УДК 621.391+004.73

Ю.Г. Лега, д.т.н., проф.
Е.В. Фауре, аспір.
Черкаський державний технологічний університет

СУМІСНЕ ВИКОРИСТАННЯ ШУМОПОДІБНИХ СИГНАЛІВ І КОРЕКТУВАЛЬНИХ КОДІВ ХЕММІНГА

У статті розглянуто питання застосування коректувальних кодів Хеммінга у системах, що використовують шумоподібні сигнали. Запропоновано методику вибору оптимальних параметрів некодового (база шумоподібного сигналу) та кодового (довжина кодової комбінації) методів підвищення достовірності передавання даних у каналі з обмеженими шириною смуги частот і потужністю сигналу і заданою швидкістю передавання даних.

Постановка проблеми. Одним з найважливіших параметрів систем передавання даних є достовірність інформації, що передається. Достовірність визначається конструкцією сигналу і співвідношенням сигнал–шум у каналі зв'язку. Актуальними є такі постановки проблеми:

1) яка мінімальна ширина смуги частот необхідна для забезпечення заданої достовірності в каналі з відомими потужністю сигналу і швидкістю передавання даних;

2) яка максимальна достовірність передавання може бути отримана в каналі з відомими фіксованими шириною смуги частот, потужністю сигналу і швидкістю передавання даних.

Оптимальне вирішення подібних завдань для систем, в яких потужність шумів сумірна або перевищує потужність сигналу, досягається за рахунок застосування комбінації кодових і некодових методів підвищення достовірності, тобто з використанням відповідних завадостійких кодів [1] у комбінації з шумоподібними сигналами (ШПС) [2, 3, 4].

Аналіз джерел і публікацій та виділення невирішених раніше частин загальної проблеми. У [2] розглянуто питання сумісного застосування ШПС і коректувальних кодів у випадку некогерентного прийому ШПС. Залежно від заданої максимальної ймовірності появи бітової помилки показано, що для будь-якої довжини кодової послідовності існує оптимальний код, що дозволяє реалізувати мінімальну смугу частот приймача за заданих швидкості передавання інформації і співвідношенні сигнал–шум на його вході.

Недоліком вказаного дослідження є те, що в роботі дана тільки вказівка на існування оптимального співвідношення кодового і некодового методів підвищення достовірності й відсутній опис методики вибору оптимальних параметрів конструкції сигналу, а також відсутній аналіз сумісного застосування ШПС і коректувальних кодів у випадку когерентного прийому ШПС. Разом з тим робота [2] забезпечує можливість вирішення першої з проблем, поставлених в пункті 1 цієї роботи.

Метою даного дослідження є визначення оптимального співвідношення параметрів кодового і некодового методів підвищення достовірності передавання даних для забезпечення мінімальної ймовірності бітової помилки за обмежених ширини спектра зайнятої смуги частот і потужності передавача і заданої швидкості передавання даних.

Постановка завдання. У системах зв'язку з ШПС, що існують і розробляються, наприклад в системах стільникового зв'язку [5, 6], переважно використовуються ШПС, формування яких здійснюється за методом прямого розширення спектра (DS-CDMA – Direct Sequence CDMA). У цьому випадку сформований сигнал називається фазоманіпульованим шумоподібним сигналом (ФМ ШПС). Прийом ФМ ШПС здійснюється оптимальним когерентним приймачем, який для сигналу з повністю відомими параметрами обчислює інтеграл:

$$z = \int_0^T x(t) \cdot u(t) dt, \tag{1}$$

де $x(t) = u(t) + \xi(t)$ – сигнал на вході приймача;

$u(t)$ – переданий сигнал;

$\xi(t)$ – завада каналу зв'язку.

Значення даного кореляційного інтегралу обчислюється за допомогою корелятора або узгодженого фільтра. Співвідношення сигнал–шум на виході корелятора або узгодженого фільтра збільшується в B разів (B – база ШПС), а ймовірність появи помилки у когерентному приймачі ФМ ШПС складає [2, 3]:

$$P_{пом} = F\left(\sqrt{2Bh}\right), \tag{2}$$

де h^2 – співвідношення сигнал–шум на вході приймача.

При цьому функція $F\left(\sqrt{2Bh}\right)$ є спадною при зростанні підкорінного виразу. Звідси витікає, що збільшення бази B еквівалентно зростанню співвідношення сигнал/шум і спричиняє зменшення ймовірності появи помилки.

Альтернативою збільшенню бази (розширенню спектра) є використання завадостійкого кодування. Його застосування зменшує пропускну здатність системи за рахунок того, що частина переданих бітів несе не корисну інформацію, а службову – контрольні символи, що слугують для виявлення або виправлення помилок. У результаті цього пропускна здатність системи дорівнює:

$$C_{кор} = C_к \cdot C = \frac{k}{n} \cdot C_к , \tag{3}$$

де $C_{кор}$ – корисна (інформаційна) швидкість передавання даних;

$C_к$ – пропускна здатність каналу зв'язку;

C – швидкість коду:

$$C = \frac{k}{n} , \tag{4}$$

де k – число інформаційних символів;

n – довжина кодової послідовності.

Зменшення інформаційної швидкості еквівалентне зменшенню смуги частот каналу до значення:

$$\Delta F_{екв} = \frac{k}{n} \Delta F , \tag{5}$$

де ΔF – смуга пропускання каналу зв'язку;

$\Delta F_{екв}$ – еквівалентне значення смуги частот каналу зв'язку, що забезпечує можливість передавання корисній інформації.

Для передавання повного потоку (інформаційна частина + надмірність) зайнята смуга частот повинна бути розширена на величину:

$$\Delta F_p = \left(1 - \frac{k}{n}\right) \Delta F . \tag{6}$$

Таким чином, і збільшення бази ШПС, і введення надмірності для корекції помилок вимагають розширення смуги частот каналу, тому правомірна постановка питання таким чином:

– які співвідношення між базою ШПС і параметрами коду є найбільш ефективними для досягнення більшої достовірності в каналі з обмеженою смугою частот, обмеженою потужністю сигналу і заданою швидкістю передавання даних. Як визначити оптимальні параметри кодового і некодового методів підвищення достовірності.

У роботі оцінюється ефективність сумісного використання ШПС і кодів Хеммінга.

Основна частина. Критерієм оптимальності застосування тих або інших заходів підвищення завадостійкості системи вважатимемо мінімальне значення ймовірності появи помилки за однакової ширини зайнятої смуги частот і однакової потужності передавача.

Отже оптимальним способом підвищення достовірності передавання даних буде такий, який забезпечує мінімальну ймовірність появи помилки за однакової швидкості передавання корисної інформації.

Підвищення достовірності кодовим методом передбачає можливість застосування як кодів із виявленням помилок (і їх виправлення шляхом перезапиту помилкових блоків), так і кодів з прямим виправленням помилок [1]. Коди з виявленням помилок і їх виправленням шляхом перезапиту помилкового блока даних дають більшу перевагу у завадостійкості, проте вимагають наявності зворотного зв'язку, що не завжди можливо. Коди з виправленням помилок не вимагають зворотного каналу, але вимагають більшої надмірності. Крім того, коди з виявленням помилок додатково завантажують канал блоками, які перепитуються, що особливо проявляється на каналах низької якості.

Статична складова втрати швидкості передавання даних (втрати пропускної здатності) відповідає швидкості коду і дорівнює:

$$\gamma_{ст} = \frac{k}{n} . \tag{7}$$

Динамічна складова втрати швидкості виникає через перезапити збійних блоків і тому визначена тільки для кодів з виявленням помилок [7]:

$$\gamma_{дин} = \frac{Q}{Q^2 - Q + 1} , \tag{8}$$

де Q – ймовірність правильного прийому блока даних довжини n.

Ймовірність правильного прийому блока даних довжини n визначається як:

$$Q = (1-p)^n, \tag{9}$$

де p – ймовірність бітової помилки в каналі зв'язку.

Таким чином, швидкість передавання корисної інформації у випадку застосування кодів з прямим виправленням помилок складає:

$$\upsilon_{випр} = \gamma_{ст}\upsilon_0, \tag{10}$$

а у випадку застосування кодів з виявленням помилок –

$$\upsilon_{виявл} = \gamma_{ст}\gamma_{дин}\upsilon_0, \tag{11}$$

де υ_0 – швидкість передавання даних в каналі зв'язку.

Оцінимо достовірність передавання даних у випадку сумісного використання ШПС і коректувальних кодів Хеммінга для симетричних двійкових каналів.

ШПС і коди Хеммінга з прямим виправленням помилок. Коди Хеммінга є одними з найбільш поширених лінійних блокових систематичних кодів, які здатні виправляти помилки. До них належать коди з мінімальною кодовою відстанню $d_{\min} = 3$, що виправляють усі поодинокі помилки в кодовій послідовності.

Довжина кодової послідовності n і число інформаційних символів k зв'язані між собою співвідношенням:

$$n = 2^r - 1, \tag{12}$$

де $r = n - k$ – кількість перевірних символів, $r \geq 3$.

У загальному випадку для кодів з мінімальною кодовою відстанню $d_{\min} > 2$, які використовуються для виправлення всіх помилок у блоці кратності до $\nu_{випр} \leq \left[\frac{d_{\min} - 1}{2}\right]$, де $[A]$ – ціла частина числа А, ймовірність появи помилкової комбінації на виході декодера визначається як:

$$P_{пом\_випр} = \sum_{\nu=\nu_{випр}+1}^{n} C_n^{\nu} P_{пом}^{\nu} Q_{пом}^{n-\nu}, \tag{13}$$

де $P_{пом}$ – ймовірність неправильного прийому двійкового елемента блока даних,

$Q_{пом} = 1 - P_{пом}$.

З іншого боку [2], інформаційна послідовність завдовжки k прийнята правильно тільки тоді, коли безпомилково прийняті всі k символів послідовності. Це означає, що $1 - P_{пом\_випр} = (1 - p_{ост})^k$, де $p_{ост}$ – ймовірність появи помилки в двійковому елементі на виході декодера. Звідси випливає, що

$$p_{ост} = 1 - \sqrt[k]{1 - P_{пом\_випр}}, \tag{14}$$

$P_{пом\_випр}$ обчислюється за формулою (13).

У [2] вказано, що за $p_{ост} << 1$ формулу (14) можна перетворити до вигляду:

$$p_{ост} \approx \frac{1}{k} P_{пом\_випр}. \tag{15}$$

Для кодів Хеммінга з $d_{\min} = 3$ вираз (13) набуває вигляду:

$$P_{пом\_випр} = \sum_{\nu=2}^{n} C_n^{\nu} P_{пом}^{\nu} Q_{пом}^{n-\nu} = 1 - \sum_{\nu=0}^{1} C_n^{\nu} P_{пом}^{\nu} Q_{пом}^{n-\nu} = 1 - Q_{пом}^{n} - nP_{пом} Q_{пом}^{n-1}. \tag{16}$$

Звідси

$$p_{ост} = 1 - \sqrt[k]{Q_{пом}^{n} + nP_{пом} Q_{пом}^{n-1}}, \tag{17}$$

або

$$p_{ост} \approx \frac{1}{k}\left(1 - Q_{пом}^{n} - nP_{пом} Q_{пом}^{n-1}\right). \tag{18}$$

Нехай $F_{\max}$ – максимальна частота, яку припустимо використовувати в каналі зв'язку. Якщо υ_0 – швидкість передавання даних, максимальна база ШПС визначається виразом:

$$B_{\max} = \frac{F_{\max}}{\upsilon_0}. \tag{19}$$

Для випадку сумісного використання ШПС і завадостійкого кодування з прямим виправленням помилок цей ресурс розподіляється між реальною базою ШПС B і статичною складовою втрати швидкості $\gamma_{ст}$ таким чином:

$$B_{\max} \geq \frac{B}{\gamma_{ст}}. \tag{20}$$

База ШПС B чисельно дорівнює довжині псевдовипадкової послідовності «Т», що формує ШПС. Основні послідовності наведені в таблиці 1 (таблиця 1 запозичена з [2]):

Таблиця 1

Види послідовностей

Т	Вид	Т	Вид	Т	Вид	Т	Вид
3	M, B	23	L	71	L	143	J
4	B	31	M,L	79	L	151	L
5	B	35	J	83	L	163	L
7	M, B	43	L	103	L	167	L
11	L,B	47	L	107	L	179	L
13	B	59	L	127	M,L	191	L
15	M	63	M	131	L	199	L
19	L	67	L	139	L		

У таблиці використані скорочення: B – послідовність Баркера; M – M-послідовність, L – послідовність Лежандра, J – послідовність Якобі.

Таким чином, значення бази вибирається з таблиці 1. Ймовірність бітової помилки на вході декодера по (2) складає $P_{пом} = F\left(\sqrt{2Bh}\right)$. Для коректувальних кодів Хеммінга статична складова втрати швидкості залежить тільки від кількості перевірних елементів r і дорівнює $\gamma_{ст} = \frac{k}{n} = \frac{2^r - r - 1}{2^r - 1}$.

Для деякого $B < B_{\max}$ виберемо всі значення r, за яких $\frac{B}{\gamma_{ст}} \leq B_{\max}$, і обчислимо ймовірність помилки декодера за формулою (17) $p_{ост} = 1 - \sqrt[k]{Q_{пом}^{n} + nP_{пом}Q_{пом}^{n-1}}$.

Твердження 1. Якщо $r_1 > r_2$, а $B = const$, то $p_{ост}(r_1) > p_{ост}(r_2)$.

Доведення.

$$p_{ост}(r_1) - p_{ост}(r_2) = \sqrt[2^{r_2}-r_2-1]{Q_{пом}^{2^{r_2}-1} + \left(2^{r_2}-1\right)P_{пом}Q_{пом}^{2^{r_2}-2}} - \sqrt[2^{r_1}-r_1-1]{Q_{пом}^{2^{r_1}-1} + \left(2^{r_1}-1\right)P_{пом}Q_{пом}^{2^{r_1}-2}}.$$

Нехай $f(r) = \sqrt[2^r-r-1]{Q_{пом}^{2^r-1} + \left(2^r-1\right)P_{пом}Q_{пом}^{2^r-2}}$. Графік функції $f(r)$ для $P_{пом} = \{0{,}1,\ 0{,}2,\ 0{,}3,\ 0{,}4\}$ наведено на рис. 1.

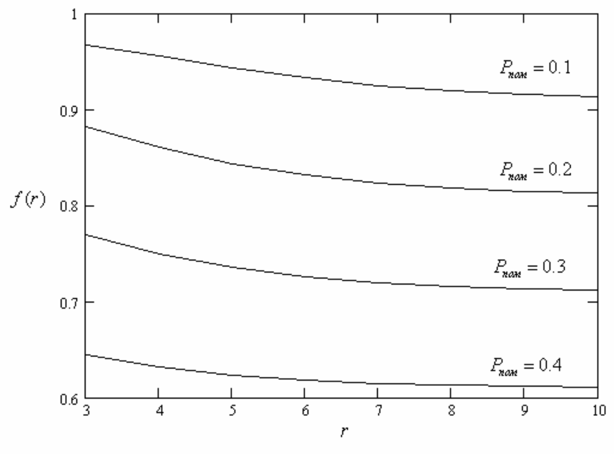

Рис. 1. Графік $f(r)$

Таким чином, функція $f(r) = \sqrt[2^r-r-1]{Q_{пом}^{2^r-1} + \left(2^r-1\right)P_{пом}Q_{пом}^{2^r-2}}$ є спадною за будь-якого значення $P_{пом} \in (0;\ 0{,}5)$. Відповідно ймовірність залишкової помилки декодера $p_{ост}$ збільшується зі збільшенням довжини кодової комбінації n, що і треба було довести.

Процедура вибору оптимальної конструкції сигналу з метою мінімізації ймовірності бітової помилки у випадку сумісного використання ФМ ШПС і коректувальних кодів Хеммінга з прямим виправленням помилок полягає в наступному:

1) мінімальне значення бази $B_{поч}$, що розглядаються, визначається так: $B_0 = B_{\max} \cdot \gamma_{\min} = B_{\max} \cdot \frac{4}{7}$, $B_{поч} = \max\limits_{B<B_0} B$ – максимальне значення бази ШПС, яке вибирається з таблиці 1 і не перевищує значення B_0;

2) максимальне значення бази $B_{кін} = \max\limits_{B<B_{\max}} B$;

3) діапазон значень бази, що розглядаються: $B \in \lfloor B_{поч},\ B_{кін} \rfloor$;

4) для кожного $B_i \in \lfloor B_{поч},\ B_{кін} \rfloor$ з таблиці 1 знаходимо мінімальне (твердження 1) значення $r_i : \frac{B_i \cdot (2^{r_i} - 1)}{2^{r_i} - r_i - 1} \le B_{\max}$, причому для $B_i > B_j$ $r_i \ge r_j$;

5) для всіх пар значень $(B_i,\ r_i)$ обчислюються $p_{ост}(B_i,\ r_i)$;

6) оптимальними значеннями $(B_{opt},\ r_{opt})$ є ті значення, за яких $p_{ост}(B_{opt},\ r_{opt}) = \min p_{ост}(B_i,\ r_i)$.

Розглянемо приклад.

Нехай співвідношення сигнал–шум на вході приймача $h^2 = 10^{-1}$ (захищеність $\Delta P = -10\ дБ$), а $B_{\max} = \frac{F_{\max}}{\upsilon_0} = 60$.

Значення ймовірності появи бітової помилки $p_{ост}$ за формулою (17) для всіх значень $B < B_{\max}$ з таблиці 1 і кодів Хеммінга з кількістю перевірних елементів $r = 3...10$ наведені в таблиці 2.

Знак (*) біля значення в таблиці вказує на неможливість використання коду Хеммінга з такою швидкістю для відповідної бази. Ймовірність бітової помилки визначається тільки базою.

Через те, що $\min p_{ост}(B_i,\ r_i) = p_{ост}(47,5) = 2.062 \cdot 10^{-5}$, $(B_{opt},\ r_{opt}) = (47,5)$ і оптимальним є використання бази, що дорівнює 47, і коду Хеммінга $(31,26)$ зі швидкістю $\gamma_{cm} = \frac{26}{31}$, при цьому $\frac{B}{\gamma_{cm}} \approx 56$.

Таблиця 2

Ймовірність бітової помилки

B \ r	3	4	5	6	7	8	9	10
3	0.149	0.171	0.188	0.199	0.207	0.212	0.215	0.217
4	0.114	0.135	0.152	0.164	0.172	0.177	0.181	0.183
5	0.088	0.107	0.124	0.136	0.144	0.15	0.154	0.156
7	0.053	0.069	0.083	0.095	0.103	0.109	0.113	0.115
11	0.02	0.029	0.039	0.047	0.055	0.06	0.063	0.066
13	0.013	0.019	0.026	0.034	0.04	0.045	0.048	0.05
15	8.009e-3	0.012	0.018	0.024	0.029	0.033	0.036	0.038
19	3.179e-3	5.156e-3	7.988e-3	0.011	0.015	0.018	0.021	0.023
23	1.274e-3	2.148e-3	3.521e-3	5.431e-3	7.697e-3	9.957e-3	0.012	0.013
31	2.098e-4	3.692e-4	6.506e-4	1.116e-3	1.806e-3	2.683e-3	3.618e-3	4.462e-3
35	4.075e-3*	1.532e-4	2.756e-4	4.895e-4	8.341e-4	1.322e-3	1.907e-3	2.496e-3
43	1.681e-3*	2.658e-5	4.894e-5	9.066e-5	1.656e-4	2.905e-4	4.757e-4	7.099e-4
47	1.085e-3*	1.085e-3*	2.062e-5	3.864e-5	7.204e-5	1.309e-4	2.255e-4	3.586e-4
59	2.962e-4*	2.962e-4*	2.962e-4*	2.962e-4*	2.962e-4*	2.962e-4*	2.962e-4*	3.781e-5

Використаємо запропоновану методику вибору оптимального співвідношення кодового й некодового методів підвищення достовірності для наведеного вище прикладу: $B_0 = B_{\max} \cdot \gamma_{\min} = 34.29$, $B_{поч} = \max\limits_{B<B_0} B = 31$, $B_{кін} = \max\limits_{B<B_{\max}} B = 59$.

Значення $B_i \in \lfloor B_{поч}, B_{кін} \rfloor$ і відповідні їм мінімальні значення r_i наведені в таблиці 3.

Таблиця 3

Значення бази і відповідні їм мінімальні значення r_i

B_i	31	35	43	47	59
r_i	3	4	4	5	10

Обчислені значення $p_{ост}(B_i, r_i)$ знаходяться у виділених комірках таблиці 2, а $(B_{opt}, r_{opt}) = (47{,}5)$, що співпадає з отриманим раніше результатом.

Таким чином, замість обчислення 112 значень $p_{ост}$ у випадку повного перебору досить обчислити 5 значень і вибрати з них мінімальне. Величина зменшення часових витрат на обчислення значень $p_{ост}$ складає 22,4 та істотно зростає зі збільшенням значення $B_{\max}$.

ШПС і коди Хеммінга з виявленням помилок.

Якщо в системі організований зворотний канал, то код Хеммінга може виявляти всі одно- та двократні помилки в кодовій комбінації, які виправляються шляхом повторної передачі збійного блока.

Для будь-яких кодів з мінімальною кодовою відстанню $d_{\min} > 1$, які використовуються для виявлення всіх помилок в блоці кратності $\nu_{виявл} = d_{\min} - 1$ і менше, ймовірність появи помилкової комбінації на виході декодера визначається як [8]:

$$P_{пом\_виявл} = \sum_{\nu=d_{\min}}^{n} W(w) P_{пом}^{\nu} Q_{пом}^{n-\nu}, \tag{21}$$

де $W(w)$ – вагова характеристика коду (кількість його комбінацій вагою w, тобто кількість варіантів помилок, які не виявляються цим кодом);

$P_{пом}$ – ймовірність правильного прийому двійкового елемента блока даних,

$Q_{пом} = 1 - P_{пом}$.

На практиці частіше застосовується формула приблизної оцінки ймовірності появи кодової комбінації з невиявленою помилкою [8]:

$$P_{пом\_виявл} \approx \frac{1}{2^r} \sum_{\nu=d_{\min}}^{n} C_n^{\nu} P_{пом}^{\nu} Q_{пом}^{n-\nu}, \tag{22}$$

де r – кількість перевірних елементів коду;

ν – кратність помилки.

Враховуючи формулу (22), ймовірність появи бітової помилки на виході декодера складе:

$$P_{ост} \approx \frac{1}{2^r} \sum_{\nu=d_{\min}}^{n} \left(C_n^{\nu} P_{пом}^{\nu} Q_{пом}^{n-\nu} \cdot \frac{\nu}{n} \right). \tag{23}$$

Для кодів Хеммінга з $d_{\min} = 3$;

$$P_{ост} \approx \frac{1}{2^r} \sum_{\nu=3}^{n} \left(C_n^{\nu} P_{пом}^{\nu} Q_{пом}^{n-\nu} \cdot \frac{\nu}{n} \right). \tag{24}$$

Для заданої максимальної бази ШПС $B_{\max}$ (19) і сумісного використання ШПС і завадостійкого кодування з виявленням помилок максимальна база ШПС $B_{\max}$ розподіляється між реальною базою ШПС B і статичною $\gamma_{ст}$ і динамічною $\gamma_{дин}$ складовими втрати швидкості таким чином:

$$B_{\max} \ge \frac{B}{\gamma_{ст} \gamma_{дин}}, \tag{25}$$

$\gamma_{ст}$ і $\gamma_{дин}$ визначаються за формулами (7) і (8) відповідно і для кодів Хеммінга дорівнюють: $\gamma_{ст} = \dfrac{k}{n} = \dfrac{2^r - r - 1}{2^r - 1}$, $\gamma_{дин} = \dfrac{Q}{Q^2 - Q + 1}$.

Значення бази B вибирається з таблиці 1, ймовірність бітової помилки на вході декодера за формулою (2) складе $P_{пом} = F\left(\sqrt{2Bh}\right)$.

Для кожного $r_i \geq 3$ знайдемо значення бази B_i, для яких $B_{\max} \geq \frac{B_i}{\gamma_{ст\, i}\gamma_{дин\, i}}$, і обчислимо залишкову ймовірність помилки декодера для цих параметрів за формулою (24).

Твердження 2. Для кодів Хеммінга фіксованої довжини ймовірність залишкової помилки декодера мінімальна за максимально можливої бази.

Доведення. Зі збільшенням бази B ймовірність бітової помилки $P_{пом} = F\left(\sqrt{2Bh}\right)$ зменшується. Відповідно, ймовірність правильного прийому блоку $Q = Q_{пом}^{2^r-1}$ збільшується, а ймовірність появи помилок великої кратності в блоці $\sum_{\nu=d_{\min}}^{n} C_n^{\nu} P_{пом}^{\nu} Q_{пом}^{n-\nu}$ зменшується. Як результат – зменшення ймовірності залишкової помилки декодера $P_{ост} \approx \frac{1}{2^r} \sum_{\nu=d_{\min}}^{n} \left(C_n^{\nu} P_{пом}^{\nu} Q_{пом}^{n-\nu} \cdot \frac{\nu}{n} \right)$.

Твердження 3. Якщо для деякого r_j не існує жодного значення B_j, для якого $B_{\max} \geq \frac{B_j}{\gamma_{ст\, j}\gamma_{дин\, j}}$, то і для всіх $r_i > r_j$ не існує такого значення B_i, для якого $B_{\max} \geq \frac{B_i}{\gamma_{ст\, i}\gamma_{дин\, i}}$.

Доведення. Розглянемо функцію $f(B,r) = \frac{B}{\gamma_{ст}\gamma_{дин}}$ при фіксованому значенні h, графік якої представлений на рис. 2.

З графіка можна бачити, що зі збільшенням значення r мінімальне значення функції $f(B,r) = \frac{B}{\gamma_{ст}\gamma_{дин}}$ збільшується, а область можливих значень B, для яких $B_{\max} \geq \frac{B}{\gamma_{ст}\gamma_{дин}}$, звужується. Для деякого $r = r_j$ графік функції $f(B, r_j) = \frac{B}{\gamma_{ст\, j}\gamma_{дин\, j}}$ повністю знаходиться вище прямої $g(B) = B_{\max}$ (на рис. 2 $r_j = 10$ і $B_{\max} = 60$) і як наслідок – для $r_i > r_j$ графік $f(B, r_i) = \frac{B}{\gamma_{ст\, i}\gamma_{дин\, i}}$ також повністю знаходиться вище прямої $g(B) = B_{\max}$. Таким чином, для всіх $r_i > r_j$ не існує такого значення B_i, для якого $B_{\max} \geq \frac{B_i}{\gamma_{ст\, i}\gamma_{дин\, i}}$.

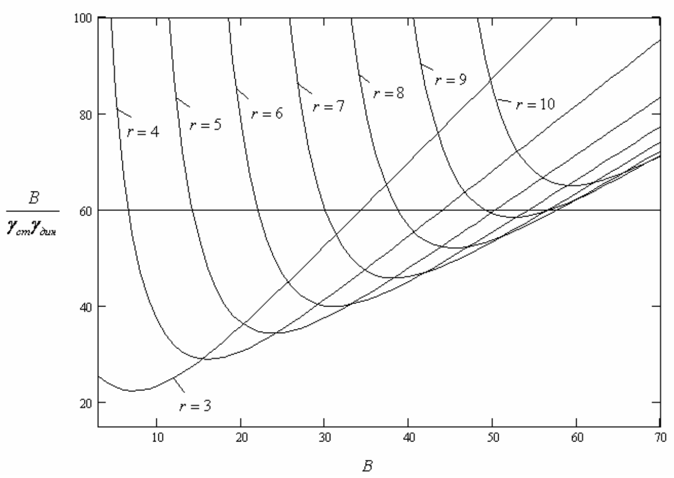

Рис. 2. Графік функції $f(B,r) = \frac{B}{\gamma_{ст}\gamma_{дин}}$ *для* $h^2 = 10^{-1}$ *і* $r \in [3, 10]$

Зі збільшенням значення h^2 графік функції $f(B,r)=\dfrac{B}{\gamma_{ст}\gamma_{дин}}$ зміщується вгору, що не впливає на доведення твердження.

З графіка також видно, що в більшості випадків, якщо для r_i і $r_{i+1}=r_i+1$ існують максимальні значення $B_{i\max}$ и $B_{i+1\max}$ такі, що $B_{\max}\geq\dfrac{B_{i\max}}{\gamma_{ст\ i\max}\gamma_{дин\ i\max}}$ і $B_{\max}\geq\dfrac{B_{i+1\max}}{\gamma_{ст\ i+1\max}\gamma_{дин\ i+1\max}}$, то $B_{i+1\max}\geq B_{i\max}$.

Процедура вибору оптимальної конструкції сигналу з метою мінімізації ймовірності бітової помилки у випадку сумісного використання ФМ ШПС і коректувальних кодів Хеммінга, що виявляють помилки, полягає в наступному:

1) для кожного значення $r_i\geq 3$ знаходиться максимальне (твердження 2) значення $B_{i\max}$, для якого виконується умова $B_{\max}\geq\dfrac{B_{i\max}}{\gamma_{ст\ i\max}\gamma_{дин\ i\max}}$. У більшості випадків $B_{i+1\max}\geq B_{i\max}$;

2) обчислення виконуються доти, доки для деякого $r_{\max+1}=r_j$ неможливо буде знайти таке $B_{j\max}$, для якого виконується умова $B_{\max}\geq\dfrac{B_{j\max}}{\gamma_{ст\ j\max}\gamma_{дин\ j\max}}$ (твердження 3);

3) якщо $r_{\max+1}=3$, то коректувальні коди Хеммінга не можуть дати позитивного результату, а оптимальним є використання бази ШПС $B=\max\limits_{B<B_{\max}} B$;

4) якщо $r_{\max+1}\neq 3$, для кожного $r_i\in\left[3, r_{\max}\right]$ і відповідного йому значення $B_{i\max}$ обчислюється залишкова помилка декодера $p_{ост}$ за формулою (24);

5) оптимальними значеннями $\left(B_{opt},\ r_{opt}\right)$ є ті значення, за яких $p_{ост}\left(B_{opt},\ r_{opt}\right)=\min p_{ост}\left(B_i,\ r_i\right)$.

Розглянемо приклад.

Нехай співвідношення сигнал–шум на вході приймача $h^2=7\cdot 10^{-2}$ (захищеність $\Delta P\approx -11.5\partial Б$), а $B_{\max}=\dfrac{F_{\max}}{\upsilon_0}=60$.

Значення ймовірності появи бітової помилки $p_{ост}$ за формулою (24) для всіх значень $B<B_{\max}$ з таблиці 1 і кодів Хеммінга з кількістю перевірних елементів $r=3...10$ наведені в таблиці 4.

Таблиця 4

Ймовірність бітової помилки

B \ r	3	4	5	6	7	8	9	10
3	0.016	0.258*	0.258*	0.258*	0.258*	0.258*	0.258*	0.258*
4	0.012	0.227*	0.227*	0.227*	0.227*	0.227*	0.227*	0.227*
5	8.762e-3	0.201*	0.201*	0.201*	0.201*	0.201*	0.201*	0.201*
7	5.031e-3	0.161*	0.161*	0.161*	0.161*	0.161*	0.161*	0.161*
11	1.729e-3	0.107*	0.107*	0.107*	0.107*	0.107*	0.107*	0.107*
13	1.027e-3	1.973e-3	0.089*	0.089*	0.089*	0.089*	0.089*	0.089*
15	6.136e-4	1.27e-3	0.074*	0.074*	0.074*	0.074*	0.074*	0.074*
19	2.223e-4	5.15e-4	0.051*	0.051*	0.051*	0.051*	0.051*	0.051*
23	8.182e-5	2.049e-4	0.036*	0.036*	0.036*	0.036*	0.036*	0.036*
31	1.15e-5	3.162e-5	6.227e-5	0.019*	0.019*	0.019*	0.019*	0.019*
35	0.013*	1.237e-5	2.569e-5	0.013*	0.013*	0.013*	0.013*	0.013*
43	7.072e-3*	1.901e-6	4.217e-6	7.911e-6	7.072e-3*	7.072e-3*	7.072e-3*	7.072e-3*
47	5.157e-3*	5.157e-3*	1.694e-6	3.304e-6	5.157e-3*	5.157e-3*	5.157e-3*	5.157e-3*
59	2.026e-3*	2.026e-3*	2.026e-3*	2.026e-3*	2.026e-3*	2.026e-3*	2.026e-3*	2.026e-3*

Знак (*) біля значення в таблиці вказує на неможливість використання кодів Хеммінга з такою швидкістю при відповідній базі. Ймовірність бітової помилки визначається тільки базою.

Оскільки $\min p_{ост}\left(B_i,r_i\right)=p_{ост}\left(47,5\right)=1,694\cdot 10^{-6}$, $\left(B_{opt},r_{opt}\right)=\left(47,5\right)$.

Застосуємо запропоновану методику вибору оптимального співвідношення кодового і некодового методів підвищення достовірності для наведеного вище прикладу. Значення $r_i \in [3, r_{\max}]$ і відповідні їм максимальні значення $B_{i\max}$, для яких $B_{\max} \geq \dfrac{B_{i\max}}{\gamma_{ст\ i\max}\gamma_{дин\ i\max}}$, наведені в таблиці 5.

Таблиця 5

Значення r_i і відповідні їм максимальні значення бази

r_i	3	4	5	6	7
$B_{i\max}$	31	43	47	47	–

Обчислені значення $p_{ост}(B_{i\max}, r_i)$ знаходяться у виділених комірках таблиці 4, а $(B_{opt}, r_{opt}) = (47{,}5)$, що співпадає з отриманим раніше результатом.

Таким чином, замість обчислення 112 значень $p_{ост}$ у випадку повного перебору досить обчислити 4 значення і вибрати з них мінімальне. Величина зменшення часових витрат на обчислення значень $p_{ост}$ складає 28 та істотно зростає зі збільшенням значення $B_{\max}$.

Отримані результати. Отримані результати дозволяють вирішити поставлене в пункті 3 завдання вибору оптимального співвідношення параметрів кодового (коди Хеммінга) і некодового (ФМ ШПС) методів підвищення достовірності передавання даних з метою мінімізації ймовірності бітової помилки в каналі з обмеженою смугою частот, обмеженою потужністю сигналу і заданою швидкістю передавання даних.

Знайдені оптимальні параметри підвищення достовірності дають відповідь на поставлене в пункті 1 запитання забезпечення максимальної достовірності передавання даних у каналі з відомими шириною смуги частот, потужністю сигналу і швидкістю передавання даних.

Відповідно до запропонованої методики на першому етапі істотно скорочується діапазон пошуку оптимального співвідношення між базою ШПС і параметрами коду Хеммінга (зменшується кількість пар (B_i, r_i), що підлягають розгляду), а потім за критерієм мінімуму бітової помилки вибираються оптимальні значення бази ШПС і довжини кодової комбінації.

Спосіб вибору оптимальних параметрів отриманий як для кодів Хеммінга з прямим виправленням помилок, так і для кодів Хеммінга з виявленням помилок.

Висновки. Запропонована методика дозволяє максимізувати ефективність систем передавання даних, що використовують шумоподібні сигнали і завадостійке кодування кодами Хеммінга, і досягти максимальної достовірності передавання даних за рахунок оптимального співвідношення параметрів некодового (ШПС) і кодового (завадостійкого кодування) методів підвищення достовірності.

ЛІТЕРАТУРИ:

1. *Питерсон У., Уэлдон Э.* Коды, исправляющие ошибки. – М.: Мир, 1976. – 590 с.
2. *Варакин Л.Е.* Системы связи с шумоподобными сигналами. – М.: Радио и связь, 1985. – 384 с.
3. *Диксон Р.К.* Широкополосные системы.: Пер. с англ. / Под ред. В.И. Журавлева. – М: Связь, 1979. – 304 с.
4. *Лега Ю.Г.* Системное проектирование средств связи с шумовыми сигналами: Монография. – К.: Наукова думка, 2000. – 304 с.
5. *Stefansson T.* CODIT – a Possible Candidate for UMTS. Proceedings. The Sixth Nordic Seminar on Digital Mobile Radio Communications. – DMR VI 1994. – Pp 90–96.
6. An Overview of the Application of Code Division Multiple Access (CDMA) to Digital Cellular Systems and Personal Cellular Networks. Qualcomm Incorporated, 1992. – Pp. 58.
7. *Швыдкий В.В.* Цифровая демодуляция ЧМ-сигнала на низкой несущей частоте // Техника средств связи / ТПС. – Вып. 2 (35). – 1979. – С. 73–78.
8. *Березюк Н.Т., Андрущенко А.Г., Мощицкий С.С. и др.* Кодирование информации (двоичные коды). – Харьков: Выща шк., 1978. – 252 с.

ЛЕГА Юрій Григорович – доктор технічних наук, професор, ректор Черкаського державного технологічного університету.

Наукові інтереси:

– розробка системних принципів синтезу і аналізу телекомунікаційних систем з шумовими сигналами;

– розробка та застосування загальної теорії самокерованих систем та їх математичних моделей оптимізації;

– автоматизовані системи управління мережами зв'язку між розподіленими об'єктами.

Тел.: 8(0472)310092.

ФАУРЕ Еміль Віталійович – аспірант Черкаського державного технологічного університету.

Наукові інтереси:

– оптимізація процедур обробки сигналів при передаванні даних каналами низької якості;

– розробка систем синхронізації для мереж зв'язку з шумоподібними сигналами;

– аналіз нових галузей застосування систем зв'язку с шумоподібними сигналами.

Тел.: 8(0472)730285.

E-mail: emmil@km.ru.

Подано 11.07.2008

Лега Ю.Г., Фауре Е.В. Сумісне використання шумоподібних сигналів і коректувальних кодів Хеммінга
Лега Ю.Г., Фауре Е.В. Совместное использование шумоподобных сигналов и корректирующих кодов Хэмминга
Lega Y.G., Faure E.V. Spread-Spectrum Signals and Hamming Correcting Codes Sharing

УДК 621.391+004.73
Совместное использование шумоподобных сигналов и корректирующих кодов Хэмминга / Ю.Г. Лега, Е.В. Фауре
В статье рассмотрен вопрос применения корректирующих кодов Хэмминга в системах, использующих шумоподобные сигналы. Предложена методика выбора оптимальных параметров некодового (база шумоподобного сигнала) и кодового (длина кодовой комбинации) методов повышения достоверности передачи данных в канале с ограниченными шириной полосы частот и мощностью сигнала и заданной скоростью передачи данных.

УДК 621.391+004.73
Spread-Spectrum Signals and Hamming Correcting Codes Sharing / Y.G. Lega, E.V. Faure
In the article the problem of Hamming correcting codes application in spread-spectrum systems is examined. The optimal parameters decision technique of code (code combination length) and non-code (spreading ratio) increasing data adequacy methods in a channel with limited bandwidth and signal power and specified data transfer rate is offered.