УДК 519.67

С.І. Яремчук, к.ф.-м.н., доц.
Ю.О. Шаповалов, к.т.н.
В.В. Охмак, студ.
Житомирський державний технологічний університет

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ G-ПРОЕКЦІЇ ДЛЯ ОПТИМІЗАЦІЇ РОЗМІЩЕННЯ ПРЯМОКУТНИКІВ В ОБЛАСТІ СКЛАДНОЇ ФОРМИ

Розглядається задача оптимізації розміщення прямокутних об’єктів на області, що має форму деформованого прямокутника. Наведено математичну модель задачі та метод її розв’язання з використанням методу G-проекції.

Вступ. Задачі оптимізації розміщення геометричних об’єктів виникають в різних сферах діяльності людини. Наприклад: при розрахунку будівельних споруд (задача пошуку невигідного розміщення навантажень, при якому в елементах будівельної споруди виникають максимальні внутрішні зусилля), при конструюванні приладів у випадку, коли елементи, що розміщуються є джерелами теплового випромінювання (розміщення елементів з метою забезпечення необхідного теплового режиму), при організації вантажоперевезень, складанні календарних планів виконання робіт та ін. Ці задачі відносяться до класу задач геометричного проектування та характеризуються великою складністю.

Постановка проблеми. В даному дослідженні розглядається клас задач, які зводяться до задачі оптимізації розміщення об’єктів прямокутної форми на деформованій прямокутній області. На розміщення накладено умови невиходу об’єктів за межі області та їх взаємного неперетину. Критерій якості описується довільною неперервно-диференційованою функцією.

Аналіз джерел дослідження. Через велику практичну значимість та складність розв’язання задачам геометричного проектування присвячено багато досліджень. Здебільшого пропонуються методи для розв’язання вузького класу задач. Найбільш популярними є задачі щільного розміщення [1–4]. Для їх розв’язання використовують евристичні методи [2–4], генетичні алгоритми [4], методи гілок та меж [5], класичні методи нелінійного програмування [6].

Дане дослідження базується на результатах, наведених в роботах [7–8]. Використовується ідея декомпозиції множини припустимих розв’язків на опуклі підмножини, організації спрямованого перебору підмножин та метод G-проекції для розв’язання підзадач оптимізації.

Ціль статті. Метою даного дослідження є розробка алгоритму розв’язання поставленої задачі з використанням методу G-проекції та експериментальне підтвердження можливості його застосування до даного класу задач.

Виклад основного матеріалу. Задано m об‘єктів D_i, $i=\overline{1,m}$, які необхідно розмістити на деформованій області. Деформація здійснюється шляхом введення у задану прямокутну область Ω довільної кількості прямокутних зон заборони D_i, $i=\overline{m+1,m+s}$, положення яких фіксовано. Сторони об’єктів та деформуючих прямокутників паралельні відповідним сторонам вихідної області (рис. 1).

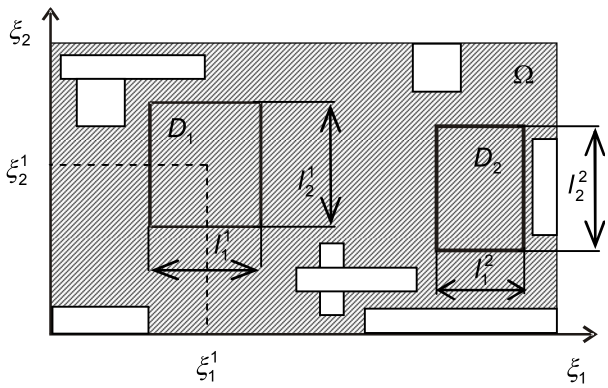

Рис. 1. Приклад припустимого розміщення об’єктів

Положення кожного об’єкта D_i, $i=\overline{1,m}$ та прямокутних зон заборони D_i, $i=\overline{m+1,m+s}$ визначається координатами їх геометричних центрів (полюсів) $Z^i\left(\xi_1^i,\xi_2^i\right)$, $i=\overline{1,m+s}$. На розміщення накладено наступні обмеження.

Умова неперетину об’єктів між собою та неперетину з деформуючими прямокутниками:

$$\left|\xi_1^i - \xi_1^k\right| \ge \frac{l_1^i + l_1^k}{2} \vee \left|\xi_2^i - \xi_2^k\right| \ge \frac{l_2^i + l_2^k}{2}, \quad (1)$$
$$i = \overline{1, m},\ k = \overline{i+1, m+s},$$

де $L^j\left(l_1^j, l_2^j\right)$ – розміри *j*-того прямокутника, $j = \overline{1, m+s}$.

Координати $Z^i\left(\xi_1^i, \xi_2^i\right)$, $i = \overline{m+1, m+s}$ деформуючих прямокутників D_i, $i = \overline{m+1, m+s}$, є константами.

Умова невиходу за межі прямокутної області Ω :

$$\frac{l_i^j}{2} \le \xi_i^j \le a_i - \frac{l_i^j}{2},\ i = 1, 2,\ j = \overline{1, m}, \quad (2)$$

де $a(a_1, a_2)$ – розміри прямокутної області Ω.

На деформуючі прямокутники не накладено умов їх взаємного неперетину та невиходу за межі області Ω.

Критерій якості задано довільною неперервно-диференційованою функцією $f(Z)$, $Z\left(Z^1, ... Z^m\right)$.

Таким чином, маємо задачу умовної оптимізації:

$$f\left(Z\right) \to \min,\ Z \in G, \quad (3)$$

де G – множина припустимих розв'язків, яка описується обмеженнями (1),(2).

У загальному випадку, множина G незв'язна з великою кількістю багатозв'язних компонент зв'язності. Точних методів розв'язання задачі (3) не існує. В даному дослідженні для отримання раціональних розміщень використовується декомпозиція множини припустимих розв'язків на опуклі підмножини та заміна розв'язання вихідної задачі розв'язанням послідовності отриманих підзадач.

Декомпозиція відбувається шляхом розкриття модулів в нерівностях (1). Після перетворень отримаємо об'єднання систем лінійних нерівностей, кожна з яких описує опуклу, замкнену підмножину G_i, тоді

$$G = \bigcup_{i=1}^{r} G_i, \quad (4)$$

де $r = 4^{C_m^2}$ – кількість підмножин [9].

Кращий з розв'язків наступних підзадач є розв'язком задачі (3):

$$\chi(Z) \to min,\ \ Z \in G_i,\ i = \overline{1, r}. \quad (5)$$

Для розв'язання підзадач (5) використовується метод G-проекції [8]. Тому систему обмежень підзадачі подамо у вигляді нерівностей:

$$\varphi_i\left(Z\right) \le 0,\ i = \overline{1, q}, \quad (6)$$

де q – загальна кількість обмежень підзадачі.

Відповідно до (4), кількість підзадач (6) при збільшенні кількості прямокутників задачі швидко зростає. Розв'язати їх усі навіть для задачі розміщення шести прямокутників за прийнятний час неможливо. Тому при виборі підзадач застосовано спрямований перебір підмножин (7).

Алгоритм розв'язання задачі

Введемо наступні позначення:

A – матриця коефіцієнтів системи лінійних нерівностей (6), що описують підмножину G_p, $p \in \overline{1, r}$;

B – матриця-стовпчик вільних членів системи (6);

Z^k – поточне наближення до розв'язку задачі, $k = 0, 1, ...$, $AZ^k \le B$;

A_1 – матриця коефіцієнтів лінійних обмежень, активних у поточному наближенні, тобто A_1 містить лише ті рядки a_i, $i \in \overline{1, q}$ матриці A, для яких $a_i Z^k = b_i$, відповідні обмеження мають вигляд $A_1 Z^k = \mathrm{B}_1$, де B_1 – матриця-стовпчик вільних членів цих обмежень;

A_2 – матриця коефіцієнтів лінійних обмежнь, неактивних у поточному наближенні, тобто A_2 містить лише ті рядки a_i, $i \in \overline{1, q}$ матриці A, для яких $a_i Z^k < b_i$, відповідні обмеження запишемо у вигляді $A_2 Z^k < \mathrm{B}_2$, де B_2 – матриця-стовпчик вільних членів цих обмежень;

d^k – вектор спуску в поточному наближенні.

1. Покладемо $k = 0$.

Обирається початкове розміщення $Z^0 = \left(\xi_1^1, \xi_2^1, \xi_1^2, \xi_2^2, ..., \xi_1^m, \xi_2^m\right) \in G_p \subset G$, $p \in \overline{1,r}$.

2. Розглянемо k-те наближення Z^k, де $k = 0$, 1,…

2.1. Визначимо вектор спуску d^k – проекцію антиградієнта в поточному наближенні на множину припустимих розв'язків G_p обраної підзадачі. Його координати знаходяться наступним чином:

2.1.1. *Якщо* A_1 порожня (не містить жодного рядка), то покладемо $d^k = -\nabla f\left(Z^k\right)$ і перейдемо до п. 2.3.

2.1.2. Спочатку покладемо $d^k = -\nabla f\left(Z^k\right)$. Для кожної координати d_t^k, $t = 1,\ldots 2\ m$ вектора d^k аналізуємо відповідний стовпчик матриці A_1.

Якщо t-тий стовпчик містить хоча б один одиничний елемент, знак якого збігається із знаком d_t^k, то t-та координата вектора Z^k вважається «стримуваною» (тобто її зміну необхідно заборонити). У векторі спуску координату d_t^k прирівнюємо нулю.

2.2. *Якщо* $\left|d^k\right| = 0$, то Z^k – стаціонарна точка для даної підзадачі, здійснюємо перехід до п. 3.

2.3. Наступне наближення до розв'язку задачі Z^{k+1} знаходиться за правилом: $Z^{k+1} = Z^k + \beta_k d^k$, де β_k знаходимо з умови: $\beta_k = \arg\min f(Z^k + \beta \cdot d^k)$, $0 \le \beta \le \beta_{\max}$,

$$\beta_{\max} = \begin{cases} \infty, & \textit{якщо } \tilde{d} \le 0 \\ \min\left\{\dfrac{\tilde{b}_i}{\tilde{d}_i} : \tilde{d}_i > 0\right\}, & \textit{якщо } \tilde{d} > 0, \end{cases}$$

де $\tilde{b} = b_2 - A_2 Z^k$, $\tilde{d} = A_2 d^k$.

k присвоюємо значення $k+1$ і переходимо до п. 2.

3. Якщо $Z^k = Z^0$, здійснюємо перехід до п. 4.

Інакше переходимо до розв'язання задачі на наступній підмножині G_v, $v \in \overline{1,r}$, $v \ne p$, такої, що $Z^k \in G_v$. Для цього наступним чином змінюємо систему обмежень, що задає підмножину G_p.

3.1. Розглядаємо взаємне розміщення двох прямокутних об'єктів D_i та D_j, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{i+1, m+s}$. Якщо обмеження їх неперетину в поточному наближенні Z^k активне, то, якщо можна записати умову неперетину даної пари прямокутників по іншій координаті яке в поточному наближенні буде неактивне, то відбувається заміна даного обмеження на нове, неактивне.

3.2 Присвоюємо $k = 0$ та переходимо до п. 2.

4. Z^k – приймаємо за результуюче розміщення.

Для покращення результуючих розміщень доцільно розв'язати задачу запропонованим алгоритмом декілька разів з різними початковими наближеннями та обрати кращий з отриманих розв'язків.

Наведений алгоритм програмно реалізовано. На рис. 2 наведено результат розв'язання тестової задачі оптимізації розміщення.

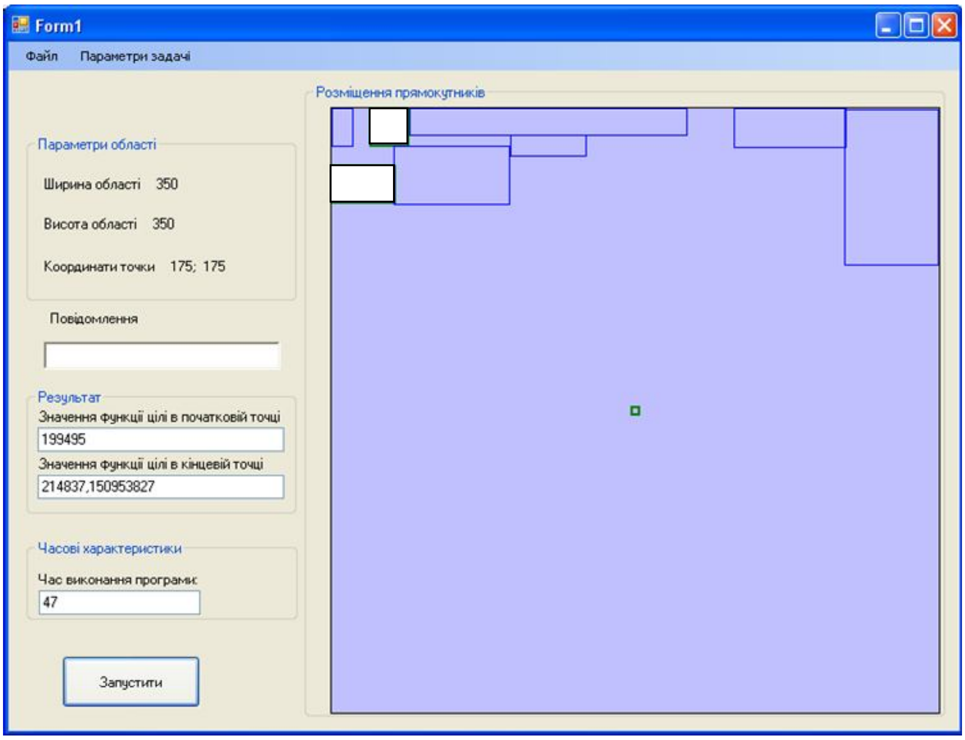

Рис. 2. Приклад роботи програми

Параметри тестової задачі максимізації. Кількість об'єктів – 6. Кількість зон заборони (деформуючих прямокутників) – 2. Функція цілі має вигляд:

$$f(Z) = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^{m} \left(\left(\xi_1^i - \xi_1^j\right)^2 + \left(\xi_2^i - \xi_2^j\right)^2 \right).$$

Значення функції цілі: початкове – $f\left(Z^0\right) \approx 199495$, кінцеве – $f\left(Z^*\right) \approx 214837$. Для знаходження величини кроку β_k при пошуку $k+1$-го наближення до розв'язку задачі Z^{k+1} використовується метод найпростішого перебору [10].

Висновки. В результаті даного дослідження наведено математичну модель та алгоритм розв'язання задачі оптимізації розміщення прямокутників на прямокутній області, що містить прямокутні зони заборони. В запропонованому алгоритмі для розв'язання задачі використано декомпозицію множини припустимих розв'язків на опуклі підмножини, метод G-проекції та спрямований перебір підзадач. Запропонований алгоритм програмно реалізовано та експериментально підтверджено можливість його застосування для розв'язання поставленої задачі.

ËÏÒÅÐÀÒÓÐÀ:

1. *Стоян Ю.Г., Яковлев С.В.* Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. – Киев: Наукова думка, 1986. – 265 с.
2. *Valeyeva A.F., Agliullin M.N.* Ant Colony Algorithm for the 2–D Bin–Packing Problem: Numerical Study // Proceedings of the 5th Interna¬tional Workshop on Computer Science and Information Technologies, 2003. P. 110–114.
3. *M.A. Mesyagutov, Smagin M.A., Filippova A.S.* Substitution decoder based on local search algorithm for packing on sheets // CSIT, Vol. 2, 2005. P.164–166.
4. *Мухачева Э.А., Мухачева А.С.* Методы перестройки для решения задачи прямоугольной упаковки // Информационные технологии. – 2000. – № 4. – С. 30–36.
5. *Новожилова М.В.* Решение задачи поиска глобального экстремума линейной функции цели на структуре линейных неравенств. – Харьков, 1988. – 45 с. (Препр. / АН Украины. Ин-т пробл. машиностроения; № 292).
6. *Birgin E.G., Marinez J.M., Nishihara F.H., Ronconi D.P.* Orthogonal packing of rectangular items within arbitrary convex region by nonlinear optimization. // Computers & Operations Research. – 2006. – № 33. – P. 3535–3548.

7. *С.И. Яремчук, Ю.А. Шаповалов.* Минимаксная задача оптимизации размещения объектов специального вида на многосвязной области // Кибернетика и системный анализ, 2007. – № 3. – С. 128–137.
8. *Яремчук С.І., Рудюк Л.В.* Збіжність методу G–проекцій // Радиоэлектроника и информатика. – ХНУРЕ, 2005.
9. *Власенко Î.В., Ñï³âàê À.Â., ßðåì÷óê Ñ.².* Метод умовного градієнта для оптимального розташування джерел фізичних полів // Вісник ЖІТІ / Технічні науки. – 1998. – № 7. – С. 248–253.
10. *Яремчук С.І.* Введення в математичні методи дослідження операцій: Навчальний посібник. – Житомир: ЖІТІ, 2002. – 300 с.

ßÐÅÌ×ÓÊ Ñâ³òëàíà ²âàí³âíà – êàíäèäàò ô³çèêî-ìàòåìàòè÷íèõ íàóê, äîöåíò, доцент êàôåäðè ïðîãðàìíîãî çàáåçïå÷åííÿ îá÷èñëþâàëüíî¿ òåõí³êè Æèòîìèðñüêîãî державного òåõíîëîã³÷íîãî óніверситету.

Íàóêîâ³ ³íòåðåñè:
– åêñòðåìàëüí³ çàäà÷³;
– ìàòåìàòè÷íå ìîäåëþâàííÿ.
Тел.6 (8-0412)418-542.

ШАПОВАЛОВ Юрій Îëåêñàíäðîâè÷ – êàíäèäàò технічних íàóê, äîöåíò êàôåäðè ïðîãðàìíîãî çàáåçïå÷åííÿ îá÷èñëþâàëüíî¿ òåõí³êè Æèòîìèðñüêîãî державного òåõíîëîã³÷íîãî óніверситету.
Íàóêîâ³ ³íòåðåñè:
– måòîäè îïòèì³çàö³¿;
– êîìï'þòåðíå ìîäåëþâàííÿ.
Тел.: (8-0412)418-542.
E-mail: yuri-ua@yandex.ru

ОХМАК Віктор Валерійович – студент Æèòîìèðñüêîãî державного òåõíîëîã³÷íîãî університету.
Íàóêîâ³ ³íòåðåñè:
– måòîäè îïòèì³çàö³¿;
– êîìï'þòåðíå ìîäåëþâàííÿ.

Подано 14.11.2008

Яремчук С.І., Шаповалов Ю.О., Охмак В.В. Застосування методу G-проекції для оптимізації розміщення прямокутників в області складної форми
Яремчук С.И., Шаповалов Ю.А., Охмак В.В. Применение метода G-проекций для оптимизации размещения прямоугольников в области сложной формы
Yaremchuk S.I., Shapovalov Yu.A., Ohmak V.V. Appling of the G-projection method for optimization of arrangement rectangles in complex shape region

УДК 519.67
Применение метода G-проекций для оптимизации размещения прямоугольников в области сложной формы / С.И. Яремчук, Ю.А. Шаповалов, В.В. Охмар
Рассматривается задача оптимизации размещения прямоугольных объектов на области, которая имеет форму деформированного прямоугольника. Приведена математическая модель задачи и способ ее решения с использованием метода G-проекций.

УДК 519.67
Appling of the G-projection method for optimization of arrangement rectangles in complex shape region / S.I. Yaremchuk, Yu.A. Shapovalov, V.V. Ohmak
The optimal arrangement problem of rectangles in deformed rectangle region is considered. Math model of this problem and way to solve by G-projection method are described.