УДК 519.161

Н.О. Кушнір, аспір.
Житомирський державний технологічний університет
О.Б. Мацій, аспір.
Харківський національний автомобільно-дорожній університет
В.О. Скачков, ст. викл.
Житомирський державний технологічний університет

МЕТОД НАЙКОРОТШИХ ЗБІЛЬШУЮЧИХ ШЛЯХІВ У ЗАДАЧАХ ПРО ПАРОСПОЛУЧЕННЯ

(Представлено д.т.н., проф. Панішевим А.В.)

У застосуваннях теорії графів широку популярність отримала задача про паросполучення. Вона полягає в знаходженні в заданому графі паросполучення з найбільшою кількістю ребер – максимального паросполучення. Узагальненям цієї задачі є задача про зважене паросполучення. Класичний алгоритм Едмондса для знаходження найбільшого зваженого паросполучення у недводольному графі характеризується трудомісткістю $O(|V^4|)$. *Відома задача про зважене паросполучення у довільному графі* H *з n вершинами зводиться до однієї з задач про паросполучення для дводольного графа з* $2n$ *вершинами. Максимальне паросполучення графа* H *з мінімальною сумою ваг ребер, заданих матрицею* $[c_{ij}]_n$, *знаходиться за час* $O(n^3)$ *після впорядкування за незменшенням значень* c_{ij}, *розташованих над головною діагоналлю.*

Ключові слова: *паросполучення; максимальне паросполучення; задача про зважене паросполучення.*

Постановка проблеми. Нехай $H=(V,U)$ – граф, де V – множина вершин, U – множина ребер (неорієнтованих пар вершин). У H недопустимі петлі, тобто ребра виду $\{v,v\}$, $v\in V$ і кратні або «паралельні» ребра. Паросполученням у графі H називається підмножина ребер, у якій будь-які два ребра не мають спільних вершин.

У застосуваннях теорії графів широку популярність отримала задача про паросполучення. Вона полягає у знаходженні в заданому графі $H=(V,U)$ паросполучення з найбільшою кількістю ребер – максимального паросполучення. В узагальненні цієї задачі задані ваги ребер – невід'ємні числа, і потрібно визначити максимальне паросполучення графа, що містить ребра з мінімальною (максимальною) сумарною вагою. Сформульоване узагальнення називається задачею про зважене паросполучення (ЗЗП).

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Відомо, що ЗЗП поліноміально вирішувана [1]. Класичний алгоритм Едмондса для знаходження найбільшого зваженого паросполучення в недводольному графі $H=(V,U)$, викладений в [1], характеризується трудомісткістю $O(|V|^4)$. Основною причиною щодо невисокої швидкодії алгоритму Едмондса є існування в графі H квіток — циклів, що містять $2k+1$ вершин і k ребер деякого фіксованого паросполучення M. Виявлена квітка не дозволяє організувати швидкий пошук паросполучення потужності $|M|+1$ способом, що застосовується для дводольних графів. Для роботи з довільними графами алгоритм Едмондса містить процедуру виявлення квітки й операцію її заміни однією вершиною, допустимою в процесі знаходження поточного паросполучення.

Найбільш ефективні алгоритми знаходження максимальних паросполучень у довільних графах побудовані на розвитку ідей Едмондса про стискання непарних циклів. У них включені способи зберігання даних і організації процесу обчислень, що знижує складність до $O(|V|^3)$ для графів з n вершинами [1, 2].

Мета роботи. В умові ЗЗП, яка тут розглядається, заданий граф $H=(V,U)\mid V\in n$, в якому кожне ребро $\{i,j\}\in U$ має вагу $c_{ij}\in R_0^+$, $i,j=\overline{1,n}$, R_0^+ – множина невід’ємних дійсних чисел.

Потрібно знайти в графі H максимальне паросполучення з мінімальною сумою ваг ребер.

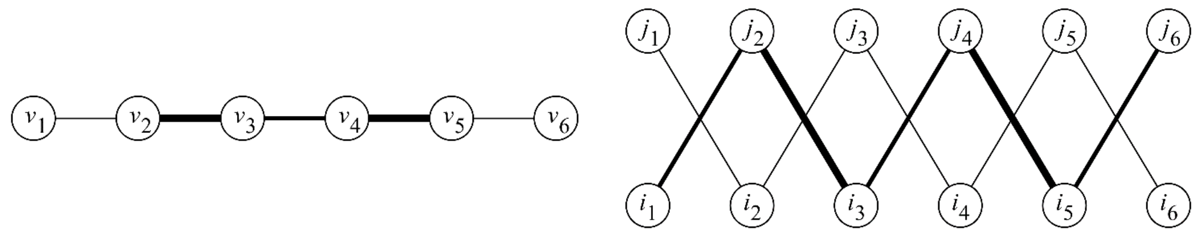
Викладення основного матеріалу. Графу ЗЗП $H=(V,U)$ відповідає симетрична матриця вартостей (ваг) ребер $C=[c_{ij}]_n$, де $c_{ij}\in R_0^+$, якщо $\{i,j\}\in U$ і $c_{ij}=\infty$ інакше. Ця ж матриця визначає дводольний граф $D=(X,Y,E)$, де *X*, *Y* – множина вершин, $|X|=|Y|=n$, $E=\{(i,j)\mid i\in X,\ \ j\in Y\}$ –

множина ребер із вагами $c_{ij} \in R_0^+$, $|E| = 2|V|$. Звідси слідує, що для розв'язання поставленої задачі застосовані ідеї пошуку в ширину в дводольних графах [1].

Ребро паросполучення M, що зв'язує вершини v і u, позначимо $[v, u]$. В ньому u є напарником v. Ребра, що не входять у паросполучення *M*, називаються вільними. Вершина, що належить ребру паросполучення, визначається як насичена. Інші вершини графа називаються ненасиченими або вільними. Потужність максимального паросполучення графа H з n вершинами не може бути більшою $\lfloor n/2 \rfloor$. Якщо вона дорівнює $\lfloor n/2 \rfloor$, то паросполучення вважається повним. При парному n повне паросполучення насичує всі вершини графа H і називається досконалим.

Нехай M – паросполучення в H. Простий шлях називається таким, що чергується щодо M, якщо ребра шляху через одне присутні в M[2]. Шлях, що чергується, який починається і закінчується ребрами, що не належать паросполученню M, називається збільшуючим щодо паросполучення M.

Якщо $(v_1, v_2, v_3, ..., v_{2k-2}, v_{2k-1}, v_{2k})$ – збільшуючий шлях щодо паросполучення M в графі H, то $P = (i_1, j_2, i_3, ..., j_{2k-2}, i_{2k-1}, j_{2k})$ – збільшуючий шлях в дводольному графі $D = (X, Y, E)$ щодо паросполучення тієї самої потужності, що й M. Шлях P починається в ненасиченій вершині $i_1 \in X$, закінчується в ненасиченій вершині $j_{2k} \in Y$ і містить k вільних ребер $(i_1, j_2), (i_3, j_4), ..., (i_{2k-1}, j_{2k})$. Інші k ребер шляху P утворюють паросполучення $\{[i_3, j_2], [i_5, j_4], ..., [i_{2k-1}, j_{2k-2}]\}$. На рисунку 1, *а* зображено збільшуючий шлях в графі $H = (V, U)$ щодо паросполучення $\{[v_2, v_3], [v_4, v_5]\}$, а на рисунку 1, *б* – відповідний йому збільшуючий шлях P в графі $D = (X, Y, E)$ щодо паросполучення $\{[i_3, j_2], [i_5, j_4]\}$. Тут $k = 3$. Ребра паросполучень представлені потовщеними лініями. Тонкими лініями зображені ребра графа *D*, що не належать P.



а) *б)*

Рис. 1

Процедура знаходження збільшуючого шляху є варіантом метода пошуку в ширину, який базується на наступному відомому факті: якщо P – множина ребер збільшуючого шляху щодо паросполучення M в графі H, то $M \oplus P$ – паросполучення потужності $|M| + 1$. Наприклад, зі збільшуючого шляху щодо паросполучення $\{[v_2, v_3], [v_4, v_5]\}$ (рис. 1, *а*) слідує паросполучення $\{[v_1, v_2], [v_3, v_4], [v_5, v_6]\}$. Множина ребер $\{[i_1, j_2], [i_3, j_2], [i_3, j_4], [i_5, j_4], [i_5, j_6]\}$ утворює збільшуючий шлях $P = (i_1, j_2, i_3, j_4, i_5, j_6)$ щодо паросполучення $M = \{[i_3, j_2], [i_5, j_4]\}$, визначаючи паросполучення $M \oplus P = \{[i_1, j_2], [i_3, j_4], [i_5, j_6]\}$.

Шлях $P = (i_1, j_2, ..., i_{2k-1}, j_{2k})$ у графі D є простим ланцюгом, ізоморфним у графі H ланцюгу $(v_1, v_2, ..., v_{2k})$ при відповідності $(v_s, v_{s+1}) \Leftrightarrow (i_s, j_{s+1})$ $s = 1, 3, ..., 2k-1$, і $[v_{2s}, v_{2s+1}] \Leftrightarrow \Leftrightarrow [j_{2s+1}, j_{2s}]$, $s = 1, 2, ..., k-1$ (рис. 1) [3]. Паросполучення M і шлях P утворюють паросполучення $M \oplus P = \{[i_1, j_2], [i_3, j_4], ..., [i_{2k-1}, j_{2k}]\}$.

Допустимий розв'язок ЗЗП – це максимальне паросполучення зваженого графа H. Пошук максимального паросполучення в H за будь-яким методом завершується при виконанні умови теореми, в наступному формулюванні. Паросполучення M в графі H максимальне тоді і тільки тоді, коли в H не існує збільшуючого шляху щодо M[1]. Збільшуючий шлях щодо паросполучення M графа H називається найкоротшим, якщо його вартість не більше за вартість будь-якого збільшуючого шляху щодо M. Розв'язком ЗЗП є максимальне паросполучення M_{opt} мінімальної вартості в графі H.

Нехай $M_{k-1} = \{[i_1, j_2], [i_3, j_4], ..., [i_{2k-3}, j_{2k-2}]\}$ – паросполучення з найменшою сумою ваг $k-1$ ребер на множині всіх паросполучень потужності $k-1$ в дводольному графі *D*, $k \geq 2$. В графі *H* йому взаємно однозначно відповідає паросполучення $\{[v_1, v_2], [v_3, v_4], \ldots, [v_{2k-3}, v_{2k-2}]\}$. Покладемо $M_{k-1} = \{[i_1,\ j[i_1]],\ [i_2,\ j[i_2]], \ldots, [i_l,\ j[i_l]],\ \ldots, [i_{k-1},\ j[i_{k-1}]]\}$, $i_l \neq j[i_l]$, де i_l – номер вершини множини X, $j[i_l]$ – номер вершини множини Y. В M_{k-1} усі $2k-2$ вершин занумеровані різними числами множини $\{1, 2, \ldots,\ n\}$, $\quad k \le \lfloor n/2 \rfloor$.

Позначимо $M_k^1 = M_{k-1} \cup \{[i_k,\ j[i_k]]\}$ – паросполучення, що містить ребро $[i_k,\ j[i_k]]$ з найменшою вагою серед усіх ребер, які можна приєднати до M_{k-1}, P_k – найкоротший збільшуючий шлях щодо паросполучення M_{k-1}, $M_k^2 = M_{k-1} \oplus P_k$, $C(M_k^1)$ і $C(M_k^2)$ – вартості паросполучень M_k^1 і M_k^2.

Справедливе наступне твердження, доведення якого відрізняється лише позначеннями від доведення твердження в [4].

Лема. Якщо $C(M_k^2) \le C(M_k^1)$, то $C(M_k) = C(M_k^2)$, інакше $C(M_k) = C(M_k^1)$, M_k – паросполучення з мінімальною сумою ваг k ребер в графі D.

Очевидно, для деякого k паросполучення M_k максимальне. Тоді $M_{opt} = M_k$ в графі $H = (V, U)$. Представлений метод розв'язання ЗЗП полягає в покроковому знаходженні в графі H паросполучень M_k, $k = \overline{1, M_{opt}}$, в результаті побудови в дводольному графі D кожного найкоротшого збільшуючого шляху P_k щодо M_k, знаходження паросполучень M_{k+1}^1 і $M_{k+1}^2 = M_k \oplus P_k$ та вибору з них M_{k+1}.

Основна ідея алгоритму. Паросполучення M_1 складається з одного ребра, вага якого дорівнює мінімальному значенню в матриці C. Якщо матриця C містить декілька елементів мінімальної ваги, то $M_1 = \{[i_1,\ j[i_1]]\}$, $c_{i_1 j[i_1]} = \min\{\, c_{ij} \mid i,\ j = \overline{1, n}\}$, i_1 – номер першого за порядком рядка, якому належить $c_{i_1 j[i_1]}$.

У матриці C паросполучення M_2 з мінімальною сумою ваг двох ребер $\tilde{N}(M_2) \neq \infty$ визначається зі співвідношення:

$$\tilde{N}(M_2) = \min\{C(M_2^1),\ C(M_2^2)\}. \tag{1}$$

Паросполучення M_2^1 містить ребро $[i_1,\ j[i_1]]$ вагою $c_{i_1 j[i_1]}$ і ребро $[i_1^1,\ j[i_1^1]]$ мінімальної ваги $c_{i_1^1 j[i_1^1]}$ в підматриці, що отримана видаленням із матриці C рядків і стовпців із номерами i_1, $j[i_1]$ (рис. 2, *а*):

$$c_{i_1^1 j[i_1^1]} = \min\{\, c_{ij} \mid i,\ j \notin \{i_1,\ j[i_1]\}\}.$$

В паросполучення M_2^2 (рис. 2, *а*) входить ребро $[i_1, s]$ вагою

$$c_{i_1 s} = \min\{\, c_{ij} \mid j \neq j[i_1]\}$$

і ребро $[r,\ j[i_1]]$ вагою

$$c_{rj[i_1]} = \min\{\, c_{ij[i_1]} \mid i \neq i_1\}.$$

Коли матриця C містить не менше двох елементів мінімальної ваги, вибір серед них елемента з найменшим номером рядка усуває єдиний випадок втрати оптимального розв'язку M_2. Значення (1) може не досягти мінімуму, якщо:

$$c_{l,l+1} = c_{l+1,l+2} = \min\{c_{ij} \mid i,\ j = \overline{1, n}\},\ 1 \le l \le n-3,$$

$$c_{l+2,l+3} < c_{rs} = \min\{\, c_{ij} \mid i,\ \ j \neq l+1,\ \ l+2\}.$$

Дійсно, при $c_{i_1 j[i_1]} = c_{l+1,l+2}$ паросполучення $M_2' = \{[l+1, l+2], [r, s]\}$ отримає вагу $C(M_2') = \; = c_{l+1,l+2} + c_{r,s}$. Ця вага більша ваги паросполучення $M_2^1 = \{[l, l+1],\ [l+2, l+3]\}$ (рис. 2, *б*).

На рисунку 3, *а* зображено паросполучення M_2^1 в дводольному графі D, на рисунку 3, *б* – підграф графа D, що містить паросполучення $M_2^2 = M_1 \oplus P_1$, де $P_1 = ((r,\ j[i_1]), [i_1,\ j[i_1]], (i_1, s))$ – множина ребер найкоротшого збільшуючого шляху щодо M_1.

	i_1	s	$j[i_1]$	$j[i_1^1]$	
∞					

		$l+1$	$l+2$	$l+3$	
∞	c_{rs}				

i_1		∞	$c_{i_1 s}$	$c_{i_1 j[i_1]}$		
$i_1^1 = s$			∞		$c_{i_1^1 j[i_1^1]}$	
		$c_{j[i_1] i_1}$		∞		
$r = j[i_1^1]$				$c_{rj[i_1]}$	∞	
						∞

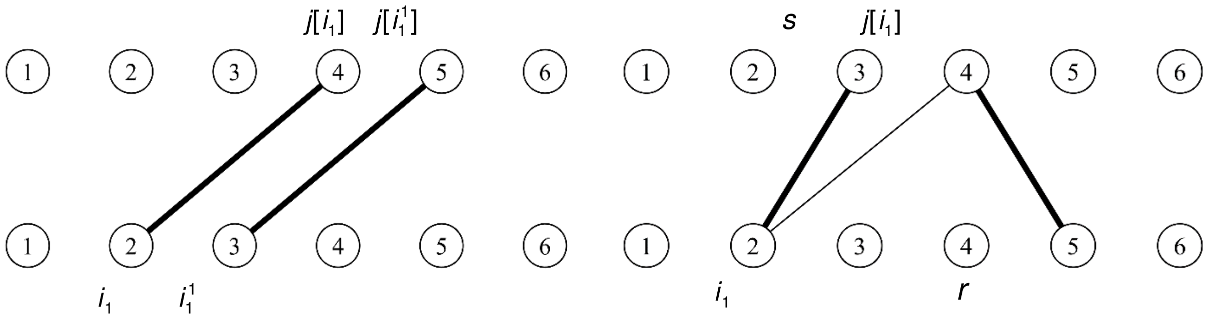
а)

l		∞	$c_{l,l+1}$			
$l+1$			∞	$c_{l+1,l+2}$		
$l+2$				∞	$c_{l+2,l+3}$	
					∞	
						∞

б)

Рис. 2

Таким чином, у дводольному графі D $M_2 = M_2^1$, якщо $C(M_2^1) = c_{i_1 j[i_1]} + c_{i_1^1 j[i_1^1]} <$ $< C(M_2^2) = c_{i_1 s} + c_{rj[i_1]}$ і $M_2 = M_2^2$ інакше.



а) *б)*

Рис. 3

За матрицею C і паросполученням M_2^1, M_2^2 знайдемо паросполучення M_3 з мінімальною сумою ваг трьох ребер $C(M_3)$. Аналогічно (1) представимо:

$$C(M_3) = \min\{C(M_3^1), C(M_3^2)\}.$$

Щоб отримати M_3 і $C(M_3)$, знайдемо :

$$c_{i_2 j[i_2]} = \min\{c_{ij} \mid i, j \notin \{i_1, j[i_1], i_1^1, j[i_1^1]\}\}.$$

Нехай $C(M_2^1) = c_{i_1 j[i_1]} + c_{i_1^1 j[i_1^1]} < C(M_2^2) = c_{i_1 s} + c_{rj[i_1]}$. Тоді для паросполучень $M_3^1 = M_2^1 \cup \{[i_2, j[i_2]]\}$ і $M_3' = M_2^2 \cup \{[i_2, j[i_2]]\}$ справедлива нерівність:

$$C(M_3^1) = C(M_2^1) + c_{i_2 j[i_2]} \le C(M_3') = c_{i_1 s} + c_{rj[i_1]} + c_{i_2 j[i_2]}.$$

Для вибору більш точної верхньої межі $C(M_3')$ вартості $C(M_3)$ оптимального поточного розв'язку M_3, ніж $C(M_3')$, побудуємо найкоротший збільшуючий шлях P_2 щодо M_2^1, знайдемо $M_3^2 = M_2^1 \oplus P_2$ і $C(M_3^2)$. Очевидно, що $M_3 = M_3^1$, якщо $C(M_3^1) < C(M_3^2)$, і $M_3 = M_3^2$ інакше.

Припустимо, що:

$$C(M_2^2) = c_{i_1 s} + c_{rj[i_1]} \le C(M_2^1) = c_{i_1 j[i_1]} + c_{i_1^1 j[i_1^1]}.$$

Оскільки $c_{i_1^1 j[i_1^1]} \le c_{i_2 j[i_2]}$, то вартості паросполучень $M_3^1 = M_2^2 \cup \{[i_1^1, j[i_1^1]]\}$ і $M_3' = M_2^1 \cup \{[i_2, j[i_2]]\}$ задовольняють нерівності:

$$C(M_3^1) < C(M_3').$$

Тому величина $C(M_3^1)$ є більш точною оцінкою зверху $C(M_3)$, ніж $C(M_3')$. Для знаходження M_3 побудуємо найкоротший збільшуючий шлях P_2 щодо M_2^2, визначимо паросполучення $M_3^2 = M_2^2 \oplus P_2$ і його вартість $C(M_3^2)$. Отже, $M_3 = M_3^1$, якщо $C(M_3^1) < C(M_3^2)$, і $M_3 = M_3^2$ інакше.

Викладений спосіб знаходження M_3 і $C(M_3)$ вкладається в схему розв'язання ЗЗП за допомогою рівності:

$$C(M_k) = \min\{C(M_k^1),\quad C(M_k^2)\},\ 2 \le k \le |M_{opt}|. \tag{2}$$

При $k = |M_{opt}|$ хоча б одне зі значень $C(M_k^1)$ або $C(M_k^2)$ сягає $C(M_{opt})$; $M_k = M_{opt}$, якщо при деякому k $C(M_k) \ne \infty$, а при $k+1$ $C(M_{k+1}^1) = C(M_{k+1}^2) = \infty$.

Схема розв'язання задачі. Назвемо вершину $j_l \in Y$ відображенням у графі D початку i_l ребра $[i_l, j[i_l]]$ паросполучення $M_{k-1} = \{[i_1, j[i_1]], [i_2, j[i_2]], ..., [i_l, j[i_l]], ..., [i_{k-1}, j[i_{k-1}]]\}$ і позначимо її j_l'. Вершину $i_m \in X$ назвемо відображенням кінця $j[i_l]$ цього ребра і позначимо її i_m'.

Нехай $I_{k-1} = \{i_l \mid l = \overline{1, k-1}\}$, $J_{k-1} = \{j[i_l] \mid l = \overline{1, k-1}\}$ – множини вершин паросполучення M_{k-1}, а I_{k-1}', J_{k-1}' – множини їх відображень, $I_{k-1}, I_{k-1}' \subset X$, $J_{k-1}, J_{k-1}' \subset Y$. Побудова M_{opt} починається зі знаходження $M_1 = \{[i_1, j[i_1]]\}$ і видалення ребер, що інцидентні відображенням j_1' і i_1' вершин i_1 і $j[i_1]$ відповідно. В матриці C видалені ребра приймають вагу, що дорівнює ∞.

Щоб із (2) визначити M_k, спочатку знаходиться $M_k^1 = M_{k-1} \cup \{[i_k, j[i_k]]\}$, де:

$$c_{i_k j[i_k]} = \min\{c_{ij} \mid i \notin I_{k-1} \cup I_{k-1}',\ j \notin J_{k-1} \cup J_{k-1}'\}. \tag{3}$$

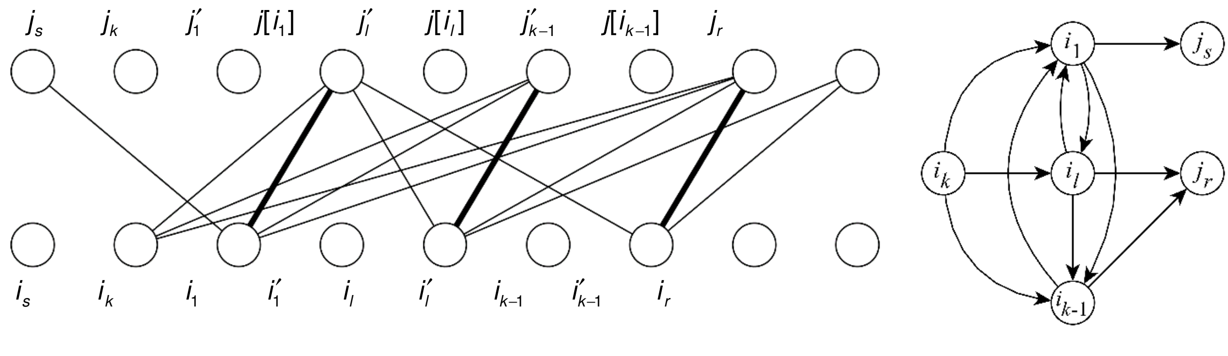
В підграфі графа D видаляються ребра, що інцидентні відображенням j_k', i_k' вершин i_k і $j[i_k]$ відповідно. Кожне ребро, що видаляється, отримує в матриці C вагу, що рдоівнює ∞.

Щоб знайти M_k^2, для кожної вершини $i_k \notin I_{k-1} \cup I_{k-1}'$ формується підграф $D_{i_k} = (X_{i_k}, Y_{i_k}, E_{i_k})$ графа D. Він містить підмножину $E_{i_k}^1$ вільних ребер $(i_k, j[i_l])$ $l \in \{1, 2, ..., k-1\}$, підмножину $E_{i_k}^2$ всіх ребер, що з'єднують вершини множини I_{k-1} з вершинами множини J_{k-1}, і підмножину $E_{i_k}^3$ вільних ребер (i_l, j_s), $j_s \ne j_k$, $j_s \in \{Y - \{J_{k-1} \cup J_{k-1}' - \{j_k\}\}, l \in \{1, 2, ..., k-1\}\}$, з вагами:

$$c_{i_l j_s} = \min\{c_{i_l j} \mid j \in Y - \{J_{k-1} \cup J_{k-1}'\} - \{j_k\}\}, \tag{4}$$

що утворюють множину вершин $Y_{i_k}^1$. Отже, підграф $D_{i_k} = (X_{i_k}, Y_{i_k}, E_{i_k})$ складається з множин вершин $X_{i_k} = \{i_k\} \cup I_{k-1}$, $Y_{i_k} = Y_{i_k}^1 \cup J_{k-1}$ і множини ребер $E_{i_k}^1 \cup E_{i_k}^2 \cup E_{i_k}^3$.

Підграф D_{i_k} представлений на рисунку 4, *а*. Вільні ребра $(i_k, j[i_1])$, $(i_k, j[i_l])$, $(i_k, j[i_{k-1}])$ утворюють підмножину $E_{i_k}^1$. Ребра $(i_1, j[i_l])$, $(i_1, j[i_{k-1}])$, $(i_l, j[i_1])$, $(i_l, j[i_{k-1}])$, $(i_{k-1}, j[i_1])$ і всі ребра паросполучення M_{k-1} входять у підмножин $E_{i_k}^2$. Підмножина $E_{i_k}^3$ містить ребра (i_1, j_s), (i_l, j_r), (i_{k-1}, j_r). В підграфі $D_{i_k} = (X_{i_k}, Y_{i_k}, E_{i_k})$ $X_{i_k} = \{i_k, i_1, i_l, i_{k-1}\}$, $Y_{i_k}^1 = \{j_s, j_r\}$, $Y_{i_k} = Y_{i_k}^1 \cup \{j[i_1], j[i_l], j[i_{k-1}]\}$.



а) *б)*

Рис. 4

Підграф D_{i_k} будується для знаходження в ньому шляху P_{i_k}, найкоротшого серед усіх збільшуючих шляхів щодо паросполучення M_{k-1}. Цей шлях повинен починатися у вершині i_k і закінчуватися в деякій вершині $j_s \in Y_{i_k}^1$, $j_s \ne j_k$. Якщо існує шлях P_{i_k}, то, згідно з лемою, $M_{i_k} = P_{i_k} \oplus M_{k-1}$ – паросполучення, що доставляє мінімальну суму ваг k ребер в підграфі D_{i_k}. В початковому графі H йому відповідає паросполучення тієї самої потужності і з такими самими вагами ребер, що і в D_{i_k}. Побудова підграфа D_{i_k} і пошук у ньому шляху P_{i_k} повторюється для кожної вершини $i_k \in X - \{I_{k-1} \cup I'_{k-1}\}$ і завершується вибором паросполучення M_k^2 вартістю

$$C(M_k^2) = \min\{C(M_{i_k}^2) \mid i_k \notin \{I_{k-1} \cup I'_{k-1}\}. \qquad (5)$$

Пошук шляху P_{i_k} спрощується в допоміжному орграфі, отриманому в результаті перетворення D_{i_k}. Орграф (Z_{i_k}, A_{i_k}) складається з множини вершин $Z_{i_k} = \{i_k\} \cup I_{k-1} \cup Y_{i_k}^1$ і множини дуг $A_{i_k} = A_{i_k}^1 \cup A_{i_k}^2 \cup A_{i_k}^3$. До підмножини $A_{i_k}^1$ належить дуга (i_k, i_l), $i_k \in X - \{I_{k-1} \cup I'_{k-1}\}$, $i_l \in I_{k-1}$, тоді і тільки тоді, коли вершина $j[i_l]$ ребра $(i_k, j[i_l])$ є напарником вершини i_l. Дузі (i_k, i_l) присвоюється вага $c(i_k, i_l) = c_{i_k j[i_l]} + c_{i_l j[i_l]}$. Дуга (i_d, i_l), $i_d, i_l \in I_{k-1}$, належить до $A_{i_k}^2$, якщо і тільки якщо вершина $j[i_l]$ ребра $(i_d, j[i_l])$ є напарником вершини i_l. Дуга (i_d, i_l) отримує вагу $c(i_d, i_l) = c_{i_d j[i_l]} + c_{i_l j[i_l]}$. Підмножина A_{i_3} містить усі дуги (i_l, j_s), $i_l \in I_{k-1}$, $j_s \in Y_{i_k}^1$, якщо вершини i_l та j_s з'єднані ребром у D_{i_k}. Дуга (i_l, j_s) має вагу $c(i_l, j_s) = c_{i_l j_s}$ (рис. 4, *б*). Нескладно переконатися, що при невід'ємних вагах ребер графа D шлях P_{i_k} – найкоротший шлях серед усіх простих шляхів із вершини i_k у вершини множини $Y_{i_k}^1$ орграфа (Z_{i_k}, A_{i_k}). Пошук P_{i_k} виконується за алгоритмом Дейкстри.

Позначимо $\langle D_k \rangle$ підграф дводольного графа (X, Y, E), породжений множинами вершин $I_k = \{i_l \mid l = \overline{1,k}\}$ і $J_k = \{j[i_l] \mid l = \overline{1,k}\}$ паросполучення $M_k = \{[i_l, j[i_l]] \mid l = \overline{1,k}\}$.

Опис алгоритму. Алгоритм розв'язання ЗЗП складається з наступних кроків.

S0. Алгоритм знаходження в зваженому графі $H = (V, U)$ максимального паросполучення M_{opt} з мінімальною сумою ваг його ребер. $C = [c_{ij}]_n$ – симетрична матриця ваг ребер графа H, в якій $c_{ij} = c_{ji} \in R_0^+$, якщо $\{i, j\} \in U$, $i \neq j$, і $c_{ij} = c_{ji} = \infty$ інакше, R_0^+ – множина невід'ємних дійсних чисел. Розв'язання M_{opt} взаємно однозначно відповідає максимальному паросполученню $M_k = \{[i_l, j[i_l]] \mid i_l \neq j[i_l],\ l = \overline{1,k}\}$ дводольного зваженого графа (X, Y, E), $|X| = |Y| = |V|$, $E = 2|U|$, $i_l \in X$, $j[i_l] \in Y$, побудованого для матриці C.

У матриці C знайти $c_{i_1 j[i_1]} = \min\{c_{ij} \mid i, j = \overline{1,n}\}$, i_1 – номер першого за порядком рядка, що містить мінімальний елемент; $M_1 = \{[i_1, j[i_1]]\}$, $I_1 = \{i_1\}$, $J_1 = \{j[i_1]\}$, $I'_1 = \{j[i_1]\} \subset X$, $J'_1 = \{i_1\} \subset Y$, видалити всі ребра, інцидентні вершинам $j[i_1] \in I'_1$, $i_1 \in J'_1$; D_1 – підграф, що містить ребро $[i_1\ j[i_1]]$, $\langle D_1 \rangle = D_1$, $k = 1$.

S1. $k = k + 1$; якщо $k > \lfloor n/2 \rfloor$, то $M_{opt} = M_{k-1}$.

S2. Знайти $c_{i_k j[i_k]}$ за (3); якщо $c_{i_k j[i_k]} = \infty$, то кінець: $M_{opt} = M_{k-1}$; $M_k^1 = M_{k-1} \cup \ \cup\{[i_k, j[i_k]]\}$, обчислити $C(M_k^1)$.

S3. Для кожної вершини $i_k \in X - \{I_{k-1} \cup I'_{k-1}\}$ побудувати підграф D_{i_k} і після перетворення його в допоміжний орграф (Z_{i_k}, A_{i_k}) знайти шлях P_{i_k}, найкоротший зі шляхів, що з'єднують вершину i_k з вершинами $j_s \in Y - \{J_{k-1} \cup J'_{k-1}\} - \{j_k\}$. Кожна вершина j_s є кінцем ребра $(i_l, j_s), i_l \in I_{k-1}$, $l \in \{1,2,..., k-1\}$ вагою $c_{i_l j_s}$, що дорівнює (4). Визначити $M_{i_k}^2 = P_{i_k} \oplus M_{k-1}$ і $C(M_{i_k}^2)$. Якщо в графі D_{i_k} не існує шляху P_{i_k}, то покласти $M_{i_k}^2 = \infty$. Із (5) знайти M_k^2 і $C(M_k^2)$; якщо для всіх i_k $C(M_{i_k}^2) = \infty$, то $C(M_k^2) = \infty$, $M_k^2 = \varnothing$.

S4. Якщо $C(M_k^1) = C(M_k^2) = \infty$, то кінець: $M_{opt} = M_{k-1}$, інакше якщо $C(M_k^1) < C(M_k^2)$, то $M_k = M_k^1$, $I_k = I_{k-1} \cup \{i_k\}, J_k = J_{k-1} \cup \{j[i_k]\}$, $I'_k = I'_{k-1} \cup \{i'_k\}, J'_k = J'_{k-1} \cup \{j'_k\}$, де вершини $i'_k \in X$ і $j'_k \in Y$ — відображення відповідно кінця $j[i_k]$ і початку i_k ребра $[i_k, j[i_k]]$; видалити ребра, інцидентні вершинам i'_k і j'_k, сформувати підграф $\langle D_k \rangle$, породжений множиною вершин $I_k \cup J_k$, і перейти до кроку S1, інакше $M_k = M_k^2$, визначити I_k, J_k, I'_k, J'_k, видалити всі ребра, інцидентні вершинам множини $I'_k \cup J'_k$, і сформувати підграф $\langle D_k \rangle$, породжений множиною вершин $I_k \cup J'_k$, перейти до кроку S1.

Алгоритм представлений послідовністю ітерацій. Перша ітерація алгоритму завершується на кроці S0 знаходженням мінімального елемента в C, що утворює паросполучення M_1. Кожна наступна ітерація містить кроки S2–S4 для побудови паросполучення M_k, $k = \overline{2, |M_{opt}|}$ із мінімальною сумою (M_k) ваг k ребер.

Теорема. Після впорядкування за незменшенням значень елементів, розташованих над головною діагоналлю матриці вартостей $C = [c_{ij}]_n$ графа H, ЗЗП коректно розв'язується за час $O(n^3)$.

Доведення. Згідно з лемою, потрібно спочатку показати, що $M_k = M_k^2$, якщо $C(M_k^2) \le \le C(M_k^1)$. Дійсно, для кожної вільної вершини i_k алгоритм будує підграф D_{i_k}, який містить множину всіх збільшуючих з i_k шляхів щодо паросполучення M_{k-1}, $k = \overline{2, |M_{opt}|}$, обирає серед них найкоротший шлях P_{i_k} і визначає $M_{i_k}^2$ і $C(M_{i_k}^2)$. Коректність однократного звернення до i_k слідує з наведеного в [1] доказу того, що якщо в графі не існує збільшуючого шляху з вільної вершини, то збільшуючого шляху з цієї вершини не існує на всіх наступних етапах побудови паросполучення.

Алгоритм закінчує роботу на k-ій ітерації. Якщо $k = \lfloor n/2 \rfloor$, то побудоване паросполучення M_k максимальне. В іншому випадку не існує шляху з кожної вільної вершини i_k у відповідному їй орграфі (Z_{i_k}, A_{i_k}) а в D не існує збільшуючих шляхів щодо поточного паросполучення M_{k-1}. Звідси витікає, що M_{k-1} максимальне [1].

Розв'язок M_{opt} ЗЗП визначається із матриці C, що відповідає як дводольному, так і довільному графам $D = (X, Y, E)$ і $H = (V, U)$.

Оцінимо зверху час роботи алгоритму. Він максимальний, коли n-вершинний граф H повний і, отже, $|M_{opt}| = \lfloor n/2 \rfloor$.

Якщо впорядкувати за незменшенням значення елементів, розташованих над головною діагоналлю матриці C, то для виконання кроку S0, який визначає $c_{i_1 j[i_1]}$, потрібен час $O((n(n-1)/2)\log_2(n(n-1)/2))$.

Найбільша кількість операцій порівняння на кроці S2 k-ої ітерації, $k = \overline{2, \lfloor n/2 \rfloor}$, що дорівнює $2(n-2(k-1))$, досягається на матриці C, в якій $c_{12} = c_{i_1 j[i_1]}$, $c_{34} = c_{i_2 j[i_2]}$, …, $c_{2k-1,2k} = c_{i_k j[i_k]}$. Щоб визначити $\lfloor n/2 \rfloor - 1$ елементів матриці C, утворюючих разом з елементом $[i_1, j[i_1]]$ паросполучення M_k^1, $k = \lfloor n/2 \rfloor$, необхідно виконати $t_1 = 2(n-2) + 2(n-4) + \ldots + 2(n-2(\lfloor n/2 \rfloor - 1))$ порівнянь. Отже $t_1 = O(n^2)$.

Побудова графа D_{i_k} на кроці S3 при $k = 2$ потребує $n-4$ порівнянь для знаходження (4) і одну операцію додавання для обчислення $C(M_{i_k}^2)$. На цьому кроці при $k = 2$ потрібно побудувати $n-2$ графів D_{i_k}, обчислити $n-2$ відповідних їм значень $C(M_{i_k}^2)$ і знайти (5). Тому $C(M_2^2)$ визначається в результаті виконання $(n-3)(n-2) + n - 3 = (n-2)^2 - 1$ операцій. Для знаходження (1) на кроці S4 потрібно одне порівняння. Таким чином, обчислення $C(M_2)$ і побудова виконуються за час $t_2 = O(n^2)$.

Для $k = \overline{3, \lfloor n/2 \rfloor}$ на кроці S3 потрібно побудувати $n - 2(k-1)$ графів D_{i_k}. Граф D_{i_k} будується в результаті виконання $n - 2(k-1) - 2$ порівнянь по знаходженню (4) для кожної з $k-1$ його вершин $i_l \in I_{k-1}$. Крім того, на кроці S3 він за час $c_1(k-1)$ перетворюється в орграф (Z_{i_k}, A_{i_k}), в якому з трудомісткістю $c_2(k-1)^2$ знаходиться шлях P_{i_k}, його довжина $C(P_{i_k})$ і паросполучення $M_{i_k}^2$ вартістю $C(M_{i_k}^2)$, $c_1, c_2 < k-1$. Щоб обрати M_k, достатньо $n - 2(k-1) - 1$ порівнянь для знаходження $C(M_k^2)$ та однієї операції порівняння $C(M_k^1)$ і $C(M_k^2)$, яка виконується на кроці S4. Крок S4 завершується формуванням графа $\langle D_k \rangle$ за час $c_3k,\ c_3 < k$.

Визначимо кількість операцій t_{k1}, що виконуються на кроці S3, і кількість операцій t_{k2}, що виконуються на кроці S4, для $k = \overline{3, \lfloor n/2 \rfloor}$.

$$t_{k1} = [n - 2(k-1)][(k-1)(n-2k) + c_1(k-1)] + n - 2(k-1) + c_3k,$$

$$t_{k2} = [n - 2(k-1)]c_2(k-1)^2.$$

Оскільки для будь-якого n і $k = \overline{3, \lfloor n/2 \rfloor}$

$$[n - 2(k-1)][(k-1)(n-2k) \le n^2,$$

$$[n - 2(k-1)]c_1(k-1) \le [n - 2(k-1)](k-1)^2 \le n^2,$$

$$n - 2(k-1) + c_3k \le n - 2(k-1) + k^2 = c_{k1}n,\ c_{k1} < n,$$

$$[n - 2(k-1)]c_2(k-1)^2 \le [n - 2(k-1)](k-1)^3 = c_{k2}n^2,\ c_{k2} < n,$$

то $t_{k1} \le 2n^2 + c_{k1}n = O(n^2),\ t_{k2} = O(n^2)$.

Трудомісткість виконання $\lfloor n/2 \rfloor - 1$ ітерацій, починаючи з другої, оцінюється кількістю елементарних дій, рівних сумі з $2\lfloor n/2 \rfloor$ доданків,

$$t = t_1 + t_2 + \sum_{k=3}^{\lfloor n/2 \rfloor}(t_{k1} + t_{k2}),$$

в якій кожен доданок обмежений поліномом другої степені. Тому $t = O(n^3)$.

Приклад. Для демонстрації роботи алгоритму вибраний приклад ЗЗП із [1] з матрицею вартостей повного графа

$C =$

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	∞	19	8	8	18	18	25	29
2	19	∞	0	8	10	4	15	18
3	8	0	∞	4	8	2	15	18
4	8	8	4	∞	2	10	15	16
5	18	10	8	2	∞	10	22	25
6	18	4	2	10	10	∞	19	19
7	25	15	15	15	22	19	∞	37
8	29	18	18	16	25	19	37	∞

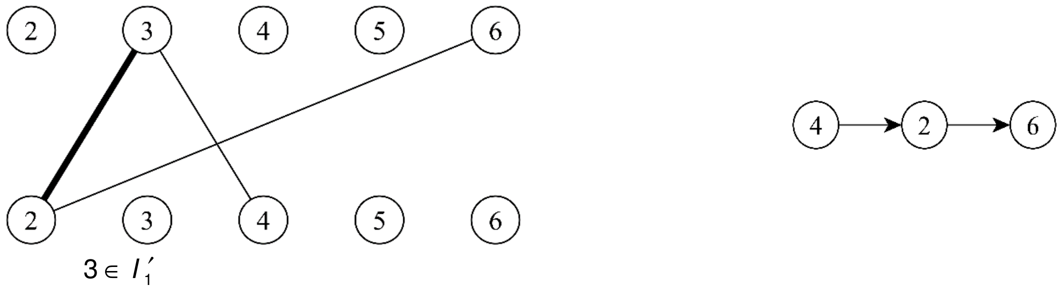
S0. $c_{23} = \min\{c_{ij} \mid i, j = \overline{1, 8}\} = 0,\ M_1 = \{[2,3]\},\ I_1 = \{2\},\ J_1 = \{3\},\ I_1' = \{3\},\ J_1' = \{2\},\ C(M_1) = = c_{23} = 0$. В графі D видаляються ребра, що інцидентні вершинам $3 \in I_1'$ і $2 \in J_1'$, що утворюють підграф.

S1. $k = 2$.

S2. $c_{45} = \min\{c_{ij} \mid i, j \ne 2, 3\} = 2,\ M_2^1 = M_1 \cup \{[4,5]\} = \{[2,3], [4,5]\},\ C(M_2^1) = 2$.

S3. Для вершин 1, 4, 5, 6, 7, 8, що утворюють множину $X - (I_1 \cup I_1')$, будують підграфи $D_1, D_4, D_5, D_6, D_7, D_8$ і відповідні їм орграфи, в яких виконується пошук найкоротших збільшуючих шляхів $P_1, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8$ щодо паросполучення M_1. Для кожного шляху P_i, $i \in X - (I_1 \cup I_1')$, якщо він існує, визначається паросполучення M_i^2 і його вартість $C(M_i^2)$. На рисунку 5, *а* зображено підграф D_4, на рисунку 5, *б* – допоміжний орграф (Z_4, A_4). Єдине ребро $(2,6)$ в D_4 утворює підмножину вільних ребер E_4^3. Його вага $c_{26} = 4$ визначається із (4), $Y_4^1 = \{6\}$. Множина ребер $\{(4,3), [2,3], (2,6)\}$ шляху $P_4 = (4,2,6) \in (Z_4, A_4)$ і паросполучення $M_1 = \{[2,3]\}$ утворюють паросполучення $M_4^2 = \{[4,3], [2,6]\}$ вартістю $C(M_4^2)$, отриманою з (5). Таким чином, $M_2^2 = M_4^2,\ C(M_2^2) = c_{43} + c_{16} = 4 + 4 = 8$.

$2 \in J_1'$

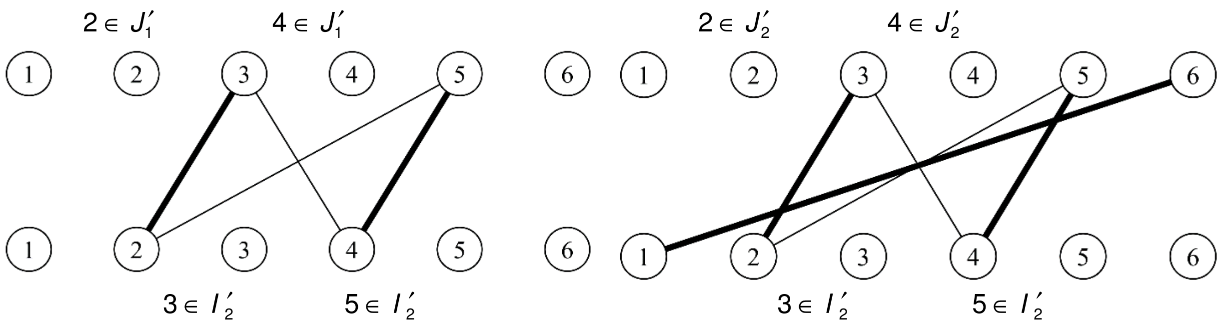


а) *б)*

Рис. 5

S4. Оскільки $M_2^1 < M_2^2$, до підграфа D_1 додається ребро $[4,5]$, $I_2 = \{2,4\}$, $J_2 = \{3,5\}$, $I_2' = \{3,5\}$, $J_2' = \{2,4\}$, видаляються ребра, інцидентні вершинам $5 \in I_2'$, $4 \in J_2'$. В результаті побудований підграф $\langle D_2 \rangle$, породжений множиною вершин I_2 і J_2 (рис. 6, *а*).

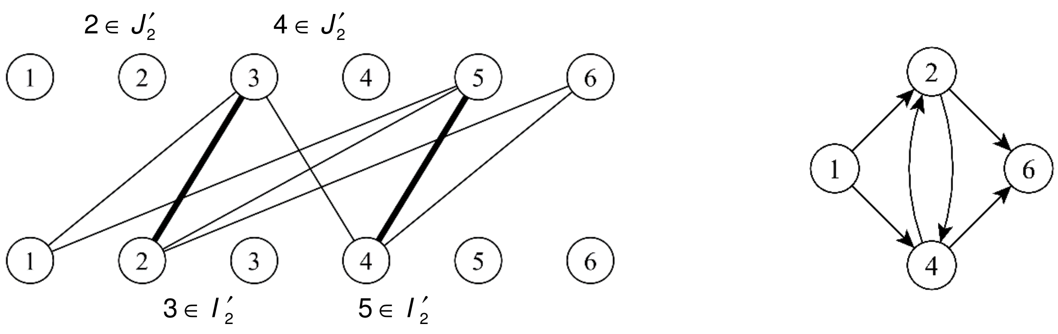
$k = 3$. По формулі (2) знаходиться $c_{16} = \min\{c_{ij} \mid i,\ j \neq 2,\ 3,\ 4,\ 5\} = 18$, $M_3^1 = M_2 \cup \{[1,6]\}$, $C(M_3^1) = c_{23} + c_{45} + c_{16} = 0 + 2 + 18 = 20$ (рис. 6, *б*).



а) *б)*

Рис. 6

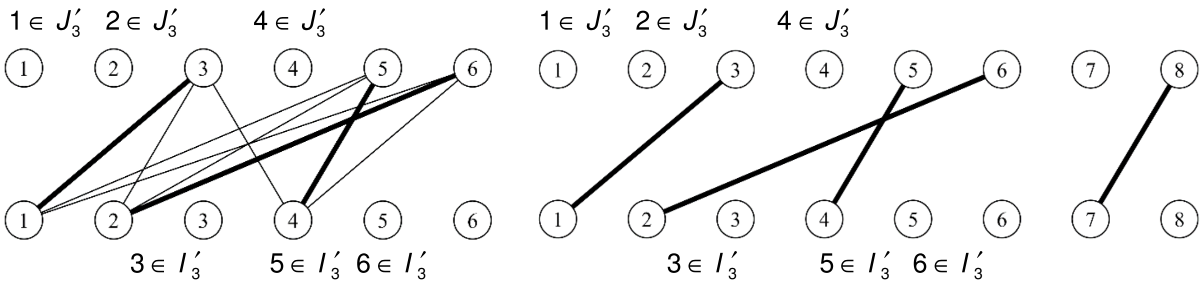
Щоб визначити M_3^2, для вершин $i_k \in X - (I_3 \cup I_3') = \{1,6,7,8\}$ формуються підграфи $D_{i_k}, \langle D_2 \rangle \subset D_{i_k}$, в яких за допомогою орграфів (Z_{i_k}, A_{i_k}) знаходяться найкоротші збільшуючі шляхи P_{i_k} щодо паросполучення M_2, паросполучення $M_{i_k}^2$ і їх вартості $C(M_{i_k}^2)$. Підграф D_1 (рис. 7,а) містить найкоротший збільшуючий шлях щодо M_2, , який відповідає шляху $P_1 = (1,2,6)$ в орграфі (Z_1, A_1) (рис. 7, *б*) і доставляє вартість паросполучення M_1^2, не більшу за вартості паросполучень M_6^2, M_7^2, M_8^2. Оскільки $P_1 = \{(1,3),[2,3],(2,6)\}$, $M_2 = \{[2,3],\ [4,5]\}$, то $M_1^2 = \{[1,3],[4,5],[2,6]\}$, $C(M_1^2) = c_{13} + c_{45} + c_{26} = 8 + 2 + 4 = 14$, $C(M_3^2) = C(M_1^3)$.



а) *б)*

Рис. 7

У цьому випадку $C(M_3^2) < C(M_1^3)$, $M_3 = M_3^2$, $I_3 = \{1, 4, 2\}$, $J_3 = \{3, 5, 6\}$, $I_3' = \{3, 5, 6\}$, $J_3' = \{1, 4, 2\}$. Видаляються ребра, що інцидентні вершинам множини I_3' і J_3'. На рисунку 8, *а* зображено підграф $\langle D_3 \rangle$, породжений множиною вершин I_3 і J_3.



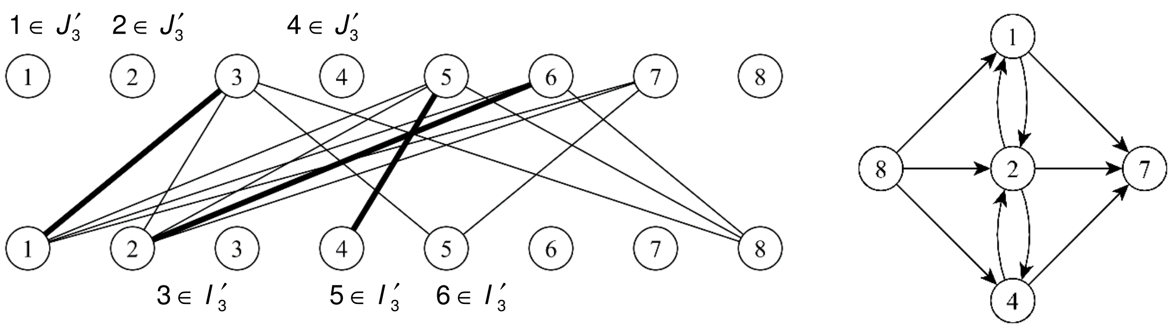
а) *б)*

Рис. 8

$k = 4$. Тут $c_{78} = \min\{c_{ij} \mid i, j \neq 1, 2, 3, 4, 5, 6\} = 37$, $M_4^1 = \{[1, 3], [2, 6], [4, 5], [7, 8]\}$, $C(M_4^1) =$ $= 3 + 4 + 2 + 37 = 51$ (рис. 8, *б*).

Знаходження паросполучення M_3^2 розпочинається з побудови для вершин множини $X - (I_3 \cup I_3') = \{7, 8\}$ підграфів D_7, D_8 і відповідних їм орграфів (Z_7, A_7), (Z_8, A_8). На рисунку 9, *а* зображено підграф D_8, а на рисунку 9, *б* – орграф (Z_8, A_8).

Шлях $P_8 = (8, 2, 7)$ в орграфі (Z_8, A_8) є найкоротшим. У підграфі D_8 він представлений як найкоротший збільшуючий шлях $P_8 = ((8, 6), [2, 6], (2, 7))$ щодо паросполучення M_3. З $M_8^2 = P_8 \oplus M_3 = \{[1, 3], [2, 7], [4, 5], [8, 6]\}$ отримаємо, що $C(M_8^2) = c_{13} + c_{27} + c_{45} + c_{86} = 8 + 15 + {} + 2 + 19 = 44$. Після знаходження в графі D_7 шляху P_7, паросполучення M_7^2 та його вартості $C(M_7^2)$ виявляється, що $C(M_7^2) > C(M_8^2) = 44$. Звідси слідує, що $M_4^2 = M_8^2$, а оскільки $C(M_4^2) < C(M_4^1)$, то $M_4 = M_8^2$. Оскільки $k = \lfloor n/2 \rfloor = 4$, паросполучення $M_4 = \{[1, 3], [2, 7], [4, 5], [8, 6]\}$ максимальне і, отже, є розв'язком ЗЗП.



а) *б)*

Рис. 9

Висновки. У даній роботі запропонований метод розв’язання поставленої ЗЗП, який коректно виконує дії з побудови шуканого паросполучення в дводольному графі, що відповідає графу H. Тому він не містить непростих операцій знаходження і зрізання квіток, які використовуються в алгоритмі Едмондса та його модифікаціях.

Список використаної літератури:

1. *Пападимитриу Х.* Комбинаторная оптимизация : Алгоритмы и сложность / *Х.Пападимитриу, К.Стайглиц.* – М. : Мир, 1985. – 510 с.
2. *Ловас Л.* Прикладные задачи теории графов. Теория паросочетаний в математике, физике, химии / *Л.Ловас, М.Пламмер.* – М. : Мир, 1998. – 653 с.
3. *Харари Ф.* Теория графов / *Ф.Харари.* – М. : Мир, 1973. – 300 с.
4. *Маций О.Б.* Быстрый алгоритм нахождения 2-фактора минимального веса / *О.Б. Маций, А.В. Морозов, А.В. Панишев* // Кибернетика и системный анализ. – 2015. – Т. 52, № 4. – С. 119–127.
5. *Касьянов В.Н.* Графы в программировании: обработка, визуализация и применение / *В.Н. Касьянов, В.А. Евстигнеев.* – С-Пб. : БХВ-Петербург, 2003. – 1104 с.
6. *Кристофидес Н.* Теория графов. Алгоритмический подход / *Н.Кристофидес.* – М. : Мир, 1978. – 432 с.
7. *Майника Э.* Алгоритмы оптимизации на сетях и графах / *Э.Майника.* – М. : Мир, 1981. – 323 с.
8. *Нечипуренко М.И.* Алгоритмы и программы решения задач на графах и сетях / *М.И. Нечипуренко, В.К. Попков, С.М. Маймагалиев* и др. – Новосибирск : Наука, Сиб. отд-ние, 1990. – 515 с.
9. *Свами Т.* Графы, сети, алгоритмы / *Т.Свами, К.Тхуласараман.* – М. : Мир, 1984. – 454 с.
10. *Саати Т.* Целочисленные методы оптимизации и связанные с ними экстремальные проблемы / *Т.Саати.* – М. : Мир, 1973. – 330 с.

КУШНІР Надія Олександрівна – аспірантка кафедри програмного забезпечення систем Житомирського державного технологічного університету.

Наукові інтереси:

– дискретна та комбінаторна оптимізація.

Тел.: (099)7775720.

МАЦІЙ Ольга Борисівна – аспірантка Харківського національного автомобільно-дорожнього університету.

Наукові інтереси:

– обчислювальні методи;

– математичне моделювання.

Тел.: (066)8211295.

СКАЧКОВ Володимир Олександрович – старший викладач кафедри програмного забезпечення систем Житомирського державного технологічного університету.

Наукові інтереси:

– дискретна та комбінаторна оптимізація;

– штучний інтелект.

Тел.: (067)1194478.

Стаття надійшла до редакції 06.11.2015.