МОДЕЛЮВАННЯ ТА АВТОМАТИЗОВАНЕ ПРОЕКТУВАННЯ РАДІОЕЛЕКТРОННИХ ПРИЛАДІВ І СИСТЕМ

УДК 621.372.061

В.Л. Баранов, д.т.н., проф.
Р.М. Костюченко, к.т.н., проф.
К.В. Молодецька, аспір.
Житомирський військовий інститут ім. С.П. Корольова
Національного авіаційного університету

МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛОВОГО ПОЛЯ СТРИЖНЯ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ СИСТЕМИ ПРЯМИХ І ЗВОРОТНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ СПЕКТРІВ

Наведено приклад моделювання теплового поля стрижня на основі системи прямих і зворотних диференціальних спектрів та виконано оцінку похибки моделювання.

Вступ. Постановка проблеми. Моделювання фізичних процесів і полів пов'язане з розв'язанням рівнянь з частинними похідними з початковими та граничними умовами. Відомо, що чисельні методи розв'язання крайових задач потребують виконання значного об'єму обчислень на ЕОМ [1–3]. У випадку використання математичних моделей фізичних процесів і полів з метою управління об'єктами з розподіленими параметрами виникає необхідність моделювання в реальному та прискореному часі для контролю за динамікою зміни фізичного процесу. Для швидкоплинних фізичних процесів вимога моделювання в реальному часі може бути виконана шляхом зниження об'єму обчислень методами аналітичного та чисельно-аналітичного моделювання на ЕОМ. У даний час аналітичні й чисельно-аналітичні методи розв'язання нелінійних крайових задач недостатньо розвинені та вимагають подальших досліджень.

Аналіз останніх досліджень і публікацій [1–9] показав, що аналітичні й чисельно-аналітичні методи розв'язання крайових задач ґрунтуються на інтегральних і диференціальних перетвореннях математичних моделей фізичних процесів і полів. Застосування різних методів інтегральних перетворень обмежується в основному дослідженням лінійних математичних моделей [9]. Моделювання нелінійних фізичних процесів може бути виконано в аналітичному або чисельно-аналітичному вигляді на основі використання одновимірних диференціальних перетворень [4–8]. Недолік цих методів полягає в залежності складності аналітичного опису фізичного процесу в області зображень від похибки моделювання фізичного процесу в області оригіналів. Математична модель фізичного процесу в області диференціальних перетворень має вигляд диференціального спектра, від кількості дискрет якого безпосередньо залежить похибка моделювання фізичного процесу в області оригіналів [4–8]. Складність аналітичного опису дискрет диференціального спектра зростає зі збільшенням номера дискрети. Тому моделювання фізичних процесів в аналітичному вигляді виконують з використанням декількох початкових дискрет диференціального спектра, а це обмежує точність моделювання нелінійних фізичних процесів в області оригіналів. У зв'язку з цим виникає проблема зниження похибки моделювання фізичних процесів і полів у випадку використання обмеженої кількості дискрет диференціального спектра. Пропонується підвищити точність моделювання фізичних процесів і полів шляхом використання системи прямих і зворотних диференціальних спектрів з обмеженою кількістю дискрет.

Мета статті полягає в застосуванні системи прямих і зворотних диференціальних спектрів для моделювання теплового поля стрижня діаметром d і зниження похибки моделювання, порівняно з точним розв'язком задачі.

Основна частина. Розглянемо задачу моделювання теплового поля стрижня діаметром d [9]. Вона зводиться до розв'язку крайової задачі:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},\ 0 \le x \le d, \tag{1}$$

де a – коефіцієнт температуропровідності; u – температура стрижня,
при початкових:

$$u(x,0) = 0 \tag{2}$$

і граничних умовах:

$$u(d,t) = u_0,\ \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0. \tag{3}$$

Відомий точний аналітичний розв'язок задачі (1)–(3):

$$u(x,t) = u_0 + \frac{4u_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \exp\left(-a^2 \lambda_2^n t\right) \cos \lambda_n x, \tag{4}$$

де $\lambda_n = (2n-1)\pi(2d)^{-1}$.

Переведемо теплове рівняння (1) в область зображень згідно з диференціальними перетвореннями (5), (6) [7]:

$$U(q,t) = \frac{H_x^q}{q!}\left[\frac{\partial^q u(x,t)}{\partial t^q}\right]_{x=0}, \; u(x,t) = \sum_{q=0}^{\infty}\left(\frac{x}{H_x}\right)^q U(q,t) \text{ при } x \in \left[0; \frac{d}{2}\right], \tag{5}$$

$$\overline{U}(q,t) = \frac{\overline{H}_x^q}{q!}\left[\frac{\partial^q u(x,t)}{\partial t^q}\right]_{x=\overline{H}_x=d}, \; \overline{u}(x,t) = \sum_{q=0}^{\infty}\left(\frac{x}{\overline{H}_x}\right)^q \overline{U}(q,t) \text{ при } \overline{x} \in \left[\frac{d}{2}; d\right], \tag{6}$$

де q – цілочисельний аргумент, що набуває значень 0, 1, 2, …, ∞; $H_x = \overline{H}_x$ – довільна додатна стала; $U(q,t)$, $\overline{U}(q,t)$ – диференціальні зображення функції $u(x,t)$.

Отримаємо рекурентний вираз (1) в області зображень для $x \in \left[0; \frac{d}{2}\right]$ згідно з (5):

$$U(q+2,t) = \frac{H_x^2}{a^2(q+1)(q+2)}\frac{dU(q,t)}{dt}. \tag{7}$$

Побудуємо диференціальний спектр (7), використовуючи граничну умову (3):

$$U(0,t) = \varphi(t),\; U(1,t) = 0,\; U(2,t) = \frac{H_x^2}{2a^2}\dot{\varphi}(x),\; U(4,t) = \frac{H_x^4}{4!\,a^4}\ddot{\varphi}(t), \tag{8}$$

де $\varphi(t)$ – невідома функція аргументу t і введено позначення $\ddot{\varphi}(t) = \frac{d^2\varphi(t)}{dt^2}$.

Для знаходження функції $\varphi(t)$ граничну умову (3) запишемо у вигляді суми дискрет диференціального спектра:

$$u(d,t) = \sum_{q=0}^{\infty} U(q,t)\Big|_{H_x=d} = \varphi(t) + \frac{d^2}{2a^2}\dot{\varphi}(t) + \frac{d^4}{4!\,a^4}\ddot{\varphi}(t) = u_0. \tag{9}$$

Загальний розв’язок лінійного диференціального рівняння другого порядку (9) має вигляд:

$$\varphi(t) = u_0 + C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t}, \tag{10}$$

де C_1, C_2 – постійні інтегрування; p_1 і p_2 – корені характеристичного рівняння.

Знайдемо p_1 і p_2:

$$p^2 + \frac{4!}{2}\left(\frac{a}{d}\right)^2 p + 4!\left(\frac{a}{d}\right)^4 = 0, \tag{11}$$

$$p_{1,2} = -3!\left(\frac{a}{d}\right)^2 \pm \left(\frac{a}{d}\right)^2\sqrt{36-24} = -\left(6 \pm 2\sqrt{3}\right)\left(\frac{a}{d}\right)^2. \tag{12}$$

Виконаємо диференціювання виразу (10):

$$\dot{\varphi}(t) = C_1 p_1 e^{p_1 t} + C_2 p_2 e^{p_2 t}, \tag{13}$$

$$\ddot{\varphi}(t) = C_1 p_1^2 e^{p_1 t} + C_2 p_2^2 e^{p_2 t}. \tag{14}$$

Запишемо зворотне диференціальне перетворення (6):

$$u(x,t) = \varphi(t) + \frac{x^2}{2a^2}\dot{\varphi}(t) + \frac{x^4}{4!\,a^4}\ddot{\varphi}(t). \tag{15}$$

Підставляючи в (15) вирази (13), (14), отримаємо розв’язок задачі (1) в області оригіналів:

$$u(x,t) = u_0 + C_1 e^{p_1 t}\left[1 + \frac{x^2}{2a^2}p_1 + \frac{x^4}{4!\,a^4}p_1^2\right] + C_2 e^{p_2 t}\left[1 + \frac{x^2}{2a^2}p_2 + \frac{x^4}{4!\,a^4}p_2^2\right]. \tag{16}$$

У квадратних дужках виразу (16) записано розклад у ряд косинусоїдальної функції, тому його можна записати у вигляді:

$$u(x,t) = u_0 + C_1 e^{p_1 t}\cos\frac{\sqrt{|p_1|}}{a}x + C_2 e^{p_2 t}\cos\frac{\sqrt{|p_2|}}{a}x. \tag{17}$$

В отриманому розв’язку (17) залишилося визначити невідомі константи інтегрування C_1 і C_2. Це некоректна задача. Для її розв’язання переведемо в область зображень початкову умову (2), використовуючи вираз (5). Отримаємо вираз початкової умови в області зображень:

$$U(q,0)=\frac{H_x^q}{q!}\left[\frac{\partial^q u(x,0)}{\partial t^q}\right]_{\substack{x=0\\t=0}}=0. \tag{18}$$

Надаючи q цілочисельних значень 0, 1, 2, 3, …, отримаємо дискрети диференціального спектра:

$$\begin{aligned}
&U(0,0)=u_0+C_1+C_2=0,\\
&U(1,0)=H_x\left[-C_1\frac{\sqrt{p_1}}{a}\sin\frac{\sqrt{p_1}}{a}x-C_2\frac{\sqrt{p_2}}{a}\sin\frac{\sqrt{p_2}}{a}x\right]_{x=0}=0,\\
&U(2,0)=\frac{H_x^2}{2!}\left[-C_1\frac{p_1}{a^2}\cos\frac{\sqrt{p_1}}{a}x-C_2\frac{p_2}{a^2}\cos\frac{\sqrt{p_2}}{a}x\right]_{x=0}=\\
&=-\frac{H_x^2}{2}\left[C_1\frac{p_1}{a^2}+C_2\frac{p_2}{a^2}\right]=0.
\end{aligned} \tag{19}$$

З (19) визначимо:

$$\begin{cases}C_2=-u_0-C_1,\\ C_1p_1+C_2p_2=0.\end{cases} \tag{20}$$

Підставляючи C_2 в друге рівняння системи (20), отримаємо вираз для C_1:

$$C_1=u_0\frac{p_2}{p_1-p_2}. \tag{21}$$

Отримаємо такі значення коренів характеристичного рівняння p_1 і p_2:

$$\begin{aligned}
&p_1=-\left(6-2\sqrt{3}\right)\left(\frac{a}{d}\right)^2=-2{,}536\frac{a^2}{d^2},\ p_2=-\left(6+2\sqrt{3}\right)\left(\frac{a}{d}\right)^2=-9{,}464\frac{a^2}{d^2};\\
&\frac{\sqrt{|p_1|}}{a}=\frac{\sqrt{2{,}536}}{d}=\frac{1{,}59}{d}\approx\frac{\pi}{2}\frac{1}{d},\ \frac{\sqrt{|p_2|}}{a}=\frac{\sqrt{9{,}464}}{d}=\frac{3{,}08}{d}\approx\pi\frac{1}{d}.
\end{aligned} \tag{22}$$

Тоді вираз (17) набуде вигляду:

$$u(x,t)=u_0+C_1e^{p_1t}\cos\frac{\pi}{2}\frac{x}{d}+C_2e^{p_2t}\cos\pi\frac{x}{d}, \tag{23}$$

де $C_1=-1{,}366u_0$ і $C_2=0{,}366u_0$.

Таким чином, отримано аналітичний опис теплового процесу у формі (23), де параметри p_1 і p_2 визначаються за виразом (22), а константи C_1 і C_2 задаються співвідношеннями (20).

Оцінимо похибку отриманого розв'язку в координатах $u(x_1, t_1)$, де $x_1 = x$ або $\frac{x_1}{d}=\frac{x}{d}$ при $d = 5$ і $a^2 = 0{,}139$. Тоді:

$$p_1=-2{,}536\left(\frac{a}{d}\right)^2=-0{,}0141,\ \ p_1=-9{,}464\left(\frac{a}{d}\right)^2=-0{,}0526. \tag{24}$$

Наближений розв'язок у координатах (x_1, t_1) запишемо як:

$$u^*(x_1,t_1)=300\left[1-1{,}366e^{-0{,}0141t_1}\cos\frac{\pi}{2}\frac{x_1}{5}+0{,}366e^{-0{,}0526t_1}\cos\pi\frac{x_1}{5}\right]. \tag{25}$$

Таким чином, порівнюючи розв'язок (25) на часовому відрізку $[0;270]$ для області $x\in\left[0;\frac{d}{2}\right]$ запропонованим методом з точним розв'язком (4), отримаємо похибку розв'язку, що складає менше 1 %.

Виконаємо моделювання в теплового поля (1) для $x\in\left[\frac{d}{2};d\right]$, для цього переведемо його в область зображень згідно з виразом (6). Отримаємо рекурентний вираз (26):

$$\overline{U}(q+2,t)=\frac{\overline{H}_x^2}{a^2(q+1)(q+2)}\frac{d\overline{u}(q,t)}{dt}. \tag{26}$$

Надаючи q цілочисельних значень 0, 1, 2 і використовуючи граничну умову (3), побудуємо зворотний диференціальний спектр:

$$\overline{U}(0,t) = u_0,\ \overline{U}(1,t) = \overline{H}_x\psi(t),\ \overline{U}(2,t) = 0,\ \overline{U}(3,t) = \frac{\overline{H}_x^3}{3!\,a^2}\dot{\psi}(t),\ \overline{U}(4,t) = 0, \quad (27)$$

де $\psi(t)$ – невідома функція аргументу t і введено позначення $\ddot{\psi}(t) = \frac{d^2\psi(t)}{dt^2}$.

Для знаходження функції $\psi(t)$ граничну умову (3) запишемо у вигляді:

$$\left[\frac{\partial\overline{u}(\overline{x},t)}{\partial\overline{x}}\right]_{\overline{x}=\overline{H}_x=d} = \frac{1}{\left|\overline{H}_x\right|}\sum_{q=0}^{\infty}(-1)^q(q+1)\overline{U}(q+1,t) = 0. \quad (28)$$

Звідси отримуємо лінійне диференціальне рівняння:

$$\dot{\psi}(t) + 2\frac{a^2}{d^2}\psi(t) = 0. \quad (29)$$

Загальний розв’язок рівняння (29) має вигляд:

$$\psi(t) = Ce^{pt}, \quad (30)$$

де C – постійна інтегрування; p – корінь характеристичного рівняння.

$$\overline{u}(\overline{x},t) = \sum_{q=0}^{\infty}(-1)^q\left(\frac{\overline{x}}{\overline{H}_x}\right)^q\overline{U}(q,t), \quad (31)$$

$$\overline{u}(\overline{x},t) = u_0 - \overline{x}Ce^{pt} - \frac{\overline{x}^3}{3!\,a^2}Cpe^{pt}. \quad (32)$$

Отримуємо розв’язок в області $\overline{x} \in \left[\frac{d}{2};d\right]$:

$$\overline{u}(\overline{x},t) = u_0 - Ce^{pt}\left(\overline{x} - \frac{\overline{x}^3}{3d^2}\right). \quad (33)$$

Визначимо невідомий параметр C з умови спряження двох розв’язків:

$$u(x,t)\Big|_{x=\frac{d}{2}} = \overline{u}(\overline{x},t)\Big|_{\overline{x}=\frac{d}{2}}, \quad (34)$$

$$u_0 + C_1e^{p_1t}\cos\frac{\pi}{4} = u_0 - Ce^{pt}\left(\frac{d}{2} - \frac{d}{24}\right). \quad (35)$$

Введемо позначення $t = t_1$, тоді:

$$C = 0{,}421u_0e^{-0{,}0030t_1}. \quad (36)$$

Розв’язок задачі (33) набуває вигляду:

$$\overline{u}(\overline{x},t_1) = u_0\left[1 - 0{,}421e^{-0{,}0141t_1}\left(\overline{x} - \frac{\overline{x}^3}{75}\right)\right] \text{ при } \overline{x} \in \left[\frac{d}{2};d\right]. \quad (37)$$

Порівнюючи розв’язок (37) на часовому відрізку $[0;270]$ для області $\overline{x} \in \left[\frac{d}{2};d\right]$ запропонованим методом з точним розв’язком (4), отримаємо похибку розв’язку, що складає менше 1 %.

Висновки. Наведено приклад моделювання теплового поля стрижня на основі систем прямих і зворотних диференціальних спектрів. Отримано аналітичний розв’язок крайової некоректної задачі та визначено похибку моделювання.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Бахвалов Н.С.* Численные методы / *Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков.* – М. : БИНОМ, 2003. – 632 с.

2. *Мэтьюз Д.Г.* Численные методы. Использование MATLAB / *Д.Г. Мэтьюз, К.Д. Финк.* – М. : Вильямс, 2001. – 720 с.
3. *Поршнев С.В.* Вычислительная математика / *С.В. Поршнев.* – Спб. : БХВ Петербург, 2004. – 320 с.
4. *Баранов В.Л.* Зміщені системоаналогові диференціальні перетворення для розв'язку крайових задач / *В.Л. Баранов, С.В. Водоп'ян, Р.М. Костюченко* // Вісник ЖДТУ. – 2005. – № 4(35). – С. 42–48.
5. *Баранов В.Л.* Моделювання фізичних процесів методом одномірних диференціальних перетворень крайових задач / *В.Л. Баранов, С.В. Водоп'ян, Р.М. Костюченко* // Проблеми інформатизації та управління : зб. наук. пр. – Вип. 3(14). – К. : НАУ, 2005. – С. 25–30.
6. *Баранов В.Л.* Метод моделювання фізичних процесів на основі диференціальних перетворень нелінійних крайових задач / *В.Л. Баранов, С.В. Водоп'ян, Р.М. Костюченко* // Вісник ЖДТУ. – 2007. – № 2(41). – С. 59–65.
7. *Пухов Г.Е.* Дифференциальные спектры и модели / *Г.Е. Пухов.* – К. : Наукова думка, 1990. – 184 с.
8. *Пухов Г.Е.* Дифференциальные преобразования и математическое моделирование физических процессов / *Г.Е. Пухов.* – К. : Наукова думка, 1986. – 158 с.
9. *Рвачев В.Л.* Алгебра логики и интегральные преобразования в краевых задачах / *В.Л. Рвачев, А.П. Слесаренко.* – К. : Наукова думка, 1976. – 288 с.
10. *Баранов В.Л.* Порівняння методів моделювання динамічних процесів основними та зміщеними диференціальними перетвореннями / *В.Л. Баранов, Г.Л. Баранов, О.Г. Фролова* // Проблеми інформатизації та управління : зб. наук. пр. – Вип. 10. – К. : НАУ, 2004. – С. 72–77.
11. *Трухаев Г.И.* Методы инфлуентного анализа высоких порядков / *Г.И. Трухаев.* – Л. : Наука, 1987. – 257 с.
12. *Баранов В.Л.* Метод моделювання фізичних полів і процесів на основі прямих і зворотних диференціальних спектрів / *В.Л. Баранов, Р.М. Костюченко, К.В. Молодецька* // Вісник ЖДТУ / Технічні науки. – 2009. – № 2(49). – С. 59–68.

БАРАНОВ Володимир Леонідович – Заслужений діяч науки і техніки України, доктор технічних наук, професор, провідний науковий співробітник Житомирського військового інституту ім. С.П. Корольова Національного авіаційного університету.

Наукові інтереси:
- моделювання; чисельні методи;
- оптимізація;
- диференціальні перетворення.

КОСТЮЧЕНКО Руслана Михайлівна – кандидат технічних наук, професор кафедри фундаментальних дисциплін Житомирського військового інституту ім. С.П. Корольова Національного авіаційного університету.

Наукові інтереси:
- моделювання; чисельні методи;
- диференціальні перетворення.

МОЛОДЕЦЬКА Катерина Валеріївна – аспірант, викладач кафедри автоматизованих систем управління Житомирського військового інституту ім. С.П. Корольова Національного авіаційного університету.

Наукові інтереси:
- моделювання; чисельні методи;
- диференціальні перетворення.

Подано 28.07.2010

Баранов В.Л., Костюченко Р.М., Молодецька К.В. Моделювання теплового поля стержня із застосуванням системи прямих і зворотних диференціальних спектрів

Баранов В.Л., Костюченко Р.М., Молодецкая Е.В. Моделювання теплового поля стержня із застосуванням системи прямих і зворотних диференціальних спектрів

Baranov V.L., Kostuchenko R.M., Molodetska K.V. The modeling of thermal field of bar is with application of system of direct and reverse differential spectrums

УДК 621.372.061

Моделювання теплового поля стержня із застосуванням системи прямих і зворотних диференціальних спектрів / В.Л. Баранов, Р.М. Костюченко, Е.В. Молодецкая

Приведен пример моделирования теплового поля стержня на основе системы прямых и обратных дифференциальных спектров и выполнена оценка погрешности моделирования.

УДК 621.372.061

The modeling of thermal field of bar is with application of system of direct and reverse differential spectrums / V.L. Baranov, R.M. Kostuchenko, K.V. Molodetska

An example of design of the thermal field of bar is made on the basis of the system of direct and reverse differential spectrums and the estimation of design error is executed.