

УДК 629.7.054

В.М. Мельник, к.т.н., доц.

В.В. Карачун, д.т.н., проф.

Національний технічний університет України «КПІ»

ДВОВИМІРНА ЗАДАЧА ПРУЖНОЇ ДЕФОРМАЦІЇ ПОВЕРХНІ ОБОЛОНКИ ВНАСЛІДОК ДИФРАКЦІЇ ЗОВНІШНІХ ЗВУКОВИХ ХВИЛЬ НА ЩІЛИНІ

Обчислюються координатні функції пружної циліндричної оболонки за умови впливу на неї зовнішньої акустичної хвилі тиску. Уточнюються величини пружних переміщень поверхні зовнішньої оболонки та їх вплив на динаміку внутрішнього абсолютно твердого циліндра.

Розглянуто цікавий для практики випадок надходження збурення крізь щілину заданих розмірів.

Постановка проблеми. Дослідження останніх років переконливо підтверджують наявність впливу зовнішнього акустичного випромінювання на механічні системи приладів та апаратури. Причому, як з'ясувалося, являє практичний інтерес не тільки питання міцності матеріалу, скільки вплив виникаючої акустичної вібрації поверхні на динаміку і стан конструкції. Особливо небезпечними ці явища постають за наявності носіїв кінетичного моменту.

У своїй сукупності вимушені коливання можуть призвести, за певних умов, до виникнення особливостей резонансного прояву. Виходячи з цього, опис і осмислення явища постає нагальною проблемою.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми. Питання пружної взаємодії акустичного випромінювання отримали розвиток, в основному, при вивченні приладів і устаткування рухомих об'єктів [2, 3]. Побудовані розрахункові моделі явища [4], з'ясовано механізм впливу на конструкцію підвісу носіїв кінетичного моменту [5], визначена аналітична будова нелінійних коливань [6], запропоновані ефективні засоби звукоізоляції [7].

Вивчення явища, побудова моделей йшли найбільш узагальненим шляхом – акустична хвиля сприймалася всією поверхнею. Разом з тим, з точки зору практичних заходів, являє неабиякий інтерес вивчення такого варіанта схеми, коли акустичне збурення потрапляє на пружну поверхню крізь шпарину. Між іншим, така модель має місце за натурних умов не менше, ніж перша.

Докладний опис явища має за мету побудову розрахункової моделі для обраних початкових умов визначення нелінійних коливань рухомої частини та оцінку ступеня впливу параметрів системи на їх характер.

Основний матеріал досліджень. Рівняння пружної поверхні зовнішньої оболонки за нормального падіння хвилі тиску запишемо у вигляді [1]:

$$\begin{aligned} (\omega^2 \rho - m^2) V_m(x) + \frac{1-\sigma}{2} V_m''(x) + im W_m(x) &= 0 \\ im V_m(x) + \left(\omega^2 \rho + 1 + \frac{c^2 m^4}{r^4} \right) W_m(x) - \frac{2c^2 m^2}{r^2} W_m''(x) + c^2 W_m^{IV}(x) &= F_m(x), \end{aligned} \quad (1)$$

де V, W – відповідно тангенціальні та радіальні переміщення поверхні; σ – коефіцієнт Пуасона; x, β – безрозмірні координати в долях радіуса оболонки R ; h_0 – товщина оболонки; $c^2 = \frac{h_0^2}{12R^2}$; $0 < R_1 < r < R_2$; $0 < x < h$; $m = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$; m – кількість напівхвиль в площині шпангоута; ω – частота падаючої хвилі; ρ – коефіцієнт.

Мається на увазі, що збурююча хвиля надходить до зв'язаних пружною в'яззю оболонок крізь щілину довжиною $2L$ із центральним кутом β (рис. 1).

Зовнішня пружна оболонка безпосередньо через пружну в'язь c_1 передає коливання поверхні внутрішній абсолютно твердій оболонці.

Якщо визначену функцію $F(x_0, x, \beta, t)$, а також шукані функції $V(x_0, x, \beta, t)$ і $W(x_0, x, \beta, t)$ записати у вигляді тригонометричних рядів Фур'є за змінною β ($0 \leq \beta \leq 2\pi$)

$$\begin{aligned} F(x, x_0, \beta, t) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} F_m(x) \exp(im\beta), \\ V(x, x_0, \beta, t) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} V_m(x) \exp(im\beta), \end{aligned} \quad (2)$$

$$W(x, x_0, \beta, t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} W_m(x) \exp(im\beta),$$

тоді для $m \neq 0$ з першого рівняння системи (1) маємо:

$$\begin{aligned} mW_m(x) &= i(\omega^2 \rho - m^2)V_m(x) + i\frac{1-\sigma}{2}V_m'(x); \\ mW_m''(x) &= i(\omega^2 \rho - m^2)V_m''(x) + i\frac{1-\sigma}{2}V_m^{IV}(x); \\ mW_m^{IV}(x) &= i(\omega^2 \rho - m^2)V_m^{IV}(x) + i\frac{1-\sigma}{2}V_m^{IV}(x). \end{aligned} \quad (3)$$

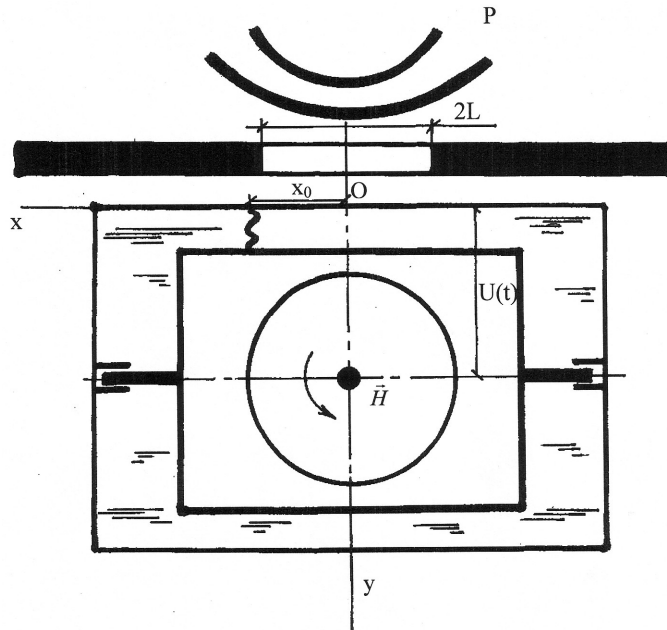


Рис. 1. Дифракція акустичної хвилі на цилінді довжиною $2L$

Підставивши означені співвідношення (3) в друге рівняння системи (1), отримаємо:

$$\begin{aligned} &\left[(\omega^2 \rho - m^2) \left(\omega^2 \rho + 1 + \frac{c^2 m^4}{r^4} \right) + m^2 \right] V_m(x) + \\ &\left[\frac{1-\sigma}{2} \left(\omega^2 \rho + 1 + \frac{c^2 m^4}{r^4} \right) - \frac{2c^2 m^2}{r^2} (\omega^2 \rho - m^2) \right] V_m'(x) + \\ &+ c^2 \left[(\omega^2 \rho - m^2) - \frac{2m^2}{r^2} (\omega^2 \rho - m^2) \right] V_m^{IV}(x) + \\ &+ c^2 \frac{1-\sigma}{2} V_m^{IV}(x) = -imF_m(x). \end{aligned} \quad (4)$$

Введемо позначення:

$$\begin{aligned} \frac{2}{c^2(1-\sigma)} \left[(\omega^2 \rho - m^2) \left(\omega^2 \rho + 1 + \frac{c^2 m^4}{r^4} \right) + m^2 \right] &= S_{m,1}; \\ \frac{1}{c^2} (\omega^2 \rho + 1) + \frac{m^4}{r^4} - \frac{4m^2}{1-\sigma} (\omega^2 \rho - m^2) &= S_{m,2} \\ \frac{2}{1-\sigma} (\omega^2 \rho - m^2) \left(1 - \frac{2m^2}{r^2} \right) &= S_{m,4}; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\frac{-2mi}{c^2(1-\sigma)} F_m(x) = h_m(x),$$

$$m = \pm 1, \pm 2, \dots$$

У результаті для функції $V_m(x)$ складаємо наступні рівняння шостого порядку зі сталими коефіцієнтами –

$$S_{m,1}V_m(x) + S_{m,2}V_m''(x) + S_{m,4}V_m^{IV}(x) + V_m^{IV}(x) = h_m(x). \quad (5)$$

Зінтегрувавши це рівняння, можна обчислити $W_m(x)$ простим диференціюванням розв'язку $V_m(x)$, як це вказано в першому рівнянні системи (1). Оскільки функція $f(x, x_0, \beta, t)$ знайдена раніше, визначити величину $U(x, x_0, \beta, t)$ можна із вже наведеного співвідношення

$$f(x, x_0, \beta, t) = c_1 [U(x, x_0, \beta, t) - W(x, x_0, \beta, t)].$$

Знайдемо розв'язки рівняння (5), обмежені при $x \rightarrow \pm\infty$, опускаючи в подальшому індекси “ m ”.

Рівнянню (5) відповідає характеристичний поліном

$$\lambda^6 + S_4\lambda^4 + S_2\lambda^2 + S_1 = 0, \quad (6)$$

який запишемо у вигляді –

$$z^3 + S_4z^2 + S_2z + S_1 = 0, \quad (7)$$

де $\lambda^2 = z$.

Формули (4) вказують, що коефіцієнти рівнянь (6), (7) парні відносно m . Тому рівняння (7) може мати:

- три простих корені;
- один простий і один двократний корінь;
- один трикратний корінь.

Відповідно до цього рівняння (6) буде мати:

- шість простих коренів;
- два простих і два двократних корені;
- два трикратних корені.

Спочатку розглянемо перший випадок, коли всі корені рівняння (6) прості.

$$\lambda_j = \alpha_j + i\nu_j, \quad j = \overline{1,6}. \quad (8)$$

Або

$$\lambda_j = \alpha_j + i\nu_j = \lambda_{mj} = \alpha_{mj} + i\nu_{mj}. \quad (9)$$

Не виключено, що деякі з них знаходяться на уявній осі, тобто

$$\lambda_k = i\nu_k, \quad \alpha_k = 0.$$

Загальний розв'язок однорідного рівняння виразу (5) має вигляд –

$$V_{01}(x) = \sum_{j=1}^6 a_j \exp(\lambda_j x), \quad (10)$$

де a_j – довільні сталі.

Реакція динамічної системи (5) на одиничний імпульс буде такою –

$$g(x) = \sum_{j=1}^6 b_j \exp(\lambda_j x). \quad (11)$$

Функція $g(x)$ задовольняє однорідне рівняння виразу (5) і початкові умови вигляду –

$$g(0) = g'(0) = g''(0) = g'''(0) = g^{IV}(0) = 0; \quad g^V(0) = 1. \quad (12)$$

Тоді

$$b = colon(b_1 \ b_2 \ b_3 \ b_4 \ b_5 \ b_6) -$$

є розв'язок наступної системи лінійних алгебраїчно рівнянь:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \lambda_5 & \lambda_6 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \lambda_4^2 & \lambda_5^2 & \lambda_6^2 \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & \lambda_3^3 & \lambda_4^3 & \lambda_5^3 & \lambda_6^3 \\ \lambda_1^4 & \lambda_2^4 & \lambda_3^4 & \lambda_4^4 & \lambda_5^4 & \lambda_6^4 \\ \lambda_1^5 & \lambda_2^5 & \lambda_3^5 & \lambda_4^5 & \lambda_5^5 & \lambda_6^5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \quad (13)$$

Визначник цієї системи – визначник Вандермонда. Оскільки ваги чисел λ_j різні, цей визначник не дорівнює нулю. Таким чином, система однозначно може бути розв’язаною.

Частковий розв’язок неоднорідного рівняння (5) виглядає так:

$$V_{02}(x) = \sum_{j=1}^6 b_j \exp(\lambda_j x) \int_0^x \exp(-\lambda_j \xi) h(\xi) d\xi, \quad (14)$$

а повний розв’язок запишеться у формі –

$$V_0(x) = V_{01}(x) + V_{02}(x) = \sum_{j=1}^6 \exp(\lambda_j x) \left\{ a_j + b_j \int_0^x \exp(-\lambda_j \xi) h(\xi) d\xi \right\}. \quad (15)$$

Розв’язки шукаємо обмеженими на всій осі $-\infty < x < +\infty$, а носій функції $h(x)$ є сегмент $-L \leq x \leq L$.

Якщо корінь λ_j знаходиться на уявній осі, то $\alpha_j = \text{Re } \lambda_j = 0$, $\lambda_j = i\nu_j$. Тоді α_j залишимо довільним.

Якщо ж $\text{Re } \lambda_j \neq 0$, то α_j обираємо наступним чином:

$$a_j = -b_j \int_0^{L \text{sign } a_j} \exp(-\lambda_j \xi) h(\xi) d\xi. \quad (16)$$

Тоді

$$a_j + b_j \int_0^x \exp(-\lambda_j \xi) h(\xi) d\xi = -b_j \int_x^{L \text{sign } a_j} \exp(-\lambda_j \xi) h(\xi) d\xi. \quad (17)$$

В результаті цього, сукупність потрібних розв’язків неоднорідного рівняння (5) виявиться наступною:

$$\begin{aligned} V_m(x) = & \sum_{j=1}^6 \exp(i\nu_j x) \left\{ a_j + b_j \int_0^x \exp(-i\nu_j \xi) h(\xi) d\xi \right\} - \\ & - \sum_{j=1}^6 b_j \exp(-\lambda_j x) \cdot b_j \int_x^{L \text{sign } a_j} \exp(-\lambda_j \xi) h(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (18)$$

де $h(\xi) = h_m(\xi)$; $\lambda_j = \alpha_j + i\nu_j = \lambda_{mj} = \alpha_{mj} + i\nu_{mj}$; $\text{Re } \lambda_j = \alpha_j \neq 0$.

При цьому можливі наступні чотири варіанти конструкції формули (18):

- рівняння (7) має три різні від’ємні корені. В цьому випадку рівняння (6) налічує три різні пари чисто уявних коренів (не рівних нулю) комплексно спряжених. В цьому випадку перша сума буде мати шість доданків, а друга буде відсутня;

- рівняння (7) має два різні від’ємні корені і один додатний. Тоді рівняння (6) буде мати дві різних пари чисто уявних і не рівних нулю комплексно спряжених коренів, а два інших – дійсні (один додатний, інший від’ємний). В цьому випадку перша сума буде мати чотири доданки, друга – два;

- рівняння (7) має один від’ємний корінь. Два інші його корені різні. Тоді рівняння (6) буде мати одну пару чисто уявних, не рівних нулю, комплексно-спряжених коренів, а решта його коренів не будуть знаходитись на уявній осі – два у лівій, два у правій півплощинах. Перша сума в цьому випадку має два доданки, друга – чотири;

- рівняння (7) не має від’ємних коренів. Тоді рівняння (6) не буде мати чисто уявних коренів, а лише три корені в лівій і три у правій півплощинах. Перша сума буде відсутньою, друга – матиме чотири доданки.

Уточнимо поведінку розв’язків (18) поза носієм функції $h(x)$, тобто поза вікном $-L \leq x \leq L$, коли $h(x) \equiv 0$.

Якщо $L \leq x < +\infty$, тоді перша сума у виразі (18) набуває вигляду:

$$\sum_{j=1}^6 (a_j + b_j p_j) \exp(i\nu_j x); \quad (19)$$

$$p_j = \int_0^{def L} \exp(-iv_j) h(\xi) d\xi,$$

$$\operatorname{Re} \lambda_j = \alpha_j = 0.$$

В цій сумі стільки доданків, скільки коренів рівняння (6) знаходяться на уявній осі. Якщо таких коренів немає, тоді ця сума відсутня.

При $\operatorname{Re} \lambda_j = \alpha_j > 0$ і $L \leq x \leq +\infty$

$$\int_x^{L \operatorname{sign} a_j} \exp(-\lambda_j \xi) h(\xi) d\xi = - \int_L^x \exp(-\lambda_j \xi) h(\xi) d\xi = 0, \quad (20)$$

де $\forall x: L < x < +\infty$.

Тому друга сума, якщо вона присутня у виразі (18), буде такою:

$$\sum_{j=1}^6 b_j c_j \exp(\lambda_j x);$$

$$c_j = \int_{-L}^{def L} \exp(-\lambda_j \xi) h(\xi) d(\xi) = 0, \quad (21)$$

$$\operatorname{Re} \lambda_j = \alpha_j = 0.$$

Вона буде прямувати до нуля за умови $x \rightarrow +\infty$ разом із усіма своїми похідними по змінній x .

Таким чином, при $L < x < +\infty$

$$V_m(x) = \sum_{j=1}^6 (a_j + b_j p_j) \exp(iv_j x) + \sum_{j=1}^6 b_j c_j \exp(\lambda_j x); \quad (22)$$

$$\operatorname{Re} \lambda_j = \alpha_j = 0; \operatorname{Re} \lambda_j = \alpha_j < 0.$$

Аналогічно, якщо $-\infty < x < -L$:

$$V_m(x) = \sum_{j=1}^6 (a_j - b_j q_j) \exp(iv_j x) + \sum_{j=1}^6 b_j c_j \exp(\lambda_j x); \quad (23)$$

$$\operatorname{Re} \lambda_j = \alpha_j = 0, \operatorname{Re} \lambda_j = \alpha_j > 0,$$

де $q_j = \int_{-L}^0 \exp(-iv_j \xi) h(\xi) d(\xi)$.

Якщо у формулах (22) і (23) перша сума присутня, тоді вона осцилює, а друга – прямує до нуля в першій формулі при $x \rightarrow +\infty$, а в другій формулі – при $x \rightarrow -\infty$ разом з усіма їх похідними по змінній x .

Таким чином, випадок відсутності кратних коренів рівняння (7) проаналізовано повністю.

Висновки. Таким чином, побудована математична модель примусового руху абсолютно твердої оболонки під дією проникаючої хвилі акустичного тиску. Визначені закономірності дозволяють проведення кількісного і якісного аналізу з наступним узагальненням шляхів і методів ізоляції.

Базуючись на отриманих результатах, можна аналізувати не тільки власне рух внутрішнього циліндра, але використовувати отримані теоретичні надбання для оцінки похибок чутливих елементів з подібною механічною моделлю. Нарешті з'являється наукове підґрунтя синтезу інваріантних систем.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Карачун В.В. Многомерные задачи стационарной упругости подвеса поплавкового гироскопа / В.В. Карачун, В.Г. Лозовик, Е.Р. Потанова и др. / МОН України; Нац. техн. ун-т України «КПІ». – К.: Корнейчук, 2000. – 128 с.
2. Карачун В.В. Напряженно-деформированное состояние поверхности круговой цилиндрической оболочки под действием акустической волны / В.В. Карачун, В.Г. Лозовик // Пробл. прочности. – 1997. – № 3. – С. 139–144.
3. Karachun V.V. To the Aspect of Influence of Acoustic Emission of Space Apparatus March Engines to the Elements of Construction / V.V. Karachun, V.V. Yankovoy, V.N. Kolosov // Proceeding of Fourth Ukraine-Russia-China symposium on space science and technology. Ukraine, September 12–17, 1996. – P. 721.
4. Karachun V.V. Resilient interaction of external acoustical emission with mechanical systems of management devices / V.V. Karachun, V.V. Yankovoy, E.R. Potanova // Ankara International Aerospace conference. 19–21 September, 1996. – P. 317–319.

5. *Potapova E.R. Problems of Acoustic Elasticity of Carriers' Board Equipment / E.R. Potapova, V.V. Karachun, V.N. Melnik // The fifth Sino-Russian-Ukrain simposium on space science and technology held jointly with the first international forum on aspronautics and aeronautics. 6–9 June, 2000. – Harbin Institute of Technology, Harbin, P.R. China. – P. 350–355.*
6. *Карачун В.В. Дифракция звуковых волн на подвесе гироскопа / В.В. Карачун, В.Г. Лозовик, В.Н. Мельник ; Нац. техн. ун-т Украины «КПИ». – К. : Корнейчук, 2000. – 176 с.*
7. *Шумозахисний кожух : Пат. 39599 А, Україна : G10 K11/16. – 200116168 / В.В. Карачун, М.С. Тривайло, В.М. Мельник ; заявл. 01.11.2000 ; опубл. 15.06.2001, Бюл. № 5. – 1 с.*

МЕЛЬНИК Вікторія Миколаївна – кандидат технічних наук, Лауреат премії Національної академії наук України для молодих вчених, доцент кафедри біотехніки та інженерії Національного технічного університету України «КПИ».

Наукові інтереси:

– динаміка бортової апаратури рухомих об'єктів.

КАРАЧУН Володимир Володимирович – доктор технічних наук, завідувач кафедри біотехніки та інженерії Національного технічного університету України «КПИ».

Наукові інтереси:

– динаміка приладів і систем інерціальної навігації.

Подано 07.12.2009

Мельник В.М., Карачун В.В. Двовимірна задача пружної деформації поверхні оболонки внаслідок дифракції зовнішніх звукових хвиль на щілині

Мельник В.М., Карачун В.В. Двумерная задача упру гой деформации поверхности оболочки вследствие дифракции внешних звуковых волн на щели

Mel'nick V.N., Karachun V.V. Dvumernaya task of resilient deformation of surface of shell because of diffraction of external sound-waves on a crack

УДК 629.7.054

Двумерная задача упругой деформации поверхности оболочки вследствие дифракции внешних звуковых волн на щели / В.М. Мельник, В.В. Карачун

Вычисляются координатные функции упругой цилиндровой оболочки при условии влияния на нее внешней акустической волны давления. Уточняются величины упругих перемещений поверхности внешней оболочки и их влияние на динамику внутреннего абсолютно твердого цилиндра.

Рассмотрен интересный для практики случай п возмущениоявления сквозь щель заданных размеров.

УДК 629.7.054

Dvumernaya task of resilient deformation of surface of shell because of diffraction of external sound-waves on a crack / V.N. Mel'nick, V.V. Karachun

The coordinate functions of resilient cylinder shell are calculated on condition of influence on it of external acoustic wave of pressure. The sizes of the resilient moving of surface of external shell and their influence are specified on the dynamics of internal absolutely hard cylinder.

The interesting for practice case of receipt of indignation through the crack of the set sizes is considered