

МЕТОД ПРОМЕНІВ ПРОВІДНОСТЕЙ ТА МОДЕЛЮВАННЯ ФАНТОМА В ЕЛЕКТРОІМПЕДАНСНІЙ ТОМОГРАФІЇ

У статті розглянуто метод променів провідностей для розв'язання ітераційної задачі, а також моделювання фантома в електроімпедансній томографії.

Вступ. Створення імпедансного томографа для обчислення внутрішнього розподілу опорів (провідностей) усередині досліджуваного об'єкта (суб'єкта) є одним з перспективних напрямків сучасної технічної та медичної діагностики [1–4]. На відміну від відомих та поширених у сучасній медичній та технічній практиці томографів рентгенівських, ядерного магнітного резонансу, гама- та ультразвукових, у яких проходження сигналу-носія інформації через досліджуваний об'єкт прямолінійне, а отримані (зчитані вимірювальними пристроями) сигнали залежать лише від тієї частини речовини, яка знаходиться на цій лінії (траєкторії), в імпедансній томографії струм або напруга певного рівня мають нелінійні траєкторії навіть для досліджуваних однорідних структур, а їх форма й величина визначаються усіма опорами томографічного розтину.

Це зумовлює складність розв'язання як прямої, так і зворотної задачі імпедансної томографії.

Викладення основного матеріалу. Під прямою задачею (аналіз) розуміють обчислення напруг на вимірювальних електродах при відомому розподілі опорів усередині моделі (фантома) томографічного розтину, а також їх вимірювання на реальному об'єкті.

Якщо напруги, отримані в результаті вимірювань та розрахунків, збігаються в наперед заданих межах, то вважають, що модель розтину відповідає дійсному розподіленню опорів у досліджуваному об'єкті.

Якщо між моделлю й об'єктом є суттєві відмінності, то будуть суттєві відмінності й між дійсним розподіленням опорів в об'єкті та його моделлю.

Розв'язання зворотної задачі й полягає в обчисленнях, які мінімізують такі відмінності.

Для мінімізації відмінностей між розрахованими та вимірними напругами на вимірювальних електродах (передаточними опорами об'єкта досліджень) використовують ітераційні процедури. Математичний апарат моделювання фантома при цьому базується на двокроковій дискретизації моделі досліджуваного розтину за методом кінцевих елементів [5–8]. Причому на першому кроці проводиться дискретизація розбиттям фантома на неперервні кінцеві елементи з постійною для кожного з них поверхневою провідністю, які торкаються один одного боками. На другому кроці неперервні кінцеві елементи замінюють їх електричними еквівалентними схемами, які об'єднуються між собою вузлами-вершинами.

Кількість кінцевих елементів M при якісному моделюванні становить сотні-тисячі. Тоді порядок N системи рівнянь вузлових напруг, що описує рівновагу досліджуваного розтину

$$\overline{Y} \overline{U} = \overline{I},$$

теж становитиме сотні-тисячі. Тут \overline{U} – стовпець вузлових напруг розміром $N \times 1$; \overline{Y} – матриця провідностей порядку N ; \overline{I} – стовпець незалежних джерел струму розміром $N \times 1$, в якому (при підключенні джерела до загального вузла) лише один елемент є ненульовим.

Матриця \overline{Y} внаслідок певної структури еквівалентної схеми фантома є сильно розрідженою (не більше 9 елементів рядка є ненульовими), що дозволяє легко обернути її, використовуючи метод модифікацій [9–11].

При розв'язанні зворотної задачі з використанням ітераційної процедури Ньютона–Рафсона [6] слід обчислити якобіан \overline{I} з елементами I_{ij} – похідними від i -го передаточного опору за питомою провідністю j -го кінцевого елемента.

Оскільки кількість M таких кінцевих елементів у фантомі становить сотні-тисячі, то це значно ускладнює складання системи лінійних рівнянь відносно вектора-стовпця шуканих приростів питомих провідностей $\Delta\sigma_i$.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial z^{(1)}}{\partial \sigma_1} & \dots & \frac{\partial z^{(1)}}{\partial \sigma_M} \\ \vdots & & \end{bmatrix}, \tag{1}$$

де $z^{(i)}$ – i -ий передаточний опір із джерела I на електроди по обводу фантома; $\Delta z^{(i)} = z_{вим.}^{(i)} - z^{(i)}$, де $z_{вим.}^{(i)}$ – виміряний на досліджуваному об’єкті передаточний опір.

Для обчислення поточних уточнених приростів провідностей необхідно обернути (на кожній ітерації) матрицю похідних в (1). Оскільки матриця має порядок M сотні-тисячі, то це є значною проблемою. По-перше, матриця похідних є повністю заповненою, по-друге, погано зумовленою як унаслідок великого порядку, так і завдяки тому, що похідні від передаточних провідностей (стовпець матриці похідних), які відповідають кінцевим елементам усередині фантома, будуть відрізнятися дуже мало.

Тому слід провести додаткову структурування фантома з метою збільшення ділянок з однаковою поверхневою провідністю (при зберіганні малих розмірів кожного кінцевого елемента), що приведе до зменшення порядку матриці похідних.

Ідею методу променів провідностей ілюструє рисунок 1.

Нехай фантом має форму круга (рис. 1, а) з відомими поверхневими провідностями $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

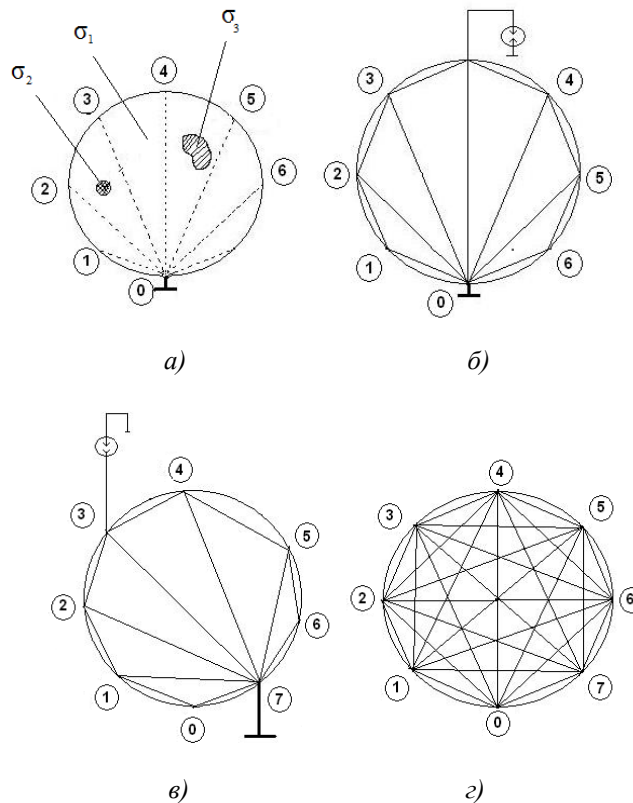


Рис. 1

Якщо розбити фантом (рис. 1, а) на сектори (рис. 1, б), то еквівалентна поверхнева провідність окремого сектора буде близькою до її середнього значення, зумовленого провідністю σ_1 і провідностями σ_2, σ_3 в тих секторах, у які відповідні неоднорідності потрапляють (хоча внаслідок того, що поверхнева провідність кожного сектора залежить від провідностей усіх кінцевих елементів, строгого збігу не буде). Якобiан для фантома на рисунку 1, б в (1) при цьому буде мати порядок 6 (при 16 вимірюваних електродах – відповідно 14), що дасть можливість як формувати матрицю похідних, так і обернути її з великою розрядністю з непомітною трудомісткістю. Більш того, усі передаточні провідності є елементами оберненої матриці $Z_{14}, Z_{24}, Z_{34}, Z_{54}, Z_{64}, Z_{74}$.

В ітераційній процедурі обчислимо (1) всі прирости, результати вимірювань і обчислень збігаються із заданою заздалегідь точністю, для чого для кожного нового поточного значення провідності $\sigma_i^{(n+1)} = \sigma_i^{(n)} + \Delta\sigma_i$ слід розв'язати пряму задачу.

Після обчислень усіх поверхневих провідностей для фантома (рис. 1, б) обернемо вузли підключення джерела струму, як це показано на рисунку 1, в. Після чого виміряємо напруги (передаточні опори) для нового положення джерела струму.

І знову в ітераційній процедурі, склавши якобіан, розрахуємо для схеми (рис. 1, в) поверхневі провідності $\sigma_{ie}^{(2)}$. Цю процедуру повторимо для усіх можливих полярно протилежних положень джерела струму. Усі 8 з отриманих фантомів (при 16 електродах їх буде 16) накладемо один на один, як це прийнято для зворотної проєкції в рентгенівській томографії. На відміну від методу зворотної проєкції, в імпедансній томографії метод променів провідностей оперує обчисленими в ітераційній процедурі дійсними для кожної проєкції поверхневими провідностями, а не передаточними опором, які є складними функціями таких провідностей. Крім того, отримані значення σ_i не залежать від траєкторій ліній рівного струму або рівної напруги, які за наявності неоднорідностей невідомим чином спотворюються, порівняно з фантомом без цих неоднорідностей. Метод променів провідностей дозволяє представити пряму та зворотну задачу імпедансної томографії як задачі оптичні, що дозволяє порівнювати цей вид томографії з відомими оптичними РТГ КТ, гама-томографією, ЯМР тощо.

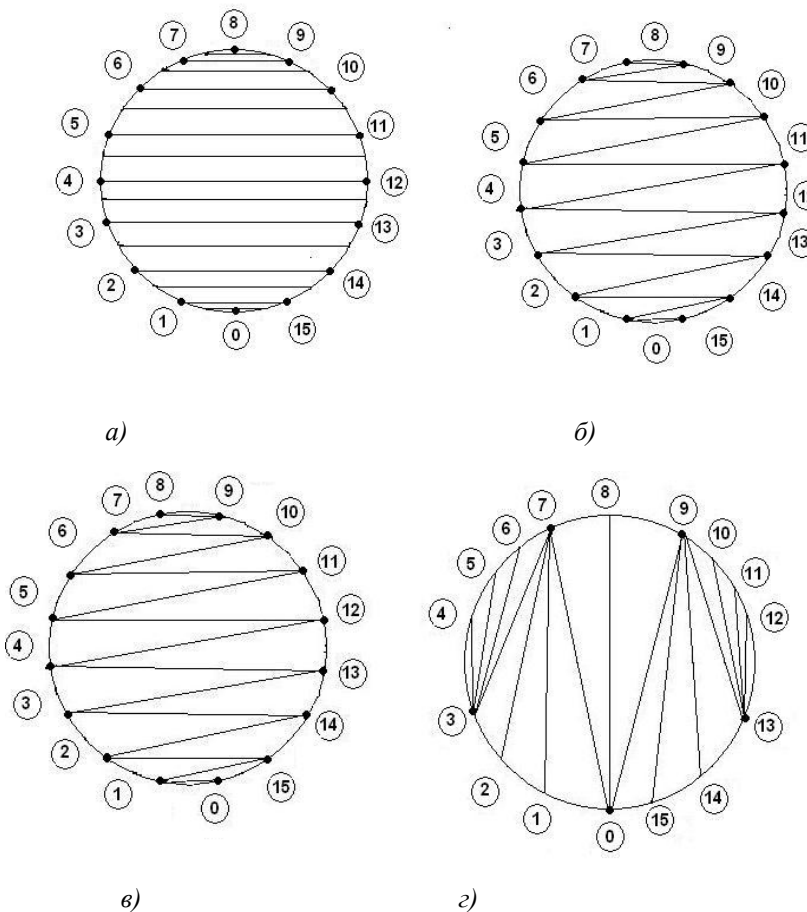


Рис. 2

Найбільший зиск метод променів провідностей дає у зменшенні трудомістких операцій та у спрощенні розв'язуваних рівнянь.

Так 16 разів реалізувати ітераційну процедуру для розрахунку провідностей фантомів (рис. 1, а, б) для якобіана 14 порядку значно легше, ніж один раз отримати результат в ітераційній процедурі з якобіаном порядку сотень-тисяч.

Як видно з накладання сіток для 8 фантомів із променями провідностей (рис. 1, г), елементи зображення (результуючі пікселі) мають у центрі фантома більші розміри, ніж по боках, що відповідає умовам вимірювань (менша різниця похідних для кінцевих елементів усередині фантома, ніж по його боках).

Крім променів провідностей, одержаних розбиттям фантома, як це показано на рисунку 1, б, можливі інші конфігурації променів (рис. 2).

При цьому підключення джерела струму може бути як до протилежних, так і до суміжних та інших вузлів.

Чутливість окремих секторів томографічного розтину до неоднорідностей у середині фантома залежить як від конфігурації секторів (рис. 2), так і від розташування неоднорідностей та вузлів підключення джерела струму.

Електричну модель квадратного кінцевого елемента (рис. 3), з яких складається кожен сектор фантома (рис. 1, б, 2), отримано з розбиття квадрата зі стороною a на чотири прямокутних трикутники.

Після еквівалентних перетворень одержано матрицю провідностей системи рівнянь вузлових напруг квадратного кінцевого елемента (рис. 3, б) та обернену матрицю, які мають вигляд:

$$\overline{Y}_{\square} = \begin{bmatrix} 17-6\cdot\sqrt{2} & -9+4\cdot\sqrt{2} & 1-2\cdot\sqrt{2} \\ -9+4\cdot\sqrt{2} & 17-6\sqrt{2} & -9+4\cdot\sqrt{2} \\ 1-2\cdot\sqrt{2} & -9+4\cdot\sqrt{2} & 17-6\cdot\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \overline{Z}_{\square} = \begin{bmatrix} 6-\sqrt{2} & 4-\sqrt{2} & 2 \\ 4-\sqrt{2} & 8-2\sqrt{2} & 4-\sqrt{2} \\ 2 & 4-\sqrt{2} & 6-\sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

де $A=32-4\sqrt{2}$; $B=8$; $k=2/\sigma_i$; α ; σ_i – поверхнева провідність кінцевого елемента, причому для частот $f < 100$ кГц σ_i можна вважати дійсним числом, а на частотах $f > 300$ кГц – комплексним.

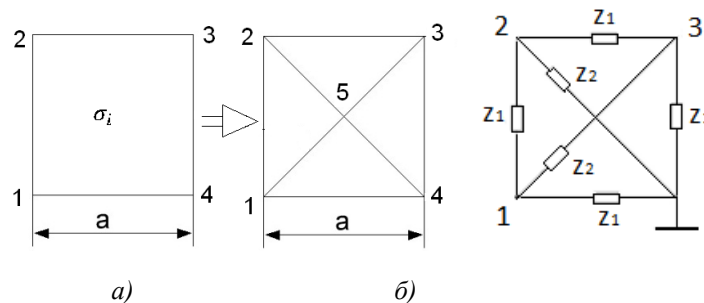


Рис. 3

При цьому $y_1 = 1/z_1 = \frac{-4\sqrt{2}+9}{k(32-4\sqrt{2})}$; $y_2 = 1/z_2 = \frac{2\sqrt{2}-1}{k(32-4\sqrt{2})}$.

Якщо пронумерувати вузли по зовнішньому контуру фантома, як це показано на рисунках 1, 2, то обернену матрицю \overline{Z} фантома можна представити у блочному вигляді:

$$\overline{Z} = \begin{bmatrix} \overline{Z}_{00} & \overline{Z}_{0y} \\ \overline{Z}_{y0} & \overline{Z}_{yy} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

де \overline{Z}_{00} – блок оберненої матриці 15 порядку (при 16 вимірювальних електродах); \overline{Z}_{0y} , \overline{Z}_{y0} – прямокутні матриці розмірами $15 \times (N-15) \times 15$; \overline{Z}_{yy} – квадратна матриця порядку $(N-15)$; N – порядок матриці.

Враховуючи, що після вирішування за методом модифікацій на базі оберненої матриці кінцевого елемента оберненої матриці сектора багато вузлів усередині цього сектора, як і вузлів по зовнішньому обводу фантома, що належать до цього сектора і номера яких не збігаються з номерами електродів, є внутрішніми і не впливають на подальші розрахунки. Рядки та стовпці з номерами, що збігаються з номерами внутрішніх вузлів, з оберненої матриці для сектора слід викреслити.

Це призводить до значного зменшення порядку оберненої матриці сектора.

Після вирішування зв'язків між секторами отримаємо матрицю \overline{Z} , порядок N якої значно менший, ніж кількість вузлів фантома.

Оскільки при обчисленні похідних від передаточних опорів, які для підключення електродів джерела струму між загальним вузлом 0 і протилежним йому l -им вузлом на зовнішньому обводі фантома збігаються з одним стовпцем матриці \overline{Z}_{00} (без елемента Z_{ll}), то диференціювати слід лише один l -ий стовпець цієї матриці.

Для l -го стовпця \overline{z}_l матриці \overline{z}_{00} формула для обчислення похідних від його елементів за провідністю d -го сектора σ_d матиме вигляд:

$$\frac{\partial z_l}{\partial \sigma_d} = - \begin{bmatrix} \overline{z}_{00} & \overline{z}_{0y} \end{bmatrix} \cdot \overline{\Psi} \cdot \overline{z}_l, \quad (4)$$

де $\overline{\Psi}$ – матриця провідностей системи рівнянь вузлових напруг d -го сектора порядку N (тобто сформована за правилами формування матриці \overline{Y} , але з урахуванням провідностей тільки матриці d -го сектора), в якій замість множника $1/k$ (2) перед результуючою матрицею стоїть множник $1/m = 1/k\sigma_1$.

Отже, загальний алгоритм реконструкції образу в імпедансній томографії на базі методу променів провідностей має такий вигляд:

1. Розбити фантом томографічного розтину досліджуваного об'єкта на квадратні кінцеві елементи (пікселі зображення) і пронумерувати вершини квадратів. При цьому перші 16 номерів (починаючи з нуля) надати вершинам, до яких під'єднані джерела струму й сигнальні електроди.

2. Розбити дискретизований фантом на сектори згідно з обраним способом (рис. 1, в, рис. 2). Причому в точках розбиття (вершинах квадратів) надати новим вершинам, що з'явилися, номери зі штрихом.

3. Надати номер сектора $b = 1$.

4. Для кожного із секторів (без урахування вагових коефіцієнтів k) обчислити обернену матрицю провідностей системи рівнянь вузлових напруг на базі оберненої матриці (2) еквівалентної схеми одного кінцевого елемента, використовуючи метод модифікацій.

5. Викреслити з отриманої оберненої матриці сектора всі рядки та стовпці, номери яких збігаються з номерами внутрішніх вузлів сектора, отримавши "скорочену" обернену матрицю.

6. Обернути скорочену матрицю сектора $\overline{G}_b = \overline{R}_b^{-1}$, наприклад, методом Гауса.

7. Якщо $b < B$ (B – кількість секторів променів провідностей), то $b = b + 1$; повернутися до п. 4 алгоритму. Якщо $b = B$, то перейти до п. 9.

8. Прийняти $m = 1$.

9. Надати значення провідності b -го сектора ($\sigma_b = \sigma_0$).

10. Для кожної зі скорочених обернених матриць секторів провести їх зважування ваговими коефіцієнтами $k_b = S / \alpha \sigma_b$.

11. Послідовно між сусідніми секторами, починаючи з $b = 1$, виростити нескінченні провідності між одноіменними вузлами зі штрихом та без штриха. В отриманій таким чином оберненій матриці всього фантома викреслити всі рядки та стовпці, номери яких позначені цифрами зі штрихом, і отримати матрицю \overline{Z} .

12. Сформувати стовпець шуканих передаточних опорів \overline{Z}_L .

13. Знайти різницю між вимірними та обчисленими для фантома передаточними опорами $\overline{z}_l - z_{вим.} = \Delta z$ та обчислити обрану норму нев'язки.

14. Якщо норма нев'язки є меншою від заздалегідь заданого граничного значення похибки, то перейти до п. 22 алгоритму.

15. Надати $h = 1$.

16. Сформувати матрицю $\overline{\Psi}_{ck}$ порядку N за матрицею провідностей \overline{G}_h (в п. 6).

17. Обчислити стовпець похідних від передаточних опорів за поверхневою провідністю h -го сектора за (4).

18. Якщо $h < B$, то $h = h + 1$; перейти до п. 16.

19. На базі обчислених стовпців похідних від передаточних провідностей за поверхневими провідностями обчислити матрицю похідних (1) порядку 14 (для 16 вимірних електродів).

20. За формулою

$$\overline{\Delta \sigma} = - \left(\frac{\partial z^{(d)}}{\partial \sigma_h} \right)^{-1} \cdot \overline{\Delta z}$$

обчислити коригуючі прирости поверхневих провідностей усіх секторів.

21. Обчислити нові значення провідностей секторів $\sigma_b = \sigma_b + \Delta \sigma_b$, $b = 1, 2, \dots, B$ і перейти до п. 10 алгоритму.

22. Для поверхневих провідностей, отриманих у п. 21, утворити масив їх значень.
23. Якщо $m < 16$ (при 16 вимірювальних електродах), то $m = m + 1$; якщо ні, то перейти до п. 26.
24. Обернути на один крок вузли підключення джерела струму.
25. Перейти до п. 9 алгоритму.
26. Накласти образи всіх променів провідностей, знайдених у п. 22 на фантомах (рис. 1, б, 2).

Висновки:

1. Метод променів провідностей є засобом додаткової структуризації і дозволяє значно зменшити кількість рівнянь похідних, що забезпечує підвищену швидкодію і точність розв'язання ітераційної задачі.

Значно легше 16 разів розв'язати ітераційні задачі для системи рівнянь 14 порядку, ніж один раз – для системи рівнянь 1000 порядку.

2. На відміну від методу зворотної проєкції, метод променів провідностей оперує дійсними (а не відносними) значеннями поверхневої провідності кінцевих елементів.

3. Упорядкування променів за рахунок їх відповідної геометричної форми не є недоліком, порівняно з методом зворотної проєкції, оскільки траєкторії ліній рівного струму або рівної напруги, які використовують у методі зворотної проєкції за наявності додаткових неоднорідностей, спотворюються невідомим чином.

4. Образи, одержувані за методом променів провідностей (як і у випадку зворотної проєкції), потребують подальшої реставрації для одержання якісних рисунків внутрішнього розподілення опорів у томографічному розтині.

5. В роботі розглянуто лише плоску модель розтину. Зрозуміло, що струм джерела протікає не лише у площині, а в деякому об'ємі. Тому на плоский образ будуть накладатися проєкції від струмів у деякому об'ємі досліджуваного об'єкта.

Врахування цього явища вимагає створення об'ємної моделі кінцевого елемента й багаточарового фантома.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Cheney M. Distinguishability in impedance imaging / M.Cheney, D.Isaacson // IEEE Trans. Biomed. Eng. – 1992. – Vol. 39. – Pp. 852–860.
2. Brown B.H. Electrical Impedance Tomography (The Inst. of Phys. Sci. in Medicine, York) / B.H. Brown, D.C. Barber // Clinical Physics and Physiological Measurement. – 1992. – Vol. 13, Suppl. A. – P. 207.
3. Электроимпедансная томография / Я.С. Пеккер, К.С. Брадовский, В.Ю. Усов и др. – Томск : изд-во НТЛ, 2004. – 192 с.
4. Cheney M. Electrical Impedance Tomography / M.Cheney, D.Isaacson, J.C. Newell // SJAM Review. – 1999. – Vol. 41, № 1. – Pp. 85–101.
5. Сильвестр П. Метод конечных элементов для радиоинженеров и инженеров-электриков / П.Сильвестр, Р.Феррари. – М. : Мир, 1986. – 229 с.
6. Muray T. Electrical Impedance Computed Tomography Based on a Finite Elements Model / T.Muray, Y.Kagawa // IEEE Trans. On Biomed Eng. – 1985. – Vol. 32. – Pp. 177–184.
7. Finite Element Optimization for Efficient Non-Linear Electrical Tomography Reconstruction / M.Molinari, H.Fangohr, J.Generowicz, S.J. Cox // 2nd World Congresson Industrial Process Tomography, 29–31 August 2001. Hannover, Germany. – 2001. – Pp. 406–417.
8. Рыбин А.И. Восстановление образа в импедансной томографии на базе метода конечных элементов / А.И. Рыбин, Н.А. Холоденко // Радиоэлектроника. – 1996. – № 7. – С. 38–47.
9. Рыбин А.И. Решение задач моделирования обращением матрицы методом взаимных производных / А.И. Рыбин // Радиоэлектроника. – 1978. – № 6. – С. 35–47
10. Рыбин А.И. Численно-символьный метод анализа электрических цепей обобщенным методом модификаций / А.И. Рыбин // Праці Інституту електродинаміки НАН України : зб. наук. праць. – К. : ІЕД НАНУ, 2002. – № 1(1). – С. 26–30.
11. Основы теории квл : підр. / Ю.О. Коваль, Л.В. Гринченко, І.О. Милютченко, О.І. Рибін ; за заг. ред. В.М. Шокала та В.І. Правди. – Ч. 2. – Харків : ХНУРЕ; Колегіум, 2006. – 688 с.

РИБІНА Ірина Олександрівна – аспірантка Національного технічного університету України “КПІ”.

Наукові інтереси:

- електроімпедансна томографія;
- моделювання фантома.

Подано 17.04.2010

Рибіна І.О. Метод променів провідностей та моделювання фантома в електроімпедансній томографії
Рыбина И.А. Метод лучей проводимости и моделирование фантома в электроимпедансной томографии