = \int_{t_n}^{t_k} V_{nm} dt. \quad (3)$$

Підсупутникова точка – це точка K' на земній поверхні (рис. 1, б), з якої КА в даний момент часу видно у зеніті. Іншими словами – це точка перетинання поточного радіуса-вектора КА $\vec{r}(t)$ з поверхнею Землі. Множина ПТ являє собою трасу КА.

Як показано в роботі [4], лінійна швидкість ПТ залежить від лінійної швидкості КА та висоти його орбіти та її величину можна оцінити як:

$$V_{nm} = \frac{R_3}{R_3 + H} V. \quad (4)$$

У свою чергу, лінійна швидкість КА залежить від розмірів і форми орбіти та поточного положення КА на ній і у загальному випадку розраховується за формулою [4]:

$$V = \sqrt{\mu_0 \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)}, \quad (5)$$

де $\mu_0 = 3,986 \cdot 10^5 \text{ км}^3 / \text{с}^2$ – гравітаційний параметр Землі; $r = r(t) = H + R_3$ – поточна довжина радіуса-вектора КА; $a = 0,5(H_A + H_{II} + 2R_3)$ – велика піввісь еліптичної орбіти; H_A і H_{II} – висота апогею і перигею еліптичної орбіти над Землею.

З урахуванням отриманих результатів із формули (2) знайдемо:

$$S_{ци} = S_{озл} + L_{озл} \int_{t_n}^{t_k} \frac{R_3}{R_3 + H} \sqrt{\mu_0 \left(\frac{2}{R_3 + H} + \frac{1}{a} \right)} dt. \quad (6)$$

Якщо для спостережень застосовують колові або майже колові орбіти, то $H \approx H_A \approx H_{II} \approx H_o$, $r = r_o$, $a = H_o + R_3 = r_o$ і формула (5) спрощується до вигляду:

$$V \approx V_o = \sqrt{\mu_0 / r_o} \approx \text{const}. \quad (7)$$

Тоді вираз (4) набуває вигляду:

$$V_{nmo} = \frac{R_3}{R_3 + H_o} V_o. \quad (8)$$

У цьому випадку для розрахунків довжини знятої сцени замість виразу (3) можна скористатися спрощеною формулою:

$$D_{vo} \approx V_{nmo} \Delta t_{cn}. \quad (9)$$

З урахуванням отриманих результатів із формули (2) знайдемо кінцевий вираз для розрахунків площі знятої сцени з колових або майже колових орбіт:

$$S_{циo} \approx S_{озл} + \frac{R_3 \sqrt{\mu_0 / (R_3 + H_o)}}{R_3 + H_o} \Delta t_{cn}. \quad (10)$$

Якщо використовувати відвороти поля зору КА від надира по крену на кут η (рис. 1, б), то одержимо *смугу захвату КА* з лінійними розмірами (шириною) на поверхні Землі:

$$L_{x\eta} \approx L_\alpha + 2L_\eta, \quad (11)$$

де $L_\eta \approx H \sin \eta$ – лінійна відстань між трасами КА і візирної осі БЦА.

В задачах спостереження Землі з космосу слід розглядати множину ситуацій, які можуть виникати залежно від вибраної моделі спостережуваної поверхні, форми зони огляду КА та її орієнтації відносно надира (табл. 1).

Таблиця 1

Варіант позначень ситуацій в задачах ДЗЗ

Поверхня Землі (III)	Форма зони огляду (I)					
	конічна (1)			пірамідальна (2)		
	Орієнтація зони огляду (II)					
	в надир (1)	крен (2)	тангаж (3)	в надир (1)	крен (2)	тангаж (3)
плоска (1)	Ξ_{111}	Ξ_{121}	Ξ_{131}	Ξ_{211}	Ξ_{221}	Ξ_{231}

сферична (2)	Ξ_{112}	Ξ_{122}	Ξ_{132}	Ξ_{212}	Ξ_{222}	Ξ_{232}
еліпсоїдальна (3)	Ξ_{113}	Ξ_{123}	Ξ_{133}	Ξ_{213}	Ξ_{223}	Ξ_{233}

Розглянемо окремі характерні ситуації для *плоскої і сферичної моделей* Землі, подані в таблиці 1 для *конічної зони огляду при її відворотах по крену*.

Ситуація Ξ_{121} (конус, відворот по крену, плоска поверхня Землі). Приймемо, що зона огляду КА первісно являє собою *прямий коловий конус* з кутом при вершині 2χ , візирна вісь БЦА збігається з висотою цього конуса. За рахунок кутового маневру КА по *крену* його зона огляду і візирна вісь БЦА *відхилені* від надира на кут η (рис. 4). КА знаходиться на висоті H . У цьому випадку проекція зони огляду на поверхні плоскої Землі трансформується в *еліпс*.

Необхідно розрахувати: а) лінійні розміри проекції зони огляду $L_\alpha(\Xi_{121}) \times L_\beta(\Xi_{121})$; б) ширину смуги огляду $L_{озл}(\Xi_{121})$; в) площу проекції зони огляду $S_{озл}(\Xi_{121})$; г) площу сцени $S_{сц}(\Xi_{121})$, яку зніме КА за час спостереження $\Delta t_{сп}$.

Оскільки проекція зони огляду трансформується в еліпс (рис. 2, а), то її *лінійні розміри* можна характеризувати великою віссю C_1B_1 та малою віссю F_1G_1 .

Як видно з рисунка 2, б, велика вісь еліпса:

$$C_1B_1 = L_\alpha(\Xi_{121}) = L_{\chi+\eta} + L_{\chi-\eta}, \quad (12)$$

де $L_{\chi+\eta} = C_1A$ – збільшений за рахунок крену катет прямокутного трикутника KAC_1 ; $L_{\chi-\eta} = B_1A$ – зменшений за рахунок крену катет прямокутного трикутника KAB_1 .

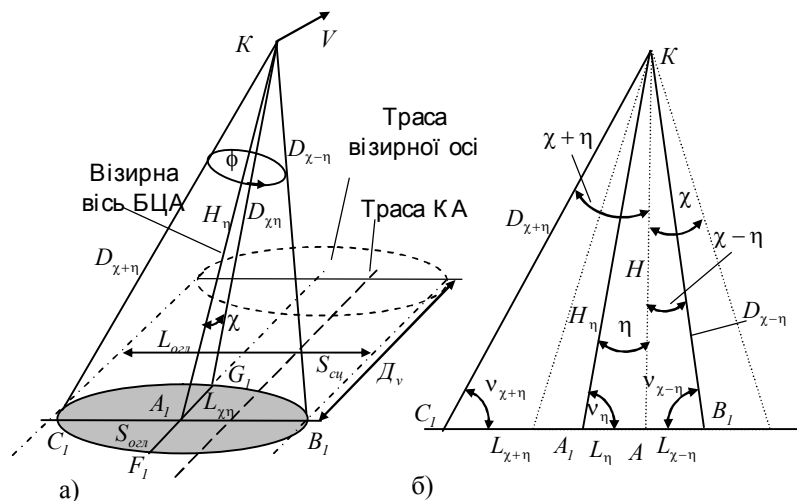


Рис. 2. До ситуації спостережень плоскої Землі конічною зоною огляду КА з відхиленням візирної осі БЦА по крену

В свою чергу, змінені значення катетів у виразі (12) можна розрахувати за формулами (рис. 2, б):

$$L_{\chi+\eta} = H \operatorname{tg}(\chi + \eta) = H \operatorname{ctg} v_{\chi+\eta} = D_{\chi+\eta} \sin(\chi + \eta) = D_{\chi+\eta} \cos v_{\chi+\eta}; \quad (13)$$

$$L_{\chi-\eta} = H \operatorname{tg}(\chi - \eta) = H \operatorname{ctg} v_{\chi-\eta} = D_{\chi-\eta} \sin(\chi - \eta) = D_{\chi-\eta} \cos v_{\chi-\eta}, \quad (14)$$

де $v_{\chi+\eta} = 0,5\pi - \chi - \eta$ – зменшений за рахунок крену кут візування земної поверхні; $v_{\chi-\eta} = 0,5\pi - \chi + \eta$ – збільшений за рахунок крену кут візування земної поверхні; $D_{\chi+\eta} = H/\cos(\chi + \eta)$ – збільшена за рахунок крену максимальна дальність від КА до поверхні Землі в межах зони огляду; $D_{\chi-\eta} = H/\cos(\chi - \eta)$ – зменшена за рахунок крену максимальна дальність від КА до поверхні Землі в межах зони огляду.

Примітка. Поняття “збільшена” і “зменшена” дальність є дещо умовними, оскільки можуть міняти своє значення залежно від співвідношення між кутами η і χ .

Використовуючи перші значення виразів (13) і (14), із формули (12) отримаємо *ширину смуги огляду*:

$$L_{\text{іаб}}(\Xi_{121}) = L_\alpha(\Xi_{121}) = H[\operatorname{tg}(\chi + \eta) + \operatorname{tg}(\chi - \eta)]. \quad (15)$$

Малу вісь еліпса знайдемо (рис. 2, а і б) як:

$$F_1G_1 = L_\beta(\Xi_{121}) = 2L_{\chi\eta} = 2H_\eta \operatorname{tg}\chi = 2H \operatorname{tg}\chi / \sin \eta, \quad (16)$$

де $H_\eta = KA_1 = H/\cos \eta$ – спотворена за рахунок крену “висота” КА (рис. 2, б) над трасою візирної осі БЦА (а не над трасою КА) на поверхні плоскої Землі.

Для знаходження **площі проекції зони огляду** еліптичної форми на плоскій поверхні Землі скористаємося формулою [13, 14] для розрахунків площі еліпса $S_e = \pi ab$, де a і b – велика і мала півосі цього еліпса. У нашому випадку (рис. 2) у еліпса $C_1G_1B_1F_1$ велика піввісь $a = 0,5L_\alpha(\Xi_{121})$, а мала – $b = 0,5F_1G_1 = A_1G_1 = A_1F_1 = L_{\chi\eta}$.

Тоді з урахуванням виразів (15) та (16) площу еліпса $C_1G_1B_1F_1$ можна знайти як:

$$S_{121} = S_{\text{іє}}(\Xi_{121}) = 0,5\pi H^2 [\operatorname{tg}(\chi + \eta) + \operatorname{tg}(\chi - \eta)] \operatorname{tg}\chi / \sin \eta. \quad (17)$$

Площу знятої сцени $S_{\text{сч}}(\Xi_{121})$ за час спостереження $\Delta t_{\text{сн}}$ можна обчислювати за формулами (6) або (10) з використанням виразів (15) або (18) та (17).

Ситуація Ξ_{122} (конус, відворот по крену, сферична поверхня Землі). Прийmemo, що зона огляду КА являє собою **прямий коловий конус** з кутом при вершині 2χ , візирна вісь БЦА співпадає з висотою цього конуса. За рахунок кутового маневру КА по **крену** його зона огляду і візирна вісь БЦА **відхилені** від надира на кут η (рис. 3). КА знаходиться на висоті H . У цьому випадку проекція зони огляду на поверхні сферичної Землі трансформується у деяку поверхню другого порядку (“**випуклий еліпс**”).

Необхідно розрахувати: а) лінійні розміри проекції зони огляду $L_\alpha(\Xi_{122}) \times L_\beta(\Xi_{122})$; б) ширину смуги огляду $L_{\text{озл}}(\Xi_{122})$; в) площу проекції зони огляду $S_{\text{озл}}(\Xi_{122})$; г) площу сцени $S_{\text{сч}}(\Xi_{122})$, яку зніме КА за час спостереження $\Delta t_{\text{сн}}$.

Очевидно, що математичний апарат для розрахунків геометричних розмірів отриманої проекції зони огляду у формі “випуклого еліпса” є досить *складним*. Не дивлячись на це в разі необхідності *точних* обчислень можна скористатись класичним методом, відомим із аналітичної геометрії у просторі [13, 14]. Для цього слід записати аналітичні рівняння двох геометричних фігур, а саме сфери і конуса, в одній системі координат.

Наприклад, канонічне рівняння сферичної Землі радіуса $R_3 = 6371 \text{ км}$ в абсолютній геоцентричній прямокутній (інерціальній) системі координат $OX_иY_иZ_и$ [4] з центром в точці $O(0,0,0)$ має такий вигляд:

$X^2 + Y^2 + Z^2 = R_3^2$. Аналогічно рівняння зони огляду БЦА конічної форми (еліптичний конус) можна подати як $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$, де a і b – велика та мала півосі основи конуса; c – параметр, що залежить від висоти конуса. Далі необхідно розв’язати ці рівняння. Знайдений результат являтиме собою рівняння отриманої фігури на поверхні сфери. Потім шляхом інтегрування по контуру цієї фігури можна досить точно знайти її площу.

В разі *приблизних* розрахунків **лінійні розміри** проекції зони огляду на земній поверхні достатньо описати великою віссю C_3B_3 та малою віссю F_1G_1 випуклого еліпса (рис. 3, а).

За велику піввісь такого еліпса прийmemo (рис. 3, а) половину дуги $C_3B_3 = L_{122}$, тобто

$$a = 0,5L_{122} = 0,5(L_{\chi+\eta} + L_{\chi-\eta}), \quad (18)$$

а за малу піввісь (рис. 3, б) – половину дуги $A_3G_3 = L_{\chi\eta} \approx 0,5L_{\chi+\eta}$, тобто

$$b = 0,5L_{\chi\eta} \approx 0,25L_{\chi+\eta}, \quad (19)$$

де $L_{\chi+\eta}$ – збільшена дуга, що розраховується за формулою (13).

Ширину смуги огляду слід розраховувати за аналогією із ситуацією Ξ_{121} як

$$L_{122} = L_{\text{озл}}(\Xi_{122}) = L_{\chi-\eta} + L_{\chi+\eta}, \quad (20)$$

де $L_{\chi-\eta} = B_3A$ – зменшена за рахунок крену довжина дуги земної поверхні; $L_{\chi+\eta} = AC_3$ – збільшена за рахунок крену довжина дуги земної поверхні.

Величини цих дуг можна знайти безпосередньо із рисунка 3:

$$L_{\chi-\eta} = \psi_{\chi-\eta} R_3; \quad (21)$$

$$L_{\chi+\eta} = \psi_{\chi+\eta} R_3. \quad (22)$$

Для знаходження зв’язку між зменшеною довжиною дуги (24), висотою орбіти \dot{I} , параметрами поля зору КА χ і його креном η скористаємося теоремою синусів, записавши її із $\triangle OB_3K$ (рис. 3, а) у вигляді:

$$\frac{R_3}{\sin(\chi - \eta)} = \frac{R_3 + H}{\cos v_{\chi - \eta}} = \frac{D_{\chi - \eta}}{\sin \psi_{\chi - \eta}}, \quad (23)$$

де $D_{\chi - \eta} = KB_3$ – зменшена за рахунок крену максимальна дальність від КА до поверхні Землі в межах зони огляду; $v_{\chi - \eta}$ – збільшений за рахунок крену кут візування земної поверхні, який можна знайти із формули (26) як:

$$v_{\chi - \eta} = \arccos\left(\frac{R_3 + H}{R_3} \sin(\chi - \eta)\right). \quad (24)$$

Далі,

використовуючи значення кута $v_{\chi - \eta}$, можна знайти величину центрального кута:

$$\psi_{\chi - \eta} = 0,5\pi - [(\chi - \eta) + v_{\chi - \eta}] = 0,5\pi - \chi + \eta - \arccos\left(\frac{R_3 + H}{R_3} \sin(\chi - \eta)\right). \quad (25)$$

Тоді, підставивши отримане значення кута (28) у вираз (24), отримаємо довжину зменшеної дуги:

$$L_{\chi - \eta} = R_3 \left[0,5\pi - \chi + \eta - \arccos\left(\frac{R_3 + H}{R_3} \sin(\chi - \eta)\right) \right]. \quad (26)$$

Таким же чином для знаходження зв'язку між збільшеною довжиною дуги $L_{\chi + \eta}$, висотою орбіти H , параметрами поля зору КА χ і його креном η скористаємося теоремою синусів, записавши її для ΔOC_3K (рис. 3, а) у вигляді:

$$\frac{R_3}{\sin(\chi + \eta)} = \frac{R_3 + H}{\cos v_{\chi + \eta}} = \frac{D_{\chi + \eta}}{\sin \psi_{\chi + \eta}}, \quad (27)$$

де $D_{\chi + \eta} = KC_3$ – збільшена за рахунок крену максимальна дальність від КА до поверхні Землі в межах зони огляду; $v_{\chi + \eta}$ – зменшений за рахунок крену кут візування земної поверхні, який можна знайти із формули (27) як:

$$v_{\chi + \eta} = \arccos\left(\frac{R_3 + H}{R_3} \sin(\chi + \eta)\right). \quad (28)$$

Далі використовуючи значення кута $v_{\chi + \eta}$, можна знайти величину центрального кута:

$$\psi_{\chi + \eta} = 0,5\pi - [(\chi + \eta) + v_{\chi + \eta}] = 0,5\pi - \chi - \eta - \arccos\left(\frac{R_3 + H}{R_3} \sin(\chi + \eta)\right). \quad (29)$$

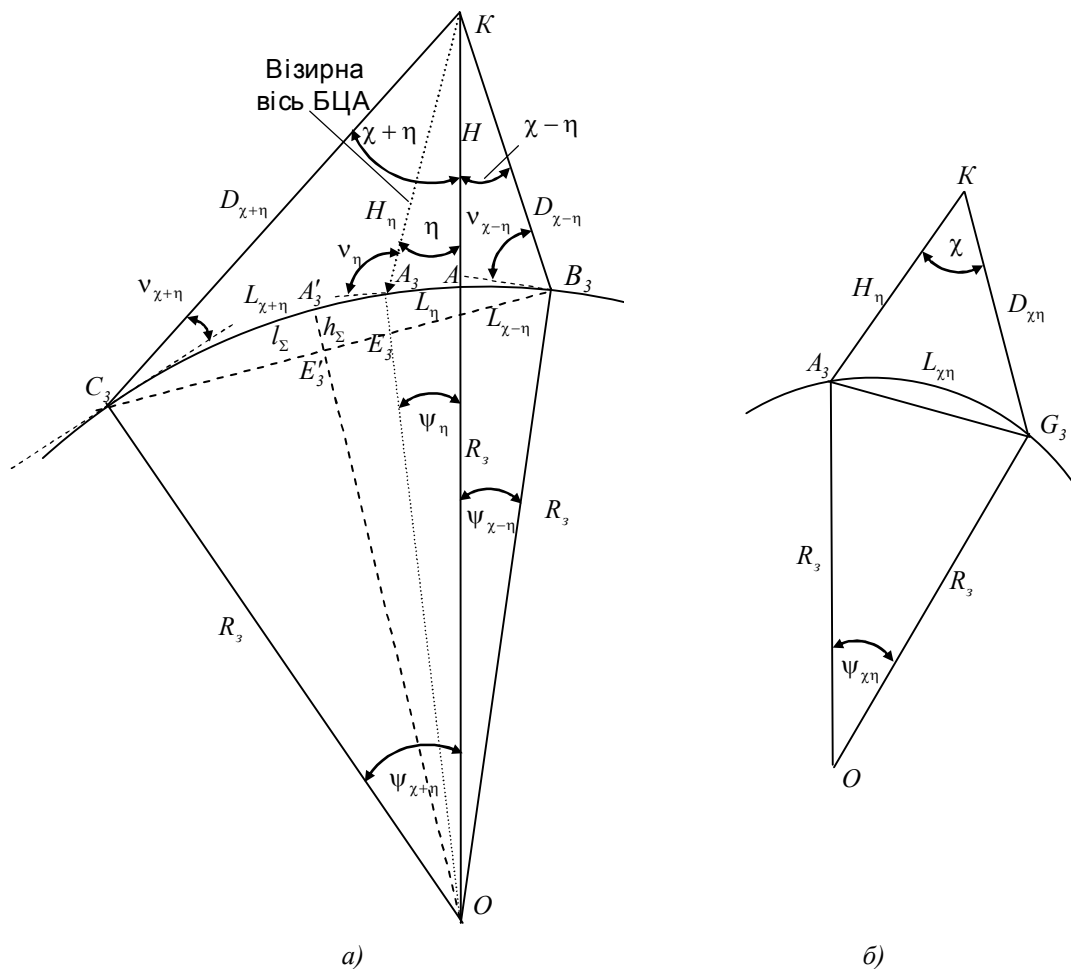


Рис. 3. До розрахунків зони огляду при відхиленні візирної осі БЦА від надира

Тоді, підставивши отримане значення кута (29) у вираз (22), отримаємо довжину збільшеної дуги:

$$L_{\chi+\eta} = R_3 \left[0,5\pi - \chi - \eta - \arccos \left(\frac{R_3 + H}{R_3} \sin(\chi + \eta) \right) \right]. \tag{30}$$

Підставивши отримані значення (29) та (33) у формулу (23), отримаємо:

$$L_{122} = L_{ozl}(\Xi_{122}) = R_3 \left\{ \pi - 2\chi - \arccos \left[\frac{R_3 + H}{R_3} \sin(\chi - \eta) \right] + \arccos \left[\frac{R_3 + H}{R_3} \sin(\chi + \eta) \right] \right\}. \tag{31}$$

Якщо необхідно окремо вичленити дугу $L_\eta = AA_3 = \psi_\eta R_3$ (розрахувати відстань між трасами КА і візирної осі БЦА), то для знаходження зв'язку між її довжиною, висотою орбіти H КА та його креном η можна скористатися теоремою синусів, записавши її для $\triangle OA_3K$ (рис. 3) у вигляді:

$$\frac{R_3}{\sin \eta} = \frac{R_3 + H}{\cos v_\eta} = \frac{H_\eta}{\sin \psi_\eta}, \tag{32}$$

де $H_\eta = KA_3$ – сплотовлена за рахунок крену “висота” КА над трасою візирної осі БЦА на поверхні Землі (нахилена дальність від КА до траси візирної осі у площині крену); v_η – кут візування земної поверхні візирною віссю КА, який можна знайти із виразу (32) як:

$$v_\eta = \arccos \left(\frac{R_3 + H}{R_3} \sin \eta \right). \tag{33}$$

Далі, використовуючи значення v_η , можна знайти величину центрального кута як:

$$\psi_\eta = 0,5\pi - (\eta + v_\eta) = 0,5\pi - \left[\eta + \arccos \left(\frac{R_3 + H}{R_3} \sin \eta \right) \right]. \tag{34}$$

Тоді з урахуванням виразу (34) шукану дугу L_η можна розрахувати за формулою:

$$L_\eta = R_3 \psi_\eta = R_3 \left\{ 0,5\pi - \left[\eta + \arccos \left(\frac{R_3 + H}{R_3} \sin \eta \right) \right] \right\}, \quad (35)$$

а спотворену висоту КА H_η – знайти із формули (32) з урахуванням виразу (35) як:

$$H_\eta = R_3 \sin \psi_\eta / \sin \eta = R_3 \cos \left[\eta + \arccos \left(\frac{R_3 + H}{R_3} \sin \eta \right) \right] / \sin \eta. \quad (36)$$

Використовуючи отримані результати, можна орієнтовно обчислювати шукану площу випуклого еліпса з урахуванням виразів (18) і (19) як:

$$S_{122} = S_{\text{орл}}(\Xi_{122}) = \pi ab \approx 0,125\pi (L_{\chi+\eta}^2 + L_{\chi+\eta} L_{\chi-\eta}). \quad (37)$$

Результати розрахунків кутових і лінійних параметрів та площі проекції зони огляду КА на сферичну Землю при відхиленнях візирної осі КА від надира по крену для значень кута поля зору БЦА $\chi = 1^\circ$ та висоти колової орбіти $\dot{I}_i = 700$ км надані в таблиці 2.

Аналіз отриманих результатів показав таке:

а) більша частина результатів у стовпці 3 таблиці 2 має від'ємні значення. Це обумовлено тим, що центральний кут $\psi_{\chi-\eta}$ за рахунок відхилення візирної осі БЦА від надира на величину $\eta \geq \chi = 1^\circ$ перебісся в інший квадрант. Внаслідок цього і лінійні розміри зони огляду $L_{\chi-\eta}$ у стовпці 4, знайдені за формулою (21), теж від'ємні. Цю особливість важливо врахувати при користуванні формулою (20), коли загальний розмір зони огляду визначатиметься як різниця двох складових, що повністю узгоджується з відповідними геометричними уявленнями. В інших випадках, коли отримані результати є кінцевими, можна користуватися модулями цих параметрів $|\psi_{\chi-\eta}|$ і $|L_{\chi-\eta}|$;

б) лінійні розміри зони огляду з кутовим полем зору $\chi = 1^\circ$ при відхиленнях візирної осі БЦА від надира на кут $\eta = 30^\circ$ зростають в $\sqrt{2}$ раз (стовпець 10), тобто $L'_{\text{орл}} \approx \sqrt{2} L_{\text{орл}}$;

в) площа проекції зони огляду КА при відхиленнях візирної осі БЦА від надира на кут $\eta = 30^\circ$ зростає у 2 рази (стовпець 12), тобто $S'_{\text{орл}} \approx 2S_{\text{орл}}$;

г) зростання параметрів смуги огляду за рахунок відхилення візирної осі БЦА від надира призводить, з одного боку, до розширення можливостей КА по “накриттю” заданих НО, а отже, і до підвищення оперативності КСС, а з іншого – до погіршення розрізненості БЦА, тобто, до погіршення детальності на отримуваних зображеннях.

Таблиця 2

Результати розрахунків зони огляду КА при відхиленнях його візирної осі від надира по крену (для значень $\chi = 1^\circ$, $\dot{I} = 700$ км)

η , град.	$\nu_{\chi-\eta}$, град.	$\psi_{\chi-\eta}$, град.	$L_{\chi-\eta}$, км	$\nu_{\chi+\eta}$, град.	$\psi_{\chi+\eta}$, град.	$L_{\chi+\eta}$, км	ψ_Σ , град.	$L'_{\text{орл}}$, км	$L'_{\text{орл}}/L_{\text{орл}}$	$S'_{\text{орл}}$, км ²	$S'_{\text{орл}}/S_{\text{орл}}$
0	88,89	0,11	12,23	88,89	0,11	12,23	0,22	24,46	1,00	470	1,00
3	92,22	-0,22	24,46	85,56	0,44	48,93	0,22	24,46	1,00	470	1,00
6	95,55	-0,55	61,16	82,22	0,78	86,73	0,23	25,57	1,04	513	1,09
9	98,88	-0,88	97,85	78,89	1,11	123,43	0,23	25,57	1,04	513	1,09
12	102,23	-1,23	136,77	75,54	1,46	162,35	0,23	25,57	1,04	513	1,09
15	105,58	-1,58	175,69	72,18	1,82	202,37	0,24	26,70	1,09	560	1,19
18	108,94	-1,94	215,72	68,81	2,19	243,52	0,25	27,80	1,14	607	1,29
21	112,31	-2,31	256,86	65,43	2,57	285,77	0,26	28,90	1,18	656	1,40
24	115,70	-2,70	300,23	62,02	2,98	331,36	0,28	31,10	1,27	760	1,62
27	119,12	-3,12	346,93	58,59	3,41	379,17	0,29	32,20	1,32	814	1,73
30	122,56	-3,56	395,85	55,13	3,87	430,32	0,31	34,47	1,41	933	1,98

Висновки. У статті систематизовано і удосконалено математичний апарат, придатний для практичного використання в задачах планування космічних спостережень і оцінювання отриманих результатів для плоскої і сферичної моделей Землі та конічної зони огляду БЦА при її відворотах по крену.

Список використаної літератури:

1. Загальнодержавна цільова науково-технічна космічна програма України на 2008–2012 роки, затверджена Законом України від 30 вересня 2008 року № 608-VI [Електронний ресурс]. – Режим доступу : <http://zakon1.rada.gov.ua>.
2. Концепція реалізації державної політики у сфері космічної діяльності на період до 2032 року. Схвалено розпорядженням Кабінету Міністрів України від 30 березня 2011 р. № 238-р [Електронний ресурс]. – Режим доступу : <http://zakon1.rada.gov.ua>
3. Фриз П.В. Можливий підхід до формалізованого опису специфічних орбіт космічних апаратів у задачах спостереження Землі / П.В. Фриз, О.М. Кондратов // Проблеми створення, випробування, застосування, експлуатації складних інформаційних систем : зб. наук. пр. – Житомир : ЖВІ НАУ, 2011. – Вип. 5. – С. 147–157.
4. Фриз П.В. Основи орбітального руху космічних апаратів : підручник / П.В. Фриз. – Житомир : ЖВІ НАУ, 2012. – 348 с.
5. Ярмольчук Е.Д. Критерии оценки целевой эффективности космических систем наблюдения Земли / Е.Д. Ярмольчук // Проблеми створення, випробування, застосування та експлуатації складних інформаційних систем : зб. наук. пр. – Житомир : ЖВІРЕ, 2004. – Вип. 10. – С. 125–132.
6. Буритинська Х.В. Аерокосмічні знімальні системи : навч. посібн. / Х.В. Буритинська, С.А. Станкевич. – Львів : Львівська політехніка, 2010. – 292 с.
7. Манойлов В.П. Дистанційне зондування Землі із космосу: науково-технічні основи формування й обробки видової інформації : монографія / В.П. Манойлов, В.В. Омельчук, В.В. Опанюк. – Житомир : ЖДТУ, 2008. – 384 с.
8. Фриз С.П. Можливий підхід до планування спостережень космічними апаратами / С.П. Фриз, В.В. Петрожалко, В.В. Ожінський // Проблеми створення, випробування, застосування та експлуатації складних інформаційних систем : зб. наук. пр. – Житомир : ЖВІ НАУ, 2011. – Вип. 4. – С. 87–96.
9. Фриз С.П. Алгоритм розрахунку площі контрольованої частини заданого району при проведенні зйомки з космічних апаратів / С.П. Фриз // Вісник ЖДТУ / Технічні науки. – Житомир : ЖДТУ, 2012 – Вип. № 1 (60). – С. 69–77.
10. Петрожалко В.В. Методика знаходження компромісного рішення при плануванні космічного знімання у складних умовах / В.В. Петрожалко // Вісник ЖДТУ / Технічні науки. – Житомир : ЖДТУ, 2012 – Вип. № 1 (60). – С. 52–58.
11. Болобан С.І. Методика оцінки висоти об'єктів за розмірами їх тіней на космічних знімках / С.І. Болобан, Р.М. Осадчук // Вісник ЖДТУ / Технічні науки. – Житомир : ЖДТУ, 2010 – Вип. № 3 (54). – С. 32–36.
12. Проекция диаграммы направленности передающей антенны искусственного спутника Земли / В.В. Пономарев и др. // Проблеми створення, випробування, застосування та експлуатації складних інформаційних систем : зб. наук. пр. – Житомир : ЖВІРЕ, 2007. – Вип. 11. – С. 97–88.
13. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г.Корн, Т.Корн. – М. : Наука, 1984. – 832 с.
14. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике / М.Я. Выгодский. – М. : Наука, 1964. – 872 с.

ФРИЗ Сергій Петрович – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри геоінформаційних і космічних систем Житомирського військового інституту ім. С.П. Корольова Національного авіаційного університету.

Наукові інтереси:

- проблеми планування в космічних системах;
- оптимізаційні моделі процесів у технічних системах.

Стаття надійшла до редакції 01.02.2013