УДК 519.8(075.8)

О.В. Маєвський, здобувач
І.А. Пількевич, д.т.н., доц.
Житомирський національний агроекологічний університет

ТЕОРЕТИЧНЕ ОБҐРУНТУВАННЯ МОДЕЛІ ДИНАМІКИ ПОПУЛЯЦІЙ ЛОТКІ–ВОЛЬТЕРРА

У статті запропоновано методологію формування універсальної моделі динаміки популяцій. Математичну модель отримано теоретичним шляхом на основі положень системології. Ідентифікація розробленої моделі дозволила теоретично обґрунтувати модель динаміки популяцій Лоткі–Вольтерра, недоліком якої було її евристичне походження.

Вступ. Постановка завдання. Тваринний світ є одним з компонентів навколишнього природного середовища, національним багатством України, джерелом духовного та естетичного збагачення і виховання людей, об’єктом наукових досліджень, а також важливою базою для одержання промислової і лікарської сировини, харчових продуктів та інших матеріальних цінностей.

Розвиток популяційної екології базувався на формуванні нового підходу до аналізу польового та експериментального матеріалу спостереження за сукупностями організмів. Було виявлено, що ці сталі сукупності особин одного біологічного виду володіють рядом специфічних властивостей, які не спостерігаються в окремих організмах, тобто мають надорганізмове походження [1]. Для розуміння механізмів функціонування та вирішення питань використання популяцій велике значення мають відомості про їхню структуру. Закономірна зміна кількості особин у популяції даного виду протягом року або ряду років визначається змінами народжуваності та смертності особин, а також їх пересуванням (еміграцією або міграцією).

Оцінити інтегральний вплив первинних і вторинних радіоекологічних ефектів в умовах природних популяцій важко, оскільки вони багатовекторні та неоднозначні. Єдиним показником стану популяції в таких умовах може бути загальний стан їх кількості.

Вивчення закономірностей динаміки кількості тварин необхідне для створення наукових основ раціонального використання корисних тварин та боротьби зі шкідливими комахами. При цьому використовуються математичні методи моделювання (в частоті моделювання). Серед моделей динаміки популяцій у математичній екології найбільше розповсюдження отримала логістична функція Ферхюльста (1838 р.), яка застосовується для опису як поведінки популяцій, так і їх взаємодії (наприклад, у моделі Лоткі–Вольтерра) [2]. До недоліків логістичної функції можна віднести її евристичне походження та неповне відображення втрат.

Тому в роботі запропонована методологія побудови універсальної моделі динаміки популяцій, яка базується на основних положеннях системології. Ідентифікація розробленої моделі дозволила теоретично обґрунтувати модель динаміки популяцій Лоткі–Вольтерра.

Основна частина. *Теоретичний підхід до побудови математичної моделі динаміки популяцій.* При формуванні теоретичного підходу до математичного моделювання динаміки популяцій пропонується використовувати основи конструктивної теорії, яка потребує використання загального теоретичного ядра. Як таке ядро доцільно використовувати теоретичні основи теорії систем, які відбивають “єдині знання” [3]. Однак до даного часу єдині знання в теорії систем формувалися в якісній формі категорії “властивості”, що ускладнювало перехід до кількісних параметрів [4]. Використання енергетичної оцінки “властивостей” дозволило в кількісній формі побудувати теоретичну основу математичної моделі динаміки популяцій.

Методологія побудови математичної моделі динаміки популяцій полягає в тому, що при створенні моделі необхідно дотримуватися основних етапів, які містять:

1) формування енергетичного підходу до аксіоматики системи;
2) складання енергетичного рівняння системи;
3) складання рівняння енергетичного потенціалу системи.

Енергетичний підхід до аксіоматики системи полягає у формуванні базису незалежних змінних, який повинен забезпечити абстрактну форму поведінки об’єктів різної природи. Поведінка об’єктів розглядається з позицій руху субстанції у полі цієї субстанції. При описі динаміки популяцій абстрактна форма руху розглядається як потік енергії в енергетичному полі. У зв’язку з цим базис змінних містить [5]:

– фундаментальні змінні простору l і часу t ;
– фазові змінні, які описують рух субстанції в полі цієї субстанції.

Базис незалежних фазових змінних складається з двох якісно різних величин, одна з яких характеризує субстанцію ω, а інша – потенціал υ поля субстанції. При цьому добуток незалежних фазових змінних повинен мати вимірність енергії $[\omega\upsilon] =$ Дж.

У зв'язку з цим енергетичний потенціал, у першу чергу, полягає у виборі незалежних змінних. Зауважимо, що якщо фазова змінна субстанції має вимірність енергії, то змінна енергетичного потенціалу буде безвимірною величиною.

Енергетичне рівняння системи відображає енергетичний обмін системи з середовищем на основі законів функціонування систем [6]. У замкненій щодо енергетичного обміну сукупності систем виконується закон збереження енергії. Енергетичне рівняння системи базується на таких положеннях:

1. Повна енергія складається з основної та додаткової енергій:

$$X(t) = V(t) + Y(t), \tag{1}$$

де $X(t)$, $V(t)$, $Y(t)$ – відповідно повна, основна й додаткова енергії системи.

2. Система володіє здатністю збільшувати повну енергію за рахунок відбору додаткової енергії з середовища. Потік додаткової енергії пропорційний повній енергії та енергетичному потенціалу:

$$\frac{dY(t)}{dt} = \varphi(t)X(t), \tag{2}$$

де $\varphi(t)$ – енергетичний потенціал системи.

Використовуючи (1) і (2), отримаємо енергетичне рівняння системи, яке у формі "змінних стану" описується диференційним рівнянням стану й рівнянням алгебри "вихід–стан–вхід":

$$\begin{aligned} &\frac{dX(t)}{dt} = \varphi(t)X(t) + \frac{dV(t)}{dt}; \\ &Y(t) = X(t) - V(t). \end{aligned} \tag{3}$$

Хоча фазові змінні системи незалежні, однак їх зміни можуть бути пов'язані. Тому рівняння енергетичного потенціалу описується сумою доданків, що відображають різні види залежності фазових змінних. Обмежимося основними видами взаємної залежності енергетичного потенціалу від енергії:

1) потенціал не залежить від енергії: $\varphi_1(t) = \varphi$;

2) потенціал є пропорційним енергії: $\varphi_2(t) = \dfrac{1}{a_0} X(t)$;

3) потенціал є пропорційним швидкості зміни енергії: $\varphi_3(t) = a_1 \dfrac{dX(t)}{dt}$,

де a_0, a_1 – параметри системи, що характеризують відповідні залежності потенціалу від зміни енергії.

Рівняння сумарного потенціалу описується алгебраїчною сумою:

$$\varphi(t) = \varphi - a_1 \frac{dX(t)}{dt} - \frac{1}{a_0} X(t). \tag{4}$$

Як відомо [4], умову лінійності та однорідності загального диференційного рівняння фізичних об'єктів відображає рівність нулю додаткової енергії: $Y(t) = 0$. Тому повна енергія дорівнює основній: $X(t) \equiv Y(t)$. Підставляючи вираз для сумарного потенціалу (4) в рівняння системи (3), отримаємо загальне диференційне рівняння системи:

$$\left(a_1 + \frac{1}{X(t)}\right)\frac{dX(t)}{dt} + \frac{1}{a_0} X(t) - \varphi = 0. \tag{5}$$

Узагальнена логістична модель динаміки популяцій. Для екологічних систем як фазові змінні використовуються енергетичні величини – об'єм біомаси й чисельність популяцій (в енергетичному еквіваленті), енергетичний потенціал – швидкість росту популяцій.

Перехід від енергетичних величин рівняння (5) до кількісних змінних дає загальне нелінійне диференційне рівняння екологічної системи для кількості популяцій:

$$\left(a_1 + \frac{1}{N(t)}\right)\frac{dN(t)}{dt} + \frac{1}{a_0} N(t) - \varphi = 0, \tag{6}$$

де $N(t)$ – кількість особин у популяції; a_0, a_1, φ – параметри екологічної системи, що пов'язують зміну швидкості росту популяції зі змінами її чисельності.

Таким чином, узагальнене логістичне рівняння динаміки популяцій описується нелінійним диференційним рівнянням типу:

$$(1 + a_1 N)\frac{dN}{dt} = \varphi N - \frac{N^2}{a_0}, \tag{7}$$

де N – кількість особин у популяції; φ – потенціал експонентного росту; a_0, a_1, – параметри втрат, що стримують експонентне зростання кількості особин у популяції.

Для аналітичного розв’язку рівняння динаміки популяцій застосуємо заміну $b_0 = a_0\varphi$. Тоді рівняння (7) буде мати вигляд:

$$\left(1 + a_1 N\right)\frac{dN}{dt} = \varphi N\left(1 - \frac{N}{b_0}\right). \tag{8}$$

Рівняння (8) має аналітичний розв’язок у вигляді трансцендентного рівняння [7]:

$$N(t) = c\left(b_0 - N(t)\right)^{1+G} e^{\varphi t}, \tag{9}$$

де c – параметр початкового значення; $G = a_1 b_0 = a_1 a_0 \varphi$ – інтегральний показник втрат, який дорівнює добутку всіх параметрів рівняння (7).

Явну форму узагальненої логістичної функції (9) можна отримати, розв’язавши кінцево-різницеве рівняння (7). Дискретна узагальнена логістична функція в рекурентній формі має вигляд:

$$N_{k+1} = \left[1 + \varphi_0\left(\frac{1}{1 + a_1 N_k} - \frac{N_k / b_0}{1 + a_1 N_k}\right)\right] N_k. \tag{10}$$

Ідентифікація логістичної моделі динаміки популяцій. З метою визначення значень робочих параметрів логістичної моделі динаміки популяцій розв’яжемо систему рівнянь, що базується на моделі (10), відносно невідомих параметрів моделі. Аналітичний розв’язок системи рівнянь дає результат:

$$\begin{aligned}
\varphi_0 &= \frac{\Delta N_{21}\left[(1-n_{43})N_2 - (1-n_{32})N_3\right] - N_1\left[(1-n_{43})N_2 - (1-n_{32})\Delta N_{43}\right]}{\Delta N_{21}\Delta N_{32} - N_1\left(\Delta N_{43} - \Delta N_{32}\right) - \left(N_3\Delta N_{32} - N_2\Delta N_{43}\right)} - \\
&\quad - \frac{(1-n_{21})\left[N_3\Delta N_{32} - N_2\Delta N_{43}\right]}{\Delta N_{21}\Delta N_{32} - N_1\left(\Delta N_{43} - \Delta N_{32}\right) - \left(N_3\Delta N_{32} - N_2\Delta N_{43}\right)}; \\
a_1 &= \frac{(1-n_{21})\Delta N_{32} - N_1\left[(1-n_{43}) - (1-n_{32})\right] - \left[N_3(1-n_{32}) - N_2(1-n_{43})\right]}{\Delta N_{21}\Delta N_{32} - N_1\left(\Delta N_{43} - \Delta N_{32}\right) - \left(N_3\Delta N_{32} - N_2\Delta N_{43}\right)}; \\
b_0 &= \frac{\Delta N_{21}\left[(1-n_{43})N_2(1-n_{32})N_3\right] - N_1\left[(1-n_{43})\Delta N_{32} - (1-n_{32})\Delta N_{43}\right]}{\Delta N_{21}\left[(1-n_{43}) - (1-n_{32})\right] - (1-n_{21})\left[\Delta N_{43} - \Delta N_{32}\right] - \left[(1-n_{43})\Delta N_{32} - (1-n_{32})\right]\Delta N_{43}} - \\
&\quad - \frac{(1-n_{21})\left[N_3\Delta N_{32} - N_2\Delta N_{43}\right]}{\Delta N_{21}\left[(1-n_{43}) - (1-n_{32})\right] - (1-n_{21})\left[\Delta N_{43} - \Delta N_{32}\right] - \left[(1-n_{43})\Delta N_{32} - (1-n_{32})\right]\Delta N_{43}},
\end{aligned} \tag{11}$$

де $\Delta N_{mk} = N_m - N_k$, $n_{mk} = \dfrac{N_m}{N_k}$, $m,\ k = 1,\ 2,\ 3.$

Таким чином, для визначення робочих параметрів логістичної моделі динаміки популяцій необхідно мати характеристики динаміки популяцій відповідних видів тварин. Цю інформацію можна отримати за допомогою моніторингу динаміки популяцій.

Моніторинг динаміки популяцій основних видів мисливських тварин проводився на території України Державним управлінням лісового та мисливського господарства з метою охорони, використання та відтворення тваринного світу. Облік чисельності мисливських тварин проводився два рази на рік із залученням спеціалістів Державного управління охорони навколишнього природного середовища в кожній області України.

Дані чисельності основних видів мисливських тварин наведені в таблиці 1 [8].

Таблиця 1

Динаміка чисельності основних видів мисливських тварин, голів

Вид копитної тварини	Рік					
	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Олень	16734	16992	17606	17899	18480	19610
Кабан	38796	40351	43119	44808	48982	53084
Козуля	121666	122476	126267	126556	131831	136441
Лань	2217	2268	2664	2692	3143	3383

За даними таблиці 1 розрахуємо значення робочих параметрів логістичної моделі динаміки популяцій оленя, кабана, козулі та лані. Результати розрахунків представлені в таблиці 2.

Таблиця 2

Значення робочих параметрів моделей динаміки популяцій основних видів мисливських тварин

Вид копитної тварини	Рік		
	a_1	φ_0	b_0
Олень	$-5{,}88\cdot10^{-5}$	$1{,}628\cdot10^{-2}$	16981,903
Кабан	$-2{,}47\cdot10^{-5}$	$3{,}95\cdot10^{-2}$	40454,979
Козуля	$-8{,}15\cdot10^{-6}$	$3{,}192\cdot10^{-3}$	123657,8
Лань	$-4{,}41\cdot10^{-4}$	$2{,}62\cdot10^{-2}$	2260,729

Аналіз даних таблиці 2 показує те, що добуток $a_1 N << 1$. Це дозволяє узагальнене логістичне рівняння динаміки популяцій (7) записати у вигляді:

$$\frac{dN}{dt} \approx \varphi N - \frac{N^2}{a_0}\,. \tag{12}$$

Похибка, що виникає при такому спрощенні, не перевищує похибку округлення результату, отриманого під час розрахунків.

Таким чином, ідентифікація теоретично обґрунтованої узагальненої логістичної моделі динаміки популяцій дозволила звести рівняння (7) до рівняння Ферхюльста.

Висновки. Розширення теоретично обґрунтованої логістичної моделі динаміки популяцій забезпечувалося за рахунок включення в рівняння Ферхюльста додаткового елемента $a_1 N \frac{dN}{dt}$, яким вдалося знехтувати за допомогою ідентифікації розробленої моделі. Це дає можливість стверджувати те, що модель динаміки популяцій Лоткі–Вольтерра, яка до даного часу мала евристичне походження, теоретично обґрунтована.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Лаврик В.І.* Методи математичного моделювання в екології / *В.І. Лаврик.* – К. : Фітоцентр, 1998. – 316 с.
2. Принципи моделювання та прогнозування в екології : підруч. / *В.В. Богобоящий, К.Р. Чурбанов, П.Р. Палій, В.М. Шмандій.* – К. : Центр навч. л-ри, 2004. – 216 с.
3. *Добровольський В.В.* Основи теорії екологічних систем : підруч. / *В.В. Добровольський.* – К. : ВД “Професіонал”, 2005. – 272 с.
4. *Грабар І.Г.* Універсальна модель систем: методологічний аспект / *І.Г. Грабар, Ю.О. Тимонін, Ю.Б. Бродський* // Вісник ЖНАЕУ. – 2009. – № 1. – С. 358–366.
5. *Тимонін Ю.О.* Концептуальний базис інженерії бізнесу / *Ю.О. Тимонін* // Економіка і управління. – 1999. – № 1(2). – С. 74–79.
6. *Тимонін Ю.О.* Принципи енергетичної взаємодії систем / *Ю.О. Тимонін* // Вісник ЖІТІ. – 1999. – № 9. – С. 150–155.
7. *Пилькевич И.А.* Математическое моделирование динамики популяций / *И.А. Пилькевич, А.В. Маевский* // Восточно-европейский журнал передовых технологий. – 2010. – № 3/6(45). – С. 50–53.
8. Статистичний щорічник України за 2008 рік / за ред. *О.Г. Осауленка*. – К. : Державний комітет статистики України, 2009. – 566 с.

МАЄВСЬКИЙ Олександр Володимирович – здобувач Житомирського національного агроекологічного університету.

Наукові інтереси:

– математичне моделювання екологічних систем.

Тел.: (097)403–14–96.

ПІЛЬКЕВИЧ Ігор Анатолійович – доктор технічних наук, доцент, завідувач кафедри моніторингу НПС Житомирського національного агроекологічного університету.

Наукові інтереси:

– математичне моделювання складних систем.

Тел.: (067)39–787–39.

E-mail: eko_univer@i.ua.

Подано 13.07.2010

Маєвський О.В., Пількевич І.А. Теоретичне обґрунтування моделі динаміки популяцій Лоткі-Вольтера
Маевский А.В., Пилькевич И.А. Теоретическое обоснование модели динамики популяцій Лотки-Вольтерра
Mayevskiy A.V., Pilkevich I.A. Theoretical grounds of the Lotka-Volterra's model of population dynamics

УДК 519.8(075.8)

Теоретическое обоснование модели динамики популяцій Лотки-Вольтерра / А.В. Маевский, И.А. Пилькевич

Предложена методология формирования универсальной модели динамики популяций. Математическая модель получена теоретическим путем на основе положений системологии. Идентификация разработанной модели позволила теоретически обосновать модель динамики популяций Лотки-Вольтерра, недостатком которой было ее эвристическое происхождение.

УДК 519.8(075.8)

Theoretical grounds of the Lotka-Volterra's model of population dynamics / A.V. Mayevskiy, I.A. Pilkevich

A methodology for creating a universal model of population dynamics is offered. A mathematical model was obtained theoretically on the basis of systemology. Identification of the model allowed the theoretical justification of the Lotka-Volterra's model of population dynamics, the lack of which was its heuristic origin.