УДК 519.85

О.С. Пічугіна, к.ф.-м.н., доц.
Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка

МЕТОД ПОБУДОВИ ОПУКЛИХ ПРОДОВЖЕНЬ КВАДРАТНИХ ПОЛІНОМІВ НА КОМБІНАТОРНИХ МНОЖИНАХ

У статті представлено аналітичний метод побудови опуклих продовжень квадратних поліномів, заданих на евклідових комбінаторних множинах переставлень і поліпереставлень, який суттєво використовує властивості цих множин і дозволяє при розв'язанні комбінаторних задач оптимізації використовувати властивості як комбінаторних множин, так і відповідних многогранників. Представлений метод може бути застосований до розв'язання численних практичних задач, адже значна кількість відомих постановок пошуку екстремумів поліномів на переставленнях стосується саме квадратних поліномів.

Вступ. Абсолютна більшість реальних задач, що зводяться до оптимізації на комбінаторній множині об'єктів, належить до нелінійних. Одним із підходів до їх розв'язання є занурення евклідових комбінаторних множин (ЕКМ) в евклідів арифметичний простір [1] і зведення розв'язання комбінаторної проблеми до серії неперервних задач на комбінаторних многогранниках. Отож, актуальним є виділення класів задач, для яких це можливо. Зокрема, доведено [2, 3], що оптимізація довільного полінома на вершинно розташованих множинах [1] може бути зведена до оптимізації опуклого полінома, який називається його опуклим продовженням (ОП), відповідно застосування при розв'язанні оптимізаційних задач властивостей опуклих функцій на опуклих многогранниках. У даній роботі представлено метод побудови ОП квадратного полінома на переставленнях і поліпереставленнях. При цьому використано підхід до побудови ОП, представлений у [6, 7].

Викладення основного матеріалу. Введемо позначення: $J_n = \{1,\ldots,n\}$, $J_n^0 = J_n \cup \{0\}$.

Розглянемо квадратний поліном

$$f(x) = P_2(x) = f_1(x) + f_2(x),\ x \in R^n, \tag{1}$$

де

$$f_1(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{i \le j} a_{ij} \cdot x_i \cdot x_j,\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{i \le j} \left|a_{ij}\right| \ne 0; \tag{2}$$

$$f_2(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot x_i. \tag{3}$$

(2) – квадратична частина полінома (1) і є квадратичною формою (КФ), (3) – лінійна його частина і є лінійною формою (ЛФ) функції (1).

Представимо КФ (2) в симетричній формі:

$$\begin{gathered} f_1(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a'_{ij} \cdot x_i \cdot x_j, \\ a'_{ii} = a_{ii},\ i \in J_n;\ a'_{ij} = a'_{ji} = \frac{a_{ij}}{2},\ i \ne j, \end{gathered} \tag{4}$$

а також у матричній формі:

$$f_1(x) = x^T A' x,\ A' = \left(a'_{ij}\right)_{i,j \in J_n}. \tag{5}$$

Нехай E – евклідова комбінаторна множина (ЕКМ) [1], $f(x)$ – функція, визначена на E, взагалі, неопукла. Як $f(x)$ розглядатимемо квадратні поліноми, тобто функції вигляду (1).

Задача – побудувати опукле продовження (ОП) функції (1) на ЕКМ E, тобто знайти таку функцію $F(x)$, яка була б опуклою і збігалася з $f(x)$ на E:

$$F(x):\ F(x) \text{ – опукла, } F(x) \underset{E}{=} f(x). \tag{6}$$

Зауваження 1. Функція (6) визначена неоднозначно, отож, ми шукатимемо одну з таких функцій.

Задача (6) виникає при оптимізації довільної функції на ЕКМ:

$$z = f(x) \underset{E}{\to} extr, \tag{7}$$

оскільки перехід до еквівалентної (7) задачі пошуку екстремуму опуклої функції

$$z' = F(x) \underset{E}{\rightarrow} extr \tag{8}$$

дозволяє використати апарат опуклого аналізу, зокрема від (8) перейти до релаксованої задачі на відповідному многограннику:

$$z'' = F(x) \underset{\Pi}{\rightarrow} extr\ ,\ \Pi = conv(E)\ . \tag{9}$$

ОП будуватимемо для вершинно розташованих ЕКМ E, тобто таких [1]:

$$E = vert(conv(E)) = vert(\Pi)\ . \tag{10}$$

Властивість (10) мають множини переставлень і поліпереставлень, а також окремі класи множин сполучень та розміщень [1].

Розглянемо побудову ОП квадратного полінома (1), визначеного на загальній множині переставлень.

Загальною множиною переставлень із мультимножини $G = \{g_i\}_{i \in J_n}$, k елементів якої різні, називається множина $E = E_{nk}\left(G\right) \subset R^n$ упорядкованих n-вибірок з G [1].

Твердження 1. Функція вигляду

$$F(x) = Q_2(x) = f(x) + ABC \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - ABC \cdot S\ , \tag{11}$$

де

$$ABC = AB + C = A + B + C\ ; \tag{12}$$

$$AB = \frac{1}{2} \sum_{\substack{a_{ij} \neq 0 \\ i<j}} \left|a_{ij}\right| = \sum_{\substack{a'_{ij} \neq 0 \\ i<j}} \left|a'_{ij}\right| = A + B\ ; \tag{13}$$

$$C = \sum_{a_{ii}<0} \left|a_{ii}\right| = -\sum_{a_{ii}<0} a_{ii} = \sum_{a'_{ii}<0} \left|a'_{ii}\right|; \tag{14}$$

$$A = \frac{1}{2} \sum_{\substack{a_{ij}>0 \\ i<j}} a_{ij} = \sum_{\substack{a'_{ij}>0 \\ i<j}} a'_{ij}\ ,\ B = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{a_{ij}<0 \\ i<j}} a_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{a_{ij}<0 \\ i<j}} \left|a_{ij}\right| = \sum_{\substack{a'_{ij}<0 \\ i<j}} \left|a'_{ij}\right|; \tag{15}$$

$$S = \sum_{i=1}^{n} g_i^2\ , \tag{16}$$

є опуклим продовженням функції $f(x)$ вигляду (1) на $E_{nk}\left(G\right)$.

Зауваження 2. Як бачимо, $F(x)$ відрізняється від $f(x)$ вільним членом і коефіцієнтами при квадратах змінних.

Доведення.

ОП достатньо будувати для першого доданка (1) – КФ $f_1(x)$, адже другий доданок – ЛФ $f_2(x)$ – є опуклою функцією. Представимо $f_1(x)$ сумою чистих доданків (квадратів з додатними коефіцієнтами, квадратів з від'ємними коефіцієнтами) та мішаних доданків (доданків вигляду $b_{ij}(x) = a_{ij}x_i \cdot x_j$, $i<j$):

$$f_1(x) = \sum_{\substack{i=1 \\ a_{ii}>0}}^{n} a_{ii} \cdot x_i^2 - \sum_{\substack{i=1 \\ a_{ii}<0}}^{n} \left|a_{ii}\right| \cdot x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{i<j \\ a_{ij} \neq 0}} \left|a_{ij}\right| \cdot f_{ij} = f_1^1(x) + f_1^2(x) + f_1^3(x)\ , \tag{17}$$

де

$$f_{ij} = \begin{cases} f_{ij}^+ = x_i \cdot x_j\ ,\ a_{ij} > 0 \\ f_{ij}^- = -x_i \cdot x_j\ ,\ a_{ij} < 0 \end{cases},\ i < j,\ i, j \in J_n\ . \tag{18}$$

Доданок $f_1^1(x)$ у (17), очевидно, опукла функція як сума квадратів змінних з додатними коефіцієнтами. Для другого доданка $f_1^2(x)$ і третього $f_1^3(x)$ будуємо ОП. Позначимо через $F_1^j(x)$ опукле продовження $f_1^j(x)$ ($j \in J_3$), тоді, як уже зазначено,

$$F_1^1(x) = f_1^1(x)\ . \tag{19}$$

У побудові ОП $F_1^2(x)$, $F_1^3(x)$ на $E_{nk}\left(G\right)$ використаємо властивість переставлень:

$$\forall\ \mathrm{x} \in E = E_{nk}\left(G\right)\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = S\,, \tag{20}$$

де S визначено з (16), звідки

$$-x_i^2 = \sum_{i'\neq i} x_{i'}^2 - S;\ -x_i^2 - x_j^2 = \sum_{i'\neq i,j} x_{i'}^2 - S,\ i \neq j. \tag{21}$$

Для $f_1^2(x)$ маємо:

$$f_1^2(x) = -\sum_{\substack{i=1\\ a_{ii}<0}}^{n} |a_{ii}| \cdot x_i^2 = \sum_{\substack{i=1\\ a_{ii}<0}}^{n} |a_{ii}| \cdot (-x_i^2) \underset{E}{=} \sum_{\substack{i=1\\ a_{ii}<0}}^{n} |a_{ii}| \cdot (\sum_{i'\neq i} x_{i'}^2 - S) =$$

$$= \sum_{\substack{i=1\\ a_{ii}<0}}^{n} |a_{ii}| \cdot \sum_{i'\neq i} x_{i'}^2 - S \cdot \sum_{\substack{i=1\\ a_{ii}<0}}^{n} |a_{ii}| = \sum_{\substack{i=1\\ a_{ii}<0}}^{n} |a_{ii}| \cdot (\sum_{i'=1}^{n} x_{i'}^2 - x_i^2) - S \cdot \sum_{\substack{i=1\\ a_{ii}<0}}^{n} |a_{ii}| =$$

$$= -\sum_{\substack{i=1\\ a_{ii}<0}}^{n} |a_{ii}| \cdot x_i^2 + \sum_{\substack{i=1\\ a_{ii}<0}}^{n} |a_{ii}| \cdot \sum_{i'=1}^{n} x_{i'}^2 - \sum_{\substack{i=1\\ a_{ii}<0}}^{n} |a_{ii}| \cdot S = f_1^2(x) + C \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - C \cdot S = F_1^2(x). \tag{22}$$

У (22) ми скористалися умовою (21), яка справджується лише в точках E, отже, у правій частині (22) є продовження $f_1^2(x)$, яке є, очевидно, опуклим, адже $\sum_{\substack{i=1\\ a_{ii}<0}}^{n} |a_{ii}| \cdot \sum_{i'\neq i} x_{i'}^2 - S \cdot \sum_{\substack{i=1\\ a_{ii}<0}}^{n} |a_{ii}| = \sum_{\substack{i=1\\ a_{ii}<0}}^{n} |a_{ii}| \cdot \sum_{i'\neq i} x_{i'}^2 - \mathrm{const}$ – опукла.

Перед побудовою ОП $F_1^3(x)$ функції $f_1^3(x)$ будуємо ОП для (18), що її формують, використовуючи при цьому (21):

$$f_{ij} = f_{ij}^{\pm} = \pm x_i \cdot x_j = \frac{1}{2}\left(\left(x_i \pm x_j\right)^2 - x_i^2 - x_j^2\right) \underset{E}{=} \frac{1}{2}\left(\left(x_i \pm x_j\right)^2 + \left(\sum_{i'\neq i,j} x_{i'}^2 - S\right)\right) = F_{ij}. \tag{23}$$

Як бачимо, побудовані продовження F_{ij} функцій f_{ij} – опуклі функції як сума опуклих, $\left(x_i \pm x_j\right)^2$ – опукла як квадрат лінійної функції, $\sum_{i'\neq i,j} x_{i'}^2$ – як сума квадратів змінних.

Спростимо вираз F_{ij} у (23):

$$F_{ij} = \frac{1}{2}\left(\left(x_i \pm x_j\right)^2 + \left(\sum_{i'\neq i,j} x_{i'}^2 - S\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\pm 2 \cdot x_i \cdot x_j - S + \left(\sum_{i'\neq i,j} x_{i'}^2 + x_i^2 + x_i^2\right)\right) =$$

$$= \pm x_i \cdot x_j + \frac{1}{2}\sum_{i'=1}^{n} x_{i'}^2 - \frac{S}{2} = f_{ij} + \frac{1}{2}\sum_{i'=1}^{n} x_{i'}^2 - \frac{S}{2}. \tag{24}$$

ОП (24) виразу (18) відрізняється від f_{ij} константою $\frac{S}{2}$ і коефіцієнтами при квадратах змінних.

Використовуючи (24), запишемо шукане ОП $F_1^3(x)$ функції $f_1^3(x)$:

$$F_1^3(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{i<j} |a_{ij}| \cdot F_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{i<j} |a_{ij}| \cdot \left(f_{ij} + \frac{1}{2}\sum_{i'=1}^{n} x_{i'}^2 - \frac{S}{2}\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{i<j} |a_{ij}| \left(\frac{1}{2}\sum_{i'=1}^{n} x_{i'}^2 - \frac{S}{2}\right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{i<j} |a_{ij}| \cdot f_{ij} = f_1^3(x) + \sum_{i'=1}^{n} x_{i'}^2 \cdot \sum_{i=1}^{n}\sum_{i<j} \frac{|a_{ij}|}{2} - S \cdot \sum_{i=1}^{n}\sum_{i<j} \frac{|a_{ij}|}{2} \underset{(13)}{=} f_1^3(x) + AB \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - AB \cdot S. \tag{25}$$

Об'єднуємо (19), (22), (25):

$$F_1(x) = F_1^1(x) + F_1^2(x) + F_1^3(x) = f_1^1(x) + f_1^2(x) + f_1^3(x) + (AB + C) \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 -$$

$$-(AB + C) \cdot S \underset{(12)}{=} f_1\ (x) + ABC \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - ABC \cdot S. \tag{26}$$

Тоді ОП $F(x)$ квадратного полінома (1) запишемо так:

$$F(x)=F_1(x)+f_2(x)=\left(f_1\ (x)+f_2(x)\right)+ABC\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i^2-ABC\cdot S=$$

$$=f(x)+ABC\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i^2-ABC\cdot S. \tag{27}$$

Одержано ОП (1) у формі (11), отже, твердження 1 доведено.

Розповсюдимо результати побудови ОП квадратних поліномів з переставлень $E_{nk}(G)$ на поліпереставлення з мультимножини $G=\{g_i\}_{i\in J_n}$, у якій виділено декілька груп змінних.

Уведемо позначення:

– $l=\overline{1,L}$ – номер групи змінних (Γ_l, $L>1$);

– n_l – кількість елементів у Γ_l ($l\in J_L$);

– I_l – номери змінних групи Γ_l ($l\in J_L$);

– N_l – накопичена кількість змінних по l перших групах:

$$N_l=\sum_{j=1}^{l}n_j\,,\ \ l\in J_L\,, \tag{28}$$

тоді

$$\begin{aligned}&I_1=\{1,\ldots,n_1\}=J_{n_1},\\&I_2=\{n_1+1,\ldots,n_1+n_2\}=\{N_1+1,\ldots,N_2\}=J_{N_2}\setminus J_{N_1},\\&\ldots\\&I_L=J_{N_L}\setminus J_{N_{L-1}}.\end{aligned} \tag{29}$$

У введених позначеннях G можна записати двома способами:

$$G=\left\{\{g_i\}_{i\in I_l}\right\}_{l\in J_L}=\left\{\{\overline{g}^l_i\}_{i\in J_{n_l}}\right\}_{l\in J_L}$$

або

$$G=\{G^l\}_{l\in J_L},\ G^l=\{g_i\}_{i\in I_l}=\{\overline{g}^l_i\}_{i\in J_{n_l}}\left(l\in J_L\right);\ n=\sum_{l=1}^{L}n_l\,. \tag{30}$$

У кожній групі Γ_l ($l\in J_L$) елементи G вважатимемо впорядкованими:

$$\begin{aligned}&g_i\le g_{i+1},\ i\in I_{l-1},\ l\in J_L;\\&\overline{g}^l_i\le\overline{g}^l_{i+1},\ i\in I_{n_{l-1}},\ l\in J_L.\end{aligned} \tag{31}$$

Відповідно до (30) змінні вектора $x\in R^n$ також можуть бути занумеровані двома способами:

$$x=(x_1,\ldots,x_n)=\left((x_i)_{i\in I_l}\right)_{l\in J_L}=\left(\left(\overline{x}^l_i\right)_{i\in J_{n_l}}\right)_{l\in J_L} \tag{32}$$

або

$$x=\left(\overline{x}^l\right)_{l\in J_L},\ \overline{x}^l=(x_i)_{i\in I_l}=\left(\overline{x}^l_i\right)_{i\in J_{n_l}}\left(l\in J_L\right). \tag{33}$$

Розповсюдимо результати твердження 1 з множини переставлень на поліпереставлення.

Загальною ЕКМ поліпереставлень $E^L_{\bar{n}\bar{k}}(G)$ [1] з мультимножини G вигляду (30), у якій виділено $L>1$ підмультимножин G^l потужності n_l, у яких k_l елементів різні ($l\in J_L$), називається множина

$$E^L_{\bar{n}\bar{k}}(G)=E_{n_1k_1}(G^1)\times\ldots\times E_{n_Lk_L}(G^L)\,,\ \overline{n}=(n_l)_{l\in J_L}\,,\ \overline{k}=(k_l)_{l\in J_L}\,. \tag{34}$$

Оскільки множина поліпереставлень $E^L_{\bar{n}\bar{k}}(G)$ є декартовим добутком множин переставлень $E_{n_lk_l}(G^l)$ ($l\in J_L$), величини, подібні до S у (16), визначаються по всіх групах Γ_l ($l\in J_L$):

$$S_l=\sum_{i=1}^{n_l}\left(g^l_i\right)^2=\sum_{i\in I_l}g_i^2\,,\ l\in J_L\,. \tag{35}$$

У КФ (2) виділимо групи змінних, що належать до однієї групи Γ_l ($l\in J_L$) (далі чисті доданки) та до двох різних груп Γ_l, $\Gamma_{l'}$ ($l\ne l'$, $l,l'\in J_L$) (далі мішані доданки):

$$f_1(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{i\le j}a_{ij}\cdot x_i\cdot x_j=\sum_{l=1}^{L}\sum_{\substack{i,j\in I_l\\ i\le j}}a_{ij}\cdot x_i\cdot x_j+\sum_{\substack{l,l'=1\\ l<l'}}^{L}\sum_{\substack{i\in I_l\\ j\in I_{l'}}}a_{ij}\cdot x_i\cdot x_j\ . \tag{36}$$

<u>Зауваження 3</u>. Для мішаних доданків через введену нумерацію (29) автоматично виконується: $l<l' \ \Rightarrow\ i<j$, тому умову $i\le j$ опускаємо.

У позначеннях

$$F_l=\sum_{i,j\in I_l,\ i\le j}a_{ij}\cdot x_i\cdot x_j\ ,\ l\in J_L\ ; \tag{37}$$

$$\tilde F_{ll'}=\sum_{\substack{i\in I_l\\ j\in I_{l'}}}a_{ij}\cdot x_i\cdot x_j\ ,\ l<l',\ l,l'\in J_L \tag{38}$$

для чистих і мішаних доданків відповідно до (36) переписується:

$$f_1(x)=\sum_{l=1}^{L}F_l+\sum_{\substack{l,l'=1\\ l<l'}}^{L}\tilde F_{ll'}\ . \tag{39}$$

<u>Зауваження 4</u>. Умова типу (21) на $E^L_{\bar n\bar k}(G)$ матиме вигляд:

$$\begin{gathered}\forall i\in I_l\ \ -x_i^2=\sum_{\substack{i'\ne i\\ i'\in I_l}}x_{i'}^2-S_l;\\ \forall i,j\in I_l:\ i\ne j\ \ -x_i^2-x_j^2=\sum_{\substack{i'\ne i,j\\ i'\in I_l}}x_{i'}^2-S_l.\end{gathered} \tag{40}$$

<u>Твердження 2</u>. Функції вигляду

$$\overline{F}_l=F_l+ABC_l\cdot\sum_{i\in I_l}x_i^2-ABC_l\cdot S_l\ , \tag{41}$$

де S_l визначено з (35),

$$ABC_l=AB_l+C_l=A_l+B_l+C_l\ ; \tag{42}$$

$$AB_l=A_l+B_l=\sum_{\substack{a'_{ij}\ne 0\\ i<j,\ \mathrm{i,j}\in I_l}}\left|a'_{ij}\right|=\frac{1}{2}\sum_{\substack{a_{ij}\ne 0\\ i<j,\ \mathrm{i,j}\in I_l}}\left|a_{ij}\right|=\frac{1}{2}\sum_{\substack{\mathrm{i,j}\in I_l,\\ i<j}}\left|a_{ij}\right|=\sum_{\substack{\mathrm{i,j}\in I_l,\\ i<j}}\left|a'_{ij}\right|\ ; \tag{43}$$

$$C_l=\sum_{\substack{a_{ii}<0\\ \mathrm{i}\in I_l}}\left|a_{ii}\right|=\sum_{\substack{a'_{ii}<0\\ \mathrm{i}\in I_l}}\left|a'_{ii}\right|\ ; \tag{44}$$

$$A_l=\frac{1}{2}\sum_{\substack{a_{ij}>0\\ i<j,\ \mathrm{i,j}\in I_l}}a_{ij}=\sum_{\substack{a'_{ij}>0\\ i<j,\ \mathrm{i,j}\in I_l}}a'_{ij}\ ,\ B_l=\frac{1}{2}\sum_{\substack{a_{ij}<0\\ i<j,\ \mathrm{i,j}\in I_l}}\left|a_{ij}\right|=\sum_{\substack{a'_{ij}<0\\ i<j,\ \mathrm{i,j}\in I_l}}\left|a'_{ij}\right|,\ l\in J_L\ , \tag{45}$$

є ОП чистих доданків (37) КФ (36) на множині поліпереставлень $E^L_{\bar n\bar k}(G)$.

<u>Доведення</u>.

ОП $\overline{F}_l$ для чистих доданків (37) будуємо за (11):

$$F_l \underset{E}{=} \overline{F}_l=F_l+ABC_l\cdot\sum_{i\in I_l}x_i^2-ABC_l\cdot S_l\ \ (l\in J_L), \tag{46}$$

ураховуючи, що F_l є квадратичною функцією на переставленнях $E_{n_lk_l}(G^l)$. Коефіцієнти $ABC_l,\ S_l$ визначаються за (35), (42).

<u>Твердження 3</u>. Функції вигляду

$$\overline{F}_{ll'}=F_{ll'}+\tilde A\tilde B_{ll'}\cdot\sum_{i\in I_l\cup I_{l'}}x_i^2-\tilde A\tilde B_{ll'}\cdot\overline{S}_{ll'}\ ,\ l,l'\in J_L,\ l<l'\ , \tag{47}$$

де

$$\tilde{A}\tilde{B}_{ll'} = \tilde{A}_{ll'} + \tilde{B}_{ll'} = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i\in I_l \\ j\in JI_{l'}}} \left|a_{ij}\right| = \sum_{\substack{i\in I_l \\ j\in I_{l'}}} \left|a'_{ij}\right|, \; l,l'\in J_L, \; l<l'; \tag{48}$$

$$\tilde{A}_{ll'} = \frac{1}{2}\sum_{\substack{a_{ij}>0,\, i<j \\ i\in I_l,\, j\in I_{l'}}} a_{ij} = \sum_{\substack{a'_{ij}>0,\, i<j \\ i\in I_l,\, j\in I_{l'}}} a'_{ij}, l,l'\in J_L, \; l<l';$$

$$\tilde{B}_{ll'} = \frac{1}{2}\sum_{\substack{a_{ij}<0,\, i<j \\ i\in I_l,\, j\in I_{l'}}} \left|a_{ij}\right| = \sum_{\substack{a'_{ij}>0,\, i<j \\ i\in I_l,\, j\in I_{l'}}} \left|a'_{ij}\right|, \; l,l'\in J_L, \; l<l'; \tag{49}$$

$$\overline{S}_{ll'} = S_l + S_{l'}, \; l,l'\in J_L, \; l<l', \tag{50}$$

є ОП мішаних доданків (38) КФ (36) на множині поліпереставлень $E^L_{\bar{n}\bar{k}}(G)$ (тут S_l у (50) визначено з (35)).

Доведення.

Розглянемо мішаний доданок (38) КФ (36) і, в свою чергу, виділимо в ньому два доданки з додатними й від'ємними коефіцієнтами:

$$\tilde{F}_{ll'} = \sum_{\substack{i\in I_l \\ j\in I_{l'}}} a_{ij}\cdot x_i\cdot x_j = \sum_{\substack{i\in I_l,\, j\in I_{l'} \\ a_{ij}>0}} a_{ij}\cdot x_i\cdot x_j + \sum_{\substack{i\in I_l,\, j\in I_{l'} \\ a_{ij}<0}} a_{ij}\cdot x_i\cdot x_j, \tag{51}$$

інакше

$$\tilde{F}_{ll'} = \tilde{F}^+_{ll'} + \tilde{F}^-_{ll'}, \tag{52}$$

де

$$\tilde{F}^+_{ll'} = \sum_{\substack{i\in I_l,\, j\in I_{l'} \\ a_{ij}>0}} \left|a_{ij}\right|\cdot f^+_{ij}; \tag{53}$$

$$\tilde{F}^-_{ll'} = \sum_{\substack{i\in I_l,\, j\in I_{l'} \\ a_{ij}<0}} \left|a_{ij}\right|\cdot f^-_{ij}, \; l,l'\in J_L, \; l<l'; \tag{54}$$

$$f^+_{ij} = x_i\cdot x_j, \; f^-_{ij} = -x_i\cdot x_j, \; i\in I_l, j\in I_{l'}. \tag{55}$$

Якщо ввести позначення

$$f_{ij} = \begin{cases} f^+_{ij}, \; a_{ij}>0 \\ f^-_{ij}, \; a_{ij}<0 \end{cases}, \; i\in I_l, j\in I_{l'}, \tag{56}$$

з урахуванням (53)–(55) вираз (52) переписується:

$$\tilde{F}_{ll'} = \sum_{\substack{i\in I_l \\ j\in I_{l'}}} \left|a_{ij}\right|\cdot f_{ij}, \; l,l'\in J_L, \; l<l'. \tag{57}$$

ОП $\overline{f}^+_{ij}$ для функції f^+_{ij} з (55), враховуючи (40) і (50), матиме вигляд:

$$f^+_{ij} = x_i\cdot x_j = \frac{1}{2}\left(\left(x_i+x_j\right)^2 - x_i^2 - x_j^2\right) \underset{E}{=}$$

$$\underset{E}{=} \frac{1}{2}\left(x_i^2 + x_j^2 + 2x_i\cdot x_j + \sum_{\substack{i'\neq i \\ i'\in I_l}} x_{i'}^2 - S_l + \sum_{\substack{j'\neq j \\ j'\in I_{l'}}} x_{j'}^2 - S_{l'}\right) =$$

$$= x_i\cdot x_j + \frac{1}{2}\sum_{i\in I_l} x_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{j\in I_{l'}} x_j^2 - \frac{1}{2}(S_l + S_{l'}) \underset{(50)}{=} f^+_{ij} + \frac{1}{2}\sum_{i'\in I_l\cup I_{l'}} x_{i'}^2 - \frac{1}{2}\overline{S}_{ll'} = \overline{f}^+_{ij}. \tag{58}$$

Аналогічно ОП $\overline{f}^-_{ij}$ для f^-_{ij} з (55) матиме вигляд:

$$f^-_{ij} = -x_i\cdot x_j = \frac{1}{2}\left(\left(x_i - x_j\right)^2 - x_i^2 - x_j^2\right) \underset{E}{=}$$

$$\underset{E}{=}\frac{1}{2}\left(x_i^2+x_j^2-2x_i\cdot x_j+\sum_{\substack{i'\neq i\\ i'\in I_l}}x_{i'}^2-S_l+\sum_{\substack{j'\neq j\\ j'\in I_{l'}}}x_{j'}^2-S_{l'}\right)=$$

$$=-x_i\cdot x_j+\frac{1}{2}\sum_{i'\in I_l}x_{i'}^2+\frac{1}{2}\sum_{j'\in I_{l'}}x_{j'}^2-\frac{1}{2}(S_l+S_{l'})\underset{(50)}{=}f_{ij}^-+\frac{1}{2}\sum_{i'\in I_l\cup I_{l'}}x_{i'}^2-\frac{1}{2}\overline{S}_{ll'}=\overline{f}_{ij}^-. \quad (59)$$

Враховуючи (58), (59), записуємо ОП $\overline{f}_{ij}$ для функції f_{ij} з (56):

$$\overline{f}_{ij}=f_{ij}+\frac{1}{2}\sum_{i'\in I_l\cup I_{l'}}x_{i'}^2-\frac{1}{2}\overline{S}_{ll'}. \quad (60)$$

ОП $\overline{F}_{ll'}$ для $\tilde{F}_{ll'}$ з (57) формуємо з ОП складових у формі (60):

$$\overline{F}_{ll'}=\sum_{\substack{i\in I_l\\ j\in I_{l'}}}|a_{ij}|\cdot\overline{f}_{ij}=\sum_{\substack{i\in I_l\\ j\in I_{l'}}}|a_{ij}|\cdot\left(f_{ij}+\frac{1}{2}\sum_{i'\in I_l\cup I_{l'}}x_{i'}^2-\frac{1}{2}\overline{S}_{ll'}\right)=$$

$$=\sum_{\substack{i\in J_l\\ j\in J_{l'}}}|a_{ij}|\cdot f_{ij}+\frac{1}{2}\sum_{i'\in I_l\cup I_{l'}}x_{i'}^2\cdot\sum_{\substack{i\in I_l\\ j\in I_{l'}}}|a_{ij}|-\frac{1}{2}\cdot\overline{S}_{ll'}\cdot\sum_{\substack{i\in I_l\\ j\in I_{l'}}}|a_{ij}|. \quad (61)$$

Враховуючи (57), вираз (61) переписується:

$$\overline{F}_{ll'}=F_{ll'}+\frac{1}{2}\sum_{i'\in I_l\cup I_{l'}}x_{i'}^2\cdot\sum_{\substack{i\in I_l\\ j\in I_{l'}}}|a_{ij}|-\frac{\overline{S}_{ll'}}{2}\cdot\sum_{\substack{i\in I_l\\ j\in I_{l'}}}|a_{ij}|,\ l,l'\in J_L,\ l<l'. \quad (62)$$

У позначеннях (48) рівність (62) переписується:

$$\overline{F}_{ll'}=F_{ll'}+\tilde{A}\tilde{B}_{ll'}\cdot\sum_{i'\in I_l\cup I_{l'}}x_{i'}^2-\tilde{A}\tilde{B}_{ll'}\cdot\overline{S}_{ll'},\ l,l'\in J_L,\ l<l'. \quad (63)$$

<u>Твердження 4.</u> ОП функції $f(x)$ вигляду (1) на множині поліпереставлень $E_{\bar{n}\bar{k}}^L(G)$ слугує вираз:

$$\overline{f}(x)=f(x)+\left(\sum_{l=1}^{L}ABC_l\cdot\sum_{i\in I_l}x_i^2+\sum_{\substack{l,l'=1\\ l<l'}}^{L}\tilde{A}\tilde{B}_{ll'}\cdot\sum_{i\in I_l\cup I_{l'}}x_i^2\right)-\left(\sum_{l=1}^{L}ABC_l\cdot S_l+\sum_{\substack{l,l'=1\\ l<l'}}^{L}\tilde{A}\tilde{B}_{ll'}\cdot\overline{S}_{ll'}\right). \quad (64)$$

<u>Доведення</u>.

ОП продовження $\overline{f}_1(x)$ для КФ (2) на множині поліпереставлень $E_{\bar{n}\bar{k}}^L(G)$ таке:

$$\overline{f}_1(x)=\sum_{l=1}^{L}\overline{F}_l+\sum_{\substack{l,l'=1\\ l<l'}}^{L}\overline{F}_{ll'}=\sum_{l=1}^{L}\left(F_l+ABC_l\cdot\sum_{i\in I_l}x_i^2-ABC_l\cdot S_l\right)+$$

$$+\sum_{\substack{l,l'=1\\ l<l'}}^{L}\left(F_{ll'}+\tilde{A}\tilde{B}_{ll'}\cdot\sum_{i\in I_l\cup I_{l'}}x_i^2-\tilde{A}\tilde{B}_{ll'}\cdot\overline{S}_{ll'}\right)=$$

$$=\sum_{l=1}^{L}F_l+\sum_{\substack{l,l'=1\\ l<l'}}^{L}F_{ll'}+\sum_{l=1}^{L}\left(ABC_l\cdot\left(\sum_{i\in I_l}x_i^2-S_l\right)\right)+\sum_{\substack{l,l'=1\\ l<l'}}^{L}\left(\tilde{A}\tilde{B}_{ll'}\cdot\left(\sum_{i\in I_l\cup I_{l'}}x_i^2-\overline{S}_{ll'}\right)\right)=$$

$$=f_1(x)+\sum_{l=1}^{L}ABC_l\cdot\sum_{i\in I_l}x_i^2-\sum_{l=1}^{L}ABC_l\cdot S_l+\sum_{\substack{l,l'=1\\ l<l'}}^{L}\tilde{A}\tilde{B}_{ll'}\cdot\sum_{i\in I_l\cup I_{l'}}x_i^2-\sum_{\substack{l,l'=1\\ l<l'}}^{L}\tilde{A}\tilde{B}_{ll'}\cdot\overline{S}_{ll'} \quad (65)$$

(тут використано (40), (41), (46), (50)).

Опуклим продовженням $\overline{f}(x)$ для функції $f(x)$, враховуючи (1), (65) та опуклість функції (2), що означає:

$$\overline{f}_2(x)=f_2(x), \quad (66)$$

слугуватиме вираз:

$$\overline{f}(x)=\overline{f}_1(x)+\overline{f}_2(x)=(f_1(x)+f_2(x))+\left(\sum_{l=1}^{L}ABC_l\cdot\sum_{i\in I_l}x_i^2-\sum_{l=1}^{L}ABC_l\cdot S_l\right)+$$

$$+(\sum_{\substack{l,l'=1\\ l<l'}}^{L} \tilde{A}\tilde{B}_{ll'} \cdot \sum_{i \in I_l \cup I_{l'}} x_i^2 - \sum_{\substack{l,l'=1\\ l<l'}}^{L} \tilde{A}\tilde{B}_{ll'} \cdot \overline{S}_{ll'});$$

$$\overline{f}(x) = f(x) + (\sum_{l=1}^{L} ABC_l \cdot \sum_{i \in I_l} x_i^2 + \sum_{\substack{l,l'=1\\ l<l'}}^{L} \tilde{A}\tilde{B}_{ll'} \cdot \sum_{i \in I_l \cup I_{l'}} x_i^2 - D; \tag{67}$$

$$D = \sum_{l=1}^{L} ABC_l \cdot S_l + \sum_{\substack{l,l'=1\\ l<l'}}^{L} \tilde{A}\tilde{B}_{ll'} \cdot \overline{S}_{ll'}, \tag{68}$$

що і треба було довести.

Приклад. Побудувати ОП квадратичної форми

$$f(x) = -x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_4 + x_1 \cdot x_5 + 2x_1 \cdot x_6 - 2x_1 \cdot x_7 + x_1 \cdot x_9 - 2x_2^2 - 2x_2 \cdot x_3 - x_2 \cdot x_4 - 2x_2 \cdot x_6 + 2x_3^2 + 2x_3 \cdot x_7 +$$
$$+ x_3 \cdot x_8 + 2x_3 \cdot x_9 + x_4^2 + 2x_4 \cdot x_5 + 2x_5 \cdot x_8 - 2x_5 \cdot x_9 + x_6 \cdot x_7 - 2x_6 \cdot x_9 - x_7 \cdot x_8 + 2x_7 \cdot x_9 - 2x_8^2 - 2x_9^2$$

на множині поліпереставлень із $G = \{\{g_1, g_2, g_3\}, \{g_4, g_5\}, \{g_6, g_2, g_8, g_9\}\} = \{\{1,3,9\}, \{2,4\}, \{2,3,7,8\}\}$.

Як бачимо, кількість груп змінних $L = 3$, згідно з (34) $\overline{n} = (n_l)_{l \in J_3} = (3,2,4)$, $\overline{k} = \overline{n}$, відповідно до (30) $n = \sum_{l=1}^{3} n_l = 9$, розбиття $J_n = J_9$ на підмножини (29) – $J_9 = I = \{I_l\}_{l \in J_3} = \{\{1,2,3\}, \{4,5\}, \{6,7,8,9\}\}$.

Множина поліпереставлень, на якій будується ОП КФ вигляду (2), – $E_{\overline{n}\overline{k}}^{3}(G)$.

Матриця коефіцієнтів $A = (a_{ij})_{\substack{i \in J_n\\ i \le j}}$ КФ (2) та матриця КФ (5) мають вигляд, що наведений на рисунку 1.

A	l'	1	1	1	2	2	3	3	3	3
l	i\j	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1		-1		1	1	2	-2		1
1	2		-2	-2	-1		-2			
1	3			2				2	1	2
2	4				1	2				
2	5								2	-2
3	6							1		-2
3	7								-1	2
3	8								-2	
3	9									-2

A'	l'	1	1	1	2	2	3	3	3	3
l	i\j	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1		-0,5		0,5	0,5	1	-1		0,5
1	2	-0,5	-2	-1	-0,5		-1			
1	3		-1	2				1	0,5	1
2	4	0,5	-0,5		1	1				
2	5	0,5			1				1	-1
3	6	1	-1					0,5		-1
3	7	-1		1			0,5		-0,5	1
3	8			0,5		1		-0,5	-2	
3	9	0,5		1		-1	-1	1		-2

Рис. 1. Матриця квадратичної форми

У матриці A на рисунку 1 виділені 3 блоки, що відповідають трьом чистим доданкам (37) A_{ll}, $l \in J_3$, а також три блоки, що відповідають мішаним доданкам (38) $A_{ll'}$, $l \in J_3$, $l<l'$:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ 0 & A_{22} & A_{23} \\ 0 & 0 & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Розглянемо блоки A_{ll}, $l \in J_3$, визначимо для них величини (35), (42), (44), (45):

$$A_{11} = (a_{ij})_{i,j \in I_1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \ A_{22} = (a_{ij})_{i,j \in I_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ A_{33} = (a_{ij})_{i,j \in I_3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix};$$

$$S_1 = \sum_{i \in I_1} g_i^2 = 1^2 + 3^2 + 9^2 = 91, \ S_2 = \sum_{i \in I_2} g_i^2 = 2^2 + 4^2 = 20, \ S_3 = \sum_{i \in I_3} g_i^2 = 2^2 + 3^2 + 7^2 + 8^2 = 126;$$

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0, \ B_1 = \frac{1}{2} \cdot (|a_{12}| + |a_{23}|) = 1.5, \ C_1 = |a_{22}| = 2, \ ABC_1 = 0 + 1.5 + 2 = 3.5;$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot a_{44} = 1,\ B_2 = C_2 = 0,\ ABC_2 = 1 + 0 + 0 = 1;$$

$$A_3 = \frac{1}{2} \cdot (a_{67} + a_{79}) = 1.5,\ B_3 = \frac{1}{2} \cdot (|a_{69}| + |a_{78}|) = 1.5,\ C_3 = |a_{88}| + |a_{99}| = 4,\ ABC_3 = 1.5 + 1.5 + 4 = 7.$$

Розглянемо блоки $A_{ll'},\ l \in J_3,\ l<l'$, визначимо для них величини (48)–(50):

$$\overline{S}_{12} = S_1 + S_2 = 91 + 20 = 111,\ \overline{S}_{13} = S_1 + S_3 = 91 + 126 = 217,\ \overline{S}_{23} = S_2 + S_3 = 20 + 126 = 146;$$

$$A_{12} = \left(a_{ij}\right)_{\substack{i \in I_1 \\ j \in I_2}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_{13} = \left(a_{ij}\right)_{\substack{i \in I_1 \\ j \in I_3}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ A_{23} = \left(a_{ij}\right)_{\substack{i \in I_2 \\ j \in I_3}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix};$$

$$\tilde{A}_{12} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{a_{ij} > 0 \\ i \in I_1,\ j \in I_2}} a_{ij} = \frac{1}{2} \cdot (a_{14} + a_{15}) = 1,\ \tilde{B}_{12} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{a_{ij} < 0 \\ i \in I_1,\ j \in I_2}} |a_{ij}| = \frac{1}{2} \cdot |a_{24}| = 0.5,$$

$$\tilde{A}\tilde{B}_{12} = \tilde{A}_{12} + \tilde{B}_{12} = 1 + 0.5 = 1.5;$$

$$\tilde{A}_{13} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{a_{ij} > 0 \\ i \in I_1,\ j \in I_3}} a_{ij} = \frac{1}{2} \cdot (a_{16} + a_{19} + a_{37} + a_{38} + a_{39}) = 4,\ \tilde{B}_{13} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{a_{ij} < 0 \\ i \in I_1,\ j \in I_3}} |a_{ij}| = \frac{1}{2} \cdot (|a_{17}| + |a_{26}|) = 2,$$

$$\tilde{A}\tilde{B}_{13} = \tilde{A}_{13} + \tilde{B}_{13} = 4 + 2 = 6;$$

$$\tilde{A}_{23} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{a_{ij} > 0 \\ i \in I_2,\ j \in I_3}} a_{ij} = \frac{1}{2} \cdot a_{58} = 1,\ \tilde{B}_{23} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{a_{ij} < 0 \\ i \in I_2,\ j \in I_3}} |a_{ij}| = \frac{1}{2} \cdot |a_{59}| = 1,\ \tilde{A}\tilde{B}_{23} = \tilde{A}_{23} + \tilde{B}_{23} = 1 + 1 = 2.$$

Запишемо шукане ОП (67):

$$\overline{f}(x) = f(x) + \sum_{l=1}^{3} ABC_l \cdot \sum_{i \in I_l} x_i^2 + \sum_{\substack{l,l'=1 \\ l<l'}}^{3} \tilde{A}\tilde{B}_{ll'} \cdot \sum_{i \in I_l \cup I_{l'}} x_i^2 - D =$$

$$= f(x) + (ABC_1 \cdot \sum_{i=1}^{3} x_i^2 + ABC_2 \cdot \sum_{i=4}^{5} x_i^2 + ABC_3 \cdot \sum_{i=6}^{9} x_i^2) +$$

$$+ (\tilde{A}\tilde{B}_{12} \cdot \sum_{i=1}^{5} x_i^2 + \tilde{A}\tilde{B}_{13} \cdot \left(\sum_{i=1}^{3} x_i^2 + \sum_{i=6}^{9} x_i^2 \right) + \tilde{A}\tilde{B}_{23} \cdot \sum_{i=4}^{9} x_i^2) - D,$$

D визначимо з (68):

$$D = \sum_{l=1}^{3} ABC_l \cdot S_l + \sum_{\substack{l,l'=1 \\ l<l'}}^{3} \tilde{A}\tilde{B}_{ll'} \cdot \overline{S}_{ll'} = (ABC_1 \cdot S_1 + ABC_2 \cdot S_2 + ABC_3 \cdot S_3) +$$

$$+ (\tilde{A}\tilde{B}_{12} \cdot \overline{S}_{12} + \tilde{A}\tilde{B}_{13} \cdot \overline{S}_{13} + \tilde{A}\tilde{B}_{23} \cdot \overline{S}_{23}) = (3.5 \cdot 91 + 1 \cdot 20 + 7 \cdot 126) +$$

$$+ (1.5 \cdot 111 + 6 \cdot 217 + 2 \cdot 146) = 1220.5 + 1760.5 = 2981.$$

$$\overline{f}(x) = f(x) + (3.5 \cdot \sum_{i=1}^{3} x_i^2 + \sum_{i=4}^{5} x_i^2 + 7 \cdot \sum_{i=6}^{9} x_i^2) + (1.5 \cdot \sum_{i=1}^{5} x_i^2 + 6 \cdot \left(\sum_{i=1}^{3} x_i^2 + \sum_{i=6}^{9} x_i^2 \right) + 2 \cdot \sum_{i=4}^{9} x_i^2) - 2981 =$$

$$= f(x) + (11 \cdot \sum_{i=1}^{3} x_i^2 + 4.5 \cdot \sum_{i=4}^{5} x_i^2 + 15 \cdot \sum_{i=6}^{9} x_i^2) - 2981 = 11 \cdot x_1^2 + 9 \cdot x_2^2 + 13 \cdot x_3^2 + 5.5 \cdot x_4^2 + 4.5 \cdot x_5^2 + 15 \cdot x_6^2 +$$

$$+ 15 \cdot x_7^2 + 13 \cdot x_8^2 + 13 \cdot x_9^2 - x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_4 + x_1 \cdot x_5 + 2x_1 \cdot x_6 - 2x_1 \cdot x_7 + x_1 \cdot x_9 - 2x_2 \cdot x_3 - x_2 \cdot x_4 - 2981 -$$

$$- 2x_2 \cdot x_6 + 2x_3 \cdot x_7 + x_3 \cdot x_8 + 2x_3 \cdot x_9 + 2x_4 \cdot x_5 + 2x_5 \cdot x_8 - 2x_5 \cdot x_9 + x_6 \cdot x_7 - 2x_6 \cdot x_9 - x_7 \cdot x_8 + 2x_7 \cdot x_9.$$

шукане ОП вихідної функції $f(x)$.

Неважко побачити, що знайдена $\overline{f}(x)$ дійсно є опуклою, адже у відповідній матриці КФ діагональні елементи переважають над недіагональними.

Висновки. Представлено підхід до аналітичного пошуку опуклих продовжень поліномів, заданих на вершинно розташованих комбінаторних множинах, на прикладі квадратних поліномів і множин переставлень та поліпереставлень. Він має як теоретичну цінність, так і практичну, адже відомі постановки задач оптимізації поліномів на комбінаторних множинах є задачами квадратичної та кубічної оптимізації [4, 5].

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Стоян Ю.Г.* Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації / *Ю.Г. Стоян, О.О. Ємець.* –

К. : ІСДО, 1993. – 188 с.
2. *Стоян Ю.Г.* Побудова опуклих і угнутих функцій на перестановочному многограннику */ Ю.Г. Стоян, С.В. Яковлєв* // Доповіді АН УРСР : Сер. А. – 1988. – № 5. – С. 66–68.
3. *Яковлев С.В.* Теория выпуклых продолжений функций на вершинах выпуклых многогранников / *С.В. Яковлев* // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1994. – Т. 34, № 7. – С. 1112–1119.
4. *Стоян Ю.Г.* Оптимізація квадратичних функцій на множині перестановок, відображеній у R^n / *Ю.Г. Стоян, С.В. Яковлєв, О.В. Паршин //* Доповіді АН УРСР : Сер. А. – 1989. – № 5. – С. 73–78.
5. *Стоян Ю.Г.* Квадратичная оптимизация на комбинаторных множествах в R^n / *Ю.Г. Стоян, С.В. Яковлев, О.В. Паршин* // Кибернетика и системный анализ. – 1991. – № 4. – С. 97–104.
6. *Валуйская О.О.* Выпуклые продолжения полиномов на комбинаторных множествах и их приложения / *О.О. Валуйская, О.С. Пичугина, С.В. Яковлев* // Радиоэлектроника и информатика. – 2002. – № 2. – С. 121–129.
7. *Пічугіна О.С.* Програмно реалізований підхід побудови опуклих продовжень поліномів на переставленнях / *О.С. Пічугіна* // Матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції «Інформатика та системні науки (ІСН–2010)», 18–20 березня 2010 р. – Полтава, 2010. – С. 158–161.

ПІЧУГІНА Оксана Сергіївна – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної математики, інформатики та математичного моделювання Полтавського національного технічного університету імені Юрія Кондратюка.

Наукові інтереси:

– евклідова комбінаторна оптимізація;

– математичне моделювання;

– теорія прийняття рішень;

– математична статистика.

Тел.: (067)9512992.

E-mail: pichugina_os@mail.ru.

Подано 20.04.2010

Пічугіна О.С. Метод побудови опуклих продовжень квадратних поліномів на комбінаторних множинах
Пичугина О.С. Метод построения выпуклых продолжений квадратных полиномов на комбинаторных множествах
Pichugina O.S. Method of constructing convex extension quadratic polynomials on combinatorial sets

УДК 519.85

Метод построения выпуклых продолжений квадратных полиномов на комбинаторных множествах / О.С. Пичугина

В статье представлен аналитический метод построения выпуклых продолжений квадратных полиномов, заданных на евклидовых комбинаторных множествах перестановок и полиперестановок, существенно использующий свойства этих множеств и позволяющий при решении комбинаторных задач оптимизации использовать как свойства комбинаторных множеств так и соответствующих многогранников. Представленный метод может быть применен к решению многочисленных практических задач, поскольку значительная часть известных постановок поиска екстремумов полиномов на перестановках касается именно квадратных многочленов.

УДК 519.85

Method of constructing convex extension quadratic polynomials on combinatorial sets / O.S. Pichugina

In the article the analytical method of constructing convex extension quadratic polynomials, given on Euclidean combinatorial sets of permutations and polypermutations, is presented. The approach essentially uses the characteristics of combinatorial sets and allows solve optimization problems with using combinatorial properties of the sets and according polyhedrons. Since majority of known statements of extreme problem for polynomials on permutations are quadratic optimization problems, the presented method allows aplying to solving numerous practical problems.