

І. А. Чуб, к.т.н., докторант

Національний університет цивільного захисту України

ЛІНЕАРИЗАЦІЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ОБМЕЖЕНЬ ПРИ РОЗМІЩЕННІ ОПУКЛИХ БАГАТОКУТНИХ ОБ'ЄКТІВ У ПРОМИСЛОВИХ СИСТЕМАХ РОЗКРОЮ АНІЗОТРОПНИХ МАТЕРІАЛІВ

Проведено дослідження оптимізаційної задачі розміщення багатокутних неорієнтованих об'єктів в анізотропній області, запропоновано лінеаризацію функцій геометричних обмежень області припустимих розв'язків задачі в полярній системі координат.

Вступ. Постановка проблеми. Чимало задач оптимального розподілу ресурсів, енергозбереження, що виникають у практичній діяльності, належать до класу оптимізаційних задач моделювання розміщення геометричних об'єктів різної фізичної природи [1]. Особливий прикладний інтерес становлять задачі розкрою рулонних і листових матеріалів, тобто задачі розміщення геометричних об'єктів в ізотропній та анізотропній областях. До останнього класу належить оптимізаційна задача розкрою шкіри, кожна ділянка якої характеризується напрямком найменшої тягучості, який є параметром анізотропії. Методи розв'язання цих задач не отримали достатнього розвитку, тому актуальним є математичне моделювання задач розміщення геометричних об'єктів в анізотропній області.

Аналіз останніх досягнень і публікацій на тему дослідження показав, що клас задач розміщення геометричних об'єктів в анізотропній області вивчений меншою мірою, порівняно з оптимізаційними задачами розміщення двовимірних геометричних об'єктів в ізотропній області [1, 2]. У роботах [3, 4] проаналізовані особливості задач розміщення геометричних об'єктів в анізотропній області та побудовані математичні моделі області припустимих розв'язків задачі розміщення багатокутних об'єктів в анізотропній області. Але отриманий аналітичний опис геометричних обмежень області припустимих розв'язків у декартовій системі координат відрізняється надмірною складністю, що є перешкодою на шляху розробки методу розв'язання задач практичної розмірності. У роботах [5, 6] отримано аналітичний опис кусково-нелінійної границі області припустимих розв'язків задачі розміщення багатокутних об'єктів в анізотропній області із застосуванням полярної системи координат. У роботі [6] розглянуто підхід до побудови лінійної апроксимації області припустимих розв'язків задачі розміщення неорієнтованих геометричних об'єктів, що уможливорює зведення вихідної задачі до скінченного набору задач лінійного програмування.

Метою статті є побудова лінійної апроксимації основних обмежень області припустимих розв'язків задачі розміщення опуклих багатокутників в анізотропній області в полярній системі координат.

Постановка завдання. Актуальність розглянутого класу задач обумовлює необхідність створення програмного забезпечення САПР розкрою (рис. 1), заснованого на сучасному математичному інструментарії.

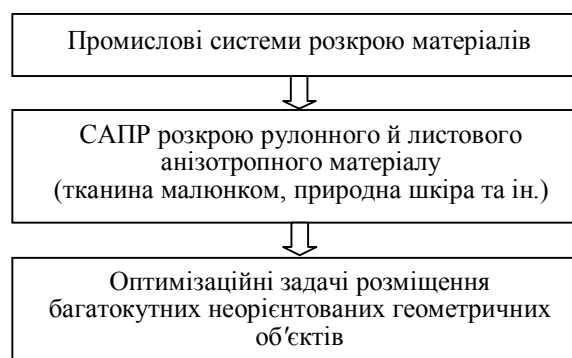


Рис. 1. Склад промислових систем розкрою матеріалів

Викладення основного матеріалу. Нехай є неопукла багатокутна область R_0 , задана в полярній системі координат $\rho\phi$ упорядкованим набором координат вершин $\{(\rho_0^k, \phi_0^k)\}$, $k = \overline{1, K}$. Область R_0 є анізотропною внаслідок наявності в кожній точці свого напрямку найменшої тягучості *sregion*, що задається за колом напружень (рис. 2, а).

Нехай є також скінченний набір опуклих багатокутних об'єктів розміщення $R = \{R_i\}$, $i = \overline{1, N}$ (рис. 2, б). Розміщення об'єкта R_i задається параметрами (ρ_i, ϕ_i) , що задають положення центра власної полярної

системи координат $\rho_i O_i \varphi_i$, причому параметри (ρ_i, φ_i) пов'язані з параметрами трансляції $v_i = (x_i, y_i)$ полюса O_i співвідношеннями вигляду:

$$x_i = \rho_i \cos \varphi_i, \quad y_i = \rho_i \sin \varphi_i.$$

У полярній системі координат об'єкт R_i задається набором $\{(\rho_i^n, \varphi_i^n)\}, n = \overline{1, n_i}$ координат його вершин у системі $\rho_i O_i \varphi_i, i = \overline{1, N}$ (рис. 2, б), де ρ_i^n – відстань i -ої вершини багатокутника R_i від полюса O_i, φ_i^n – кут між полярною віссю й променем, що з'єднує полюс O_i та i -у вершину об'єкта $R_i, O_i \in \text{int } R_i$. Є також набір $\{(p_i^n, \alpha_i^n)\}, n = \overline{1, n_i}$ відстаней p_i^n і кутів α_i^n між полярною віссю й нормаллю до i -ої сторони багатокутника R_i відповідно.

Властивість анізотропії області R_0 означає, що в кожній точці $(x, y) \in R_0$ напрямком **subject** найменшої тягучості об'єкта збігається з напрямком анізотропії **sregion** області R_0 . Тому, залежно від координати φ_i полюса O_i об'єкта R_i змінюється орієнтація його власної системи координат $\rho_i O_i \varphi_i$. Не втрачаючи спільності, припустимо, що напрямком **subject** об'єкта R_i збігається з полярною віссю $O_i \varphi_i$.

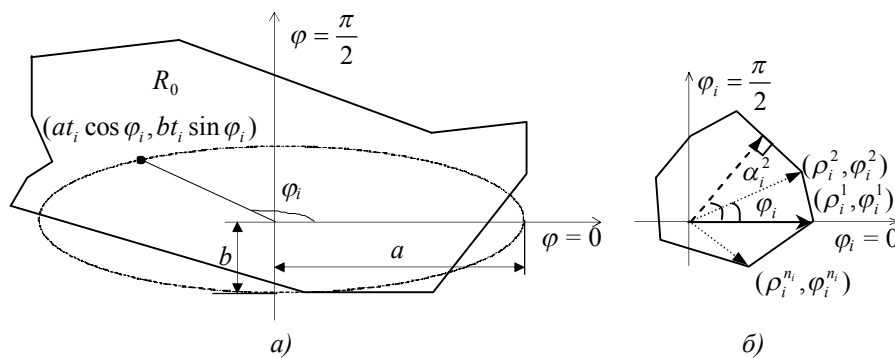


Рис. 2. Область розміщення R_0 (а) і об'єкт розміщення R_i (б)

Постановка задачі розміщення багатокутних неорієнтованих об'єктів в анізотропній області формулюється так: необхідно розмістити набір об'єктів $R_i, i = \overline{1, N}$ без взаємних перетинів в області R_0 так, щоб кількість N об'єктів була максимальною.

Загальними для цього класу задач є геометричні обмеження на розміщення об'єктів R_i в області R_0 :

$$R_i \subset R_0, \quad i = \overline{1, N}$$

і умови взаємного неперетину об'єктів (R_i, R_j) :

$$\text{int } R_i \cap \text{int } R_j = \emptyset, \quad i, j = \overline{1, N}, i \neq j.$$

Обмеження на розміщення об'єктів R_i в області R_0 . З огляду на неопуклість області R_0 можливі два типи торкання: «вершина об'єкта R_i – сторона області R_0 » (торкання I типу) і «сторона об'єкта R_i – вершина області R_0 » (торкання II типу).

Торкання першого типу. Аналітичний опис торкання першого типу: «вершина (ρ_i^n, α_i^n) об'єкта R_i – сторона $\rho \cos(\varphi - \alpha_0^k) = p_0^k$ області R_0 » (ρ, φ – координати деякої точки сторони, що розглядається, області R_0) має вигляд [5]:

$$\rho_i \cos(\varphi_i - \alpha_0^k) - p_0^k + \rho_i^n \cos(\alpha_i^n - \alpha_0^k + \varphi_i) = 0, \quad (1)$$

де ρ_i, φ_i – координати полюса об'єкта R_i ; p_0^k, α_0^k – нормаль до сторони області R_0 і кут між нормаллю p_0^k й полярною віссю загальної системи координат відповідно; ρ_i^n, α_i^n – координати поточної вершини об'єкта R_i у власній системі координат $\rho_i O_i \varphi_i$.

З урахуванням еквівалентних тригонометричних перетворень:

$$\cos(\varphi_i - \alpha_0^k) = \cos \varphi_i \cos \alpha_0^k + \sin \varphi_i \sin \alpha_0^k; \quad (2)$$

$$\cos(\alpha_i^n - \alpha_0^k + \varphi_i) = \cos(\alpha_i^n - \alpha_0^k) \cos \varphi_i - \sin(\alpha_i^n - \alpha_0^k) \sin \varphi_i$$

рівняння (1) набуває вигляду:

$$\rho_i \cos \varphi_i \cos \alpha_0^k + \rho_i \sin \varphi_i \sin \alpha_0^k - p_0^k + \rho_i^n \cos(\alpha_i^n - \alpha_0^k) \cos \varphi_i - \rho_i^n \sin(\alpha_i^n - \alpha_0^k) \sin \varphi_i = 0$$

або

$$\cos \alpha_0^k \rho_i \cos \varphi_i + \sin \alpha_0^k \rho_i \sin \varphi_i + C_i^{nk} \cos \varphi_i - S_i^{nk} \sin \varphi_i - p_0^k = 0, \tag{3}$$

де $C_i^{nk} = \rho_i^n \cos(\alpha_i^n - \alpha_0^k)$, $S_i^{nk} = \rho_i^n \sin(\alpha_i^n - \alpha_0^k)$ – екзогенні константи, що визначаються через метричні характеристики об'єктів та області розміщення.

Таким чином, отриманий вираз містить тригонометричні функції параметра розміщення φ_i . Як показано в [6], лінеаризацію цих функцій у діапазоні $\varphi_i \in [-\Delta_i(\varepsilon_{\sin}); \Delta_i(\varepsilon_{\sin})]$, де похибка обчислень $\varepsilon_{\sin} > 0$ є екзогенним параметром, можна виконати розкладанням у ряд Маклорена, зневажаючи членами більш високих порядків:

$$\sin \varphi_i = \varphi_i - \frac{\varphi_i^3}{3!} + \frac{\varphi_i^5}{5!} - \dots \cong \varphi_i, \tag{4}$$

$$\cos \varphi_i = 1 - \frac{\varphi_i^2}{2!} + \frac{\varphi_i^4}{4!} - \dots \cong 1 - \frac{\varphi_i^2}{2}. \tag{5}$$

Кусково-лінійна апроксимація $g^L(\varphi_i)$ [6] функції $g(\varphi_i) = (1 - \varphi_i^2 / 2)$ в діапазоні зміни кутового параметра $\varphi_i \in [0; 0,36]$, вузлами якої є рівномірно віддалені по координатній осі φ точки $Z_1 = (0; 1)$, $Z_2 = (0,12; 0,9928)$, $Z_3 = (0,24; 0,9712)$, $Z_4 = (0,36; 0,9358)$, складається з трьох лінійних ланок:

$$g_{m-1}^L(\varphi_i) = a_m \varphi_i + b_m, \tag{6}$$

де $a_m = (y_{Z_m} - y_{Z_{m-1}}) / (x_{Z_m} - x_{Z_{m-1}})$; $b_m = y_{Z_{m-1}} - a_m x_{Z_{m-1}}$, $m = \overline{2,4}$.

Значення параметрів a_m, b_m наведені в таблиці 1.

Таблиця 1

Значення параметрів a_m, b_m у діапазоні зміни кутового параметра φ_i

Діапазон зміни φ_i	b_m	a_m
$\varphi_i \leq 0,12$	1	-0,06
$\varphi_i \leq 0,24$	1,0144	-0,18
$\varphi_i \leq 0,36$	1,0432	-0,3

З урахуванням (6) формула (3) набуває вигляду:

$$\rho_i (a_m \varphi_i + b_m) \cos \alpha_0^k + \sin \alpha_0^k \rho_i \varphi_i + C_i^{nk} (a_m \varphi_i + b_m) - S_i^{nk} \varphi_i - p_0^k = 0.$$

Після очевидних перетворень одержуємо:

$$[a_m \cos \alpha_0^k + \sin \alpha_0^k] \rho_i \varphi_i + [b_m \cos \alpha_0^k] \rho_i + [a_m C_i^{nk} - S_i^{nk}] \varphi_i + [C_i^{nk} b_m - p_0^k] = 0 \tag{7}$$

або

$$A_m^k \rho_i \varphi_i + [b_m \cos \alpha_0^k] \rho_i + [a_m C_i^{nk} - S_i^{nk}] \varphi_i + [C_i^{nk} b_m - p_0^k] = 0,$$

де постійна $A_m^k = a_m \cos \alpha_0^k + \sin \alpha_0^k$.

Перший доданок виразу (7) містить нелінійну функцію $\Gamma(\rho_i, \varphi_i) = \rho_i \varphi_i$, два наступних є лінійними, четвертий – постійна величина.

Кусково-лінійна апроксимація $\Gamma^L(\rho_i, \varphi_i)$ функції $\Gamma(\rho_i, \varphi_i)$ у діапазонах зміни параметрів $\varphi_i \in [0; 0,3]$, $\Delta \rho_i \in [0; 5]$ може бути побудована за допомогою сукупності площин (неопуклого лінійного багатovidу) вигляду [6]:

$$\Gamma_{lm}^L(\rho_i, \varphi_i) = A_{lm}^{ii} \rho_i + B_{lm}^{ii} \varphi_i + H_{lm}^{ii}, \quad m, l = \overline{1,3}, \tag{8}$$

де постійні $A_{lm}^{ii}, B_{lm}^{ii}, H_{lm}^{ii}$ є апіорі визначеними величинами для заданих інтервалів значень параметрів ρ_i, φ_i , причому інтервали значень параметра φ_i (індекс m постійних $A_{lm}^{ii}, B_{lm}^{ii}, H_{lm}^{ii}$) узгоджені з вузлами апроксимаційної ламаної (6). Наприклад, при $\rho_i \in [0;1]$, $\varphi_i \in [0;0,12]$ $A_{lm}^{ii} = 0,00991$, $B_{lm}^{ii} = 0,00915$, $H_{lm}^{ii} = 0$.

Тоді остаточний вираз для обмежень вигляду (1) за умови торкання першого типу записується як:

$$[A_m^k A_{lm}^{ii} + b_m \cos \alpha_0^k] \rho_i + [A_m^k B_{lm}^{ii} + a_m C_i^{nk} - S_i^{nk}] \varphi_i + [A_m^k H_{lm}^{ii} + C_i^{nk} b_m - p_0^k] = 0. \tag{9}$$

Приклад 1. Розглянемо геометричну ілюстрацію умови торкання першого типу об'єкта R_i сторони області R_0 (рис. 3). При зміні значень кутового параметра φ_i об'єкта R_i з визначеним кроком, що породжує зміну орієнтації його власної системи координат $\rho_i O_i \varphi_i$, слід полюса O_i являє собою ламану. Розрахунки координат (ρ_i, φ_i) полюса об'єкта R_i були проведені як із застосуванням базової формули (1), так і з застосуванням лінеаризованої формули (9). З рисунка можна бачити, що результати практично збігаються.

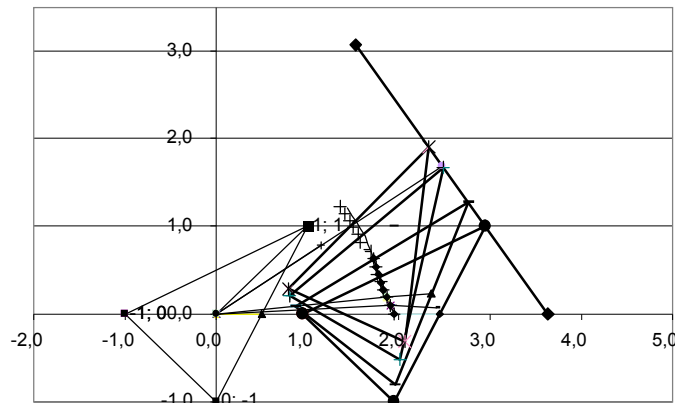


Рис. 3. Геометрична ілюстрація умови торкання об'єкта та області розміщення:

- – слід полюса об'єкта при застосуванні формули (1);
- + – слід полюса об'єкта при застосуванні формули (9)

Торкання другого типу. Розглянемо торкання виду: «вершина (ρ_0^k, φ_0^k) області R_0 – n -а сторона $\rho \cos(\varphi - \alpha_i^n) = p_i^n$ об'єкта R_i .

Аналітичний опис торкання другого типу має вигляд [6]:

$$\rho_0 \cos(\alpha_i^n + \varphi_i - \varphi_0^k) - \rho_i \cos \alpha_i^n - p_i^n = 0. \quad (10)$$

Як у попередньому випадку торкання першого типу об'єктів та границі області, для лінеаризації виразу (10) застосуємо еквівалентні тригонометричні перетворення (2) та апроксимаційні формули (4)–(6).

Остаточний лінеаризований вираз для умови торкання другого типу має вигляд:

$$[\rho_0 a_m \cos(\alpha_i^n - \varphi_0^k) + \rho_0 \sin(\alpha_i^n - \varphi_0^k)] \varphi_i - [\cos \alpha_i^n] \rho_i + [\rho_0 b_m \cos(\alpha_i^n - \varphi_0^k) - p_i^n] = 0. \quad (11)$$

Зауважимо, що даний вираз значно простіший за перший випадок (вираз 9).

Приклад 2. Розглянемо геометричну ілюстрацію умови торкання другого типу об'єкта R_i сторони області R_0 (рис. 4) при зміні значень кутового параметра φ_i об'єкта R_i з визначеним кроком. Розрахунки координат (ρ_i, φ_i) полюса об'єкта R_i були проведені як із застосуванням базової формули (1), так і з застосуванням лінеаризованої формули (9). З рисунка можна бачити, що результати практично збігаються.

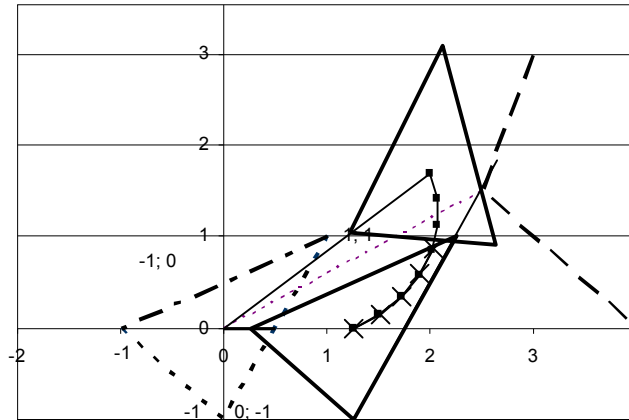


Рис. 4. Геометрична ілюстрація умови торкання об'єкта та області розміщення:

- – слід полюса об'єкта при застосуванні формули (1);
- + – слід полюса об'єкта при застосуванні формули (9)

Умови взаємного неперетину об'єктів. У даному випадку теж можливі два типи торкання об'єктів.

Торкання першого типу. Аналітичний опис торкання першого типу «вершина (ρ_j^n, φ_j^n) об'єкта R_j – сторона $\rho \cos(\rho - \alpha_i^k) = p_i^k$ об'єкта R_i », $n = \overline{1, N_j}, k = \overline{1, N_i}$ має вигляд [7]:

$$\rho_j \cos(\varphi_j - \varphi_i - \alpha_i^k) - \rho_i \cos \alpha_i^k - p_i^k - \rho_j^n \cos(\varphi_j^n + \varphi_j - \varphi_i - \alpha_i^k) = 0. \quad (12)$$

Зробивши перетворення, аналогічні тим, які виконані при лінеаризації обмежень на розміщення об'єктів в області, одержимо:

$$A_{mi}^k \rho_j \varphi_j - A_{mi}^k \rho_j \varphi_i - B_{mi}^{nk} \varphi_j + B_{mi}^{nk} \varphi_i + [b_m \cos \alpha_i^k] \rho_j - [\cos \alpha_i^k] \rho_i - [p_i^k + b_m \rho_j^n \cos(\alpha_i^k - \varphi_j^n)] = 0,$$

де величини $A_{mi}^k = a_m \cos \alpha_i^k + \sin \alpha_i^k$, $B_{mi}^{nk} = \rho_j^n [a_m \cos(\alpha_i^k - \varphi_j^n) + \sin(\alpha_i^k - \varphi_j^n)]$ є константами для визначених діапазонів зміни кута.

Після побудови кусково-лінійної апроксимації $\Gamma^L(\rho_j \varphi_j)$ та $\Gamma^L(\rho_j \varphi_i)$ функцій $\rho_j \varphi_j$ і $\rho_j \varphi_i$ відповідно за допомогою площин виду, який є аналогічним (8):

$$\Gamma_{lm}^L(\rho_j, \varphi_j) = A_{lm}^{ji} \rho_j + B_{lm}^{ji} \varphi_j + H_{lm}^{ji}, m, l = \overline{1, 3};$$

$$\Gamma_{lm}^L(\rho_j, \varphi_i) = A_{lm}^{ji} \rho_j + B_{lm}^{ji} \varphi_i + H_{lm}^{ji}, m, l = \overline{1, 3},$$

одержуємо остаточний вираз для обмежень (12) за умови торкання першого типу:

$$\left[A_{mi}^k A_{lm}^{jj} - A_{mi}^k A_{lm}^{ii} + b_m \cos \alpha_i^k \right] \rho_j - [\cos \alpha_i^k] \rho_i - \left[B_{mi}^{nk} - A_{mi}^k B_{lm}^{jj} \right] \varphi_j + \left[B_{mi}^{nk} - B_{lm}^{ji} \frac{B_m^i}{C_m^i} \right] \varphi_i - \left[A_{mi}^k H_{lm}^{ii} - A_{mi}^k H_{lm}^{jj} + b_m \rho_j^n \cos(\alpha_i^k - \varphi_j^n) + p_i^k \right] = 0. \quad (13)$$

Торкання другого типу. Аналітичний опис торкання другого типу «вершина (ρ_i^n, φ_i^n) об'єкта R_i – сторона $\rho \cos(\varphi - \alpha_j^k) = p_j^k$ об'єкта R_j » має вигляд [7]:

$$\rho_j \cos(\varphi_j - \alpha_j^k) - \rho_i \cos(\varphi_i - \alpha_j^k) - p_j^k \cos(\varphi_i^n - \alpha_j^k + \varphi_i) = 0. \quad (14)$$

Проробивши перетворення, аналогічні до тих, які виконані при лінеаризації обмежень на взаємний неперетин об'єктів при торканні першого типу, одержимо остаточний вираз за умови торкання другого типу:

$$(E_5 A_{lm}^{jj} + b_m \cos \alpha_j^k) \rho_j - (E_5 A_{lm}^{ii} + b_m \cos \alpha_j^k) \rho_i + (E_5 B_{lm}^{jj}) \varphi_j - (\rho_j^n E_6 - E_5 B_{lm}^{ii}) \varphi_i - (E_5 H_{lm}^{ii} - E_5 H_{lm}^{jj} + b_m p_i^k \cos(\varphi_i^n - \alpha_j^k)) = 0, \quad (15)$$

де $E_5 = a_m \cos \alpha_j^k + \sin \alpha_j^k$, $E_6 = a_m \cos(\varphi_i^n - \alpha_j^k) - \sin(\varphi_i^n - \alpha_j^k)$.

Висновки. Напрямки подальших досліджень. Таким чином, побудовано алгоритм лінеаризації функцій геометричних обмежень оптимізаційної задачі розміщення в багатокутній анізотропній області

неорієнтованих багатокутних об'єктів, що дозволяє із заданою точністю звести розглянуту нелінійну оптимізаційну задачу до набору задач лінійного програмування. Даний підхід є основою для побудови інформаційної технології розв'язання розглянутого класу оптимізаційних задач.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Стоян Ю.Г.* Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования / *Ю.Г. Стоян, С.В. Яковлев.* – К. : Наукова думка, 1986. – 268 с.
2. *Новожилова М.В.* Методологія розв'язання оптимізаційних нелінійних задач геометричного проектування / *М.В. Новожилова* // Вісник Запорізького державного університету. – 1999. – № 1. – С. 65–69.
3. *Гиренко К.А.* Математична модель та метод розв'язання задачі розміщення неорієнтованих складених геометричних об'єктів : автореф. дис. ... канд. техн. наук / *К.А. Гиренко.* – Харків, 2009. – 18 с.
4. Исследование операций. Т. 2. Модели и применения / под ред. *Дж.Моудера, С.Элмаграби.* – М. : Мир, 1981. – 677 с.
5. *Чуб І.А.* Аналітичний опис геометричних обмежень задачі розміщення багатокутних об'єктів в анізотропній області в полярній системі координат / *І.А. Чуб, М.В. Новожилова* // Геометричне та комп'ютерне моделювання. – 2010. – Вип. 26.
6. *Чуб І.А.* Линейная аппроксимация условий размещения неориентированных геометрических объектов / *И.А. Чуб, М.В. Новожилова* // Системи обробки інформації. – 2009. – Вип. 4(78). – С. 160–163.

ЧУБ Ігор Андрійович – кандидат технічних наук, доцент, докторант Національного університету цивільного захисту України.

Тел.: (роб.) 707–34–90; (дом.) 702–04–37.

E-mail: chubia@nuczu.edu.ua.

Подано 28.07.2010

Чуб І.А. Лінеаризація геометричних обмежень при розміщенні опуклих багатокутних об'єктів у промислових системах розкрою анізотропних матеріалів

Чуб И.А. Линейаризация геометрических ограничений при размещении выпуклых многоугольных объектов в промышленных системах раскроя анизотропных материалов.

Chub I.A. Linearization of geometric constraints for placing convex polygonal objects in industrial cutting systems of anisotropic materials.

УДК 519.85

Линейаризация геометрических ограничений при размещении выпуклых многоугольных объектов в промышленных системах раскроя анизотропных материалов / И.А. Чуб

Проведено исследование оптимизационной задачи размещения многоугольных неориентированных объектов в анизотропной области, предложена линейаризация функций геометрических ограничений области допустимых решений задачи в полярной системе координат.

УДК 519.85

Linearization of geometric constraints for placing convex polygonal objects in industrial cutting systems of anisotropic materials/ I.A. Chub

A study of the optimization problem of locating a polygonal nonoriented object in the anisotropic region, proposed linearization functions of geometric constraints of acceptable solutions of the problem in the polar coordinate system.