

Т.І. Кулік, к.т.н., доц.

Б.М. Злотенко, д.т.н., проф.

Київський національний університет технологій та дизайну

НАПРУЖЕННЯ І ДЕФОРМАЦІЇ ПРИ КРУЧЕННІ ПОЛІМЕРНИХ ДЕТАЛЕЙ

Стаття присвячена визначенню напружень, що виникають при деформації полімерних деталей, а саме, при крученні. Використано аналітичні методи дослідження з графічним представленням результатів. Оскільки пружні властивості полімерних матеріалів не підкоряються закону Гука, використання класичних методів прикладної механіки для розрахунку таких деталей призводить до похибок у результатах розрахунків. Розглянуто процес деформації балки з полімерного матеріалу під дією крутного моменту. Розроблено математичну модель кручення суцільної та порожнистої балки круглого поперечного перерізу. Отримані вирази для визначення розподілу зсувних напружень по радіусу балки та розрахунку кута закручування перерізів балки під дією крутного моменту з урахуванням характеру зв'язку між деформаціями та напруженнями для полімерного матеріалу. Побудовані графічні залежності, що демонструють результати розрахунку зсувних напружень та деформацій балок при різних значеннях крутного моменту. Математична модель побудована з використанням степеневі залежності між напруженнями та деформаціями полімерного матеріалу. Результати можуть бути використані для проектування конструктивних елементів машин та приладів, будівельних конструкцій, виробів легкої промисловості.

Ключові слова: полімерні деталі; крутний момент; деформація кручення; напруження.

Постановка проблеми у загальному вигляді. Сьогодні як у машинобудуванні, так і в інших галузях промисловості, з кожним роком збільшуються обсяги споживання полімерів. З них виготовляють як дрібні, але конструктивно складні й відповідальні деталі машин і механізмів, так і великогабаритні корпусні деталі, що несуть значні навантаження [1–3]. На відміну від пружних матеріалів, полімери мають нелінійний зв'язок між напруженнями та деформаціями, що обмежує використання відомих методів опору матеріалів для розрахунку деталей на міцність та жорсткість. У зв'язку з цим постає проблема розробки інженерного методу розрахунку полімерних деталей з урахуванням фізико-механічних властивостей полімерних матеріалів.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Порівняно з деталями зі сталі, полімерні деталі мають невелику вагу, високі тепло- гідро- та електроізоляційні властивості, високу хімічну та біологічну стійкість [4]. Значною перевагою полімерних деталей є їх висока технологічність – відносна простота переробки різними методами, можливість отримання виробів довільної форми. Виготовлення виробів з пластмас виділяється низькою трудомісткістю, енергомісткістю, доступністю вихідної сировини. На виготовлення пластмасового виробу потрібно витратити в 2,5–4 рази менше праці, ніж на виготовлення аналогічного виробу з металу, при цьому споживання енергії зменшується у 3–5 разів [5]. Незважаючи на значно меншу вартість пластмасових деталей, за своїми характеристиками вони не поступаються виробам з металів, а іноді й перевершують їх.

Постановка завдання. Розрахунки деталей із полімерних матеріалів пов'язані з певними труднощами [6–8]. Класичні методи опору матеріалів не дозволяють отримати результат з високою точністю, оскільки пружні властивості полімерів не підкоряються закону Гука. Отже, розробка методів розрахунку напружень при різних видах деформації полімерних елементів є актуальним завданням, вирішення якого сприятиме підвищенню якості як окремих деталей, так і вузлів машин та приладів, які містять такі деталі.

Метою дослідження є визначення напружень та переміщень у деталях при деформаціях кручення.

Викладення основного матеріалу. Розглянемо кручення полімерної балки, один кінець якої закріплений, а другий навантажено крутним моментом T за схемою наведеною в [9] (рис. 1).

Розглянемо будь-яку точку на відстані ρ від центра перетину і елементарну площу dA навколо неї. Сила, що діє на елементарну площу, буде:

$$dP = \tau_\rho dA, \quad (1)$$

де τ_ρ – напруження зсуву в точці.

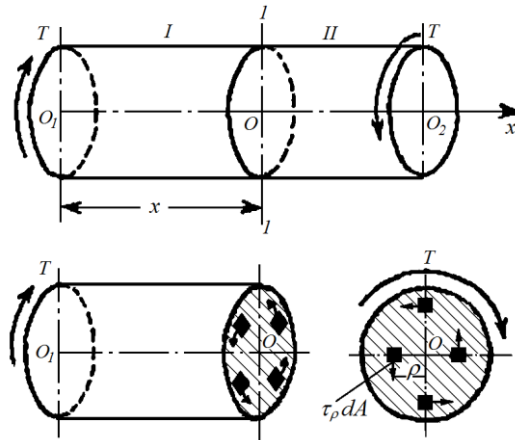


Рис. 1. Схема кручення балки

Момент цієї сили відносно точки O буде:

$$dT = \tau_\rho \rho dA. \quad (2)$$

Вважаючи площу dA нескінченно малою, можемо знайти суму всіх моментів, які діють в даному перетині:

$$\sum dT = \int_A \tau_\rho \rho dA \quad (3)$$

або

$$\int_A \tau_\rho \rho dA = T. \quad (4)$$

Виділимо на поверхні балки перед деформацією прямокутник $ABDC$ (рис. 2) за допомогою двох твірних ліній ab і cd та двох поперечних перетинів 1-1 і 2-2 [9].

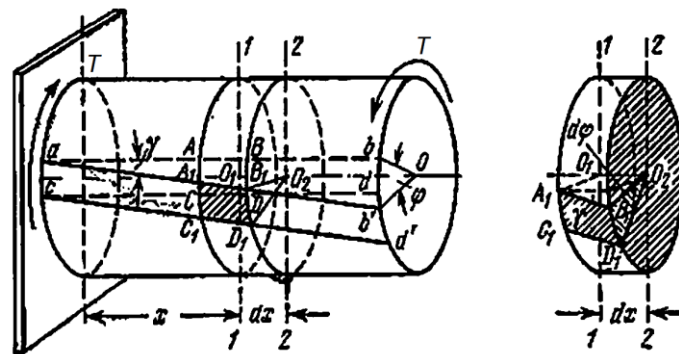


Рис. 2. Схема деформації матеріалу балки при крученні

Після деформації обидва перетини 1-1 і 2-2 повертаються на кути φ_x (перетин 1-1) та $\varphi_x + dx$ (перетин 2-2).

На рисунку 3 показано напруження, які діють на елементарну площу $B_1D_1O_2$ у перерізі полімерної балки. Їх величина може бути виражена через кут зсуву γ , який характеризує деформацію прямокутника $A_1B_1D_1C_1$ за формулою [10]:

$$\tau^m = \gamma G, \quad (5)$$

де m – показник степеня, знаходиться в межах від 0,6 до 1 (при $m=1$ тіло виявляє пружні властивості); G – модуль пружності при зсуві, який можна визначити через модуль пружності при розтягу E та коефіцієнт Пуассона μ : $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$.

Оскільки абсолютне зміщення елемента на поверхні балки $BB' = rd\varphi$, при куті зсуву $\gamma = \frac{BB'}{A_1B} = r \frac{d\varphi}{dx}$, напруження в точці B_1 будуть:

$$\tau_B^m = \gamma G = rG \frac{d\varphi}{dx}. \quad (6)$$

Визначимо напруження τ_ρ в точці перетину L_1 , яка знаходиться на відстані ρ від центра (рис. 4). Для цього потрібно знайти кут зсуву матеріалу в точці L_1 . На рисунку 3 кут зсуву LKL_1 позначено γ_ρ . Він буде менший, ніж кут зсуву на поверхні. Як і при визначенні γ , можна знайти, що $\gamma_\rho = \rho \frac{d\varphi}{dx}$, отже,

$$\tau_\rho^m = \rho G \frac{d\varphi}{dx}, \quad (7)$$

звідки

$$\tau_\rho = \left(\rho G \frac{d\varphi}{dx} \right)^{\frac{1}{m}}. \quad (8)$$

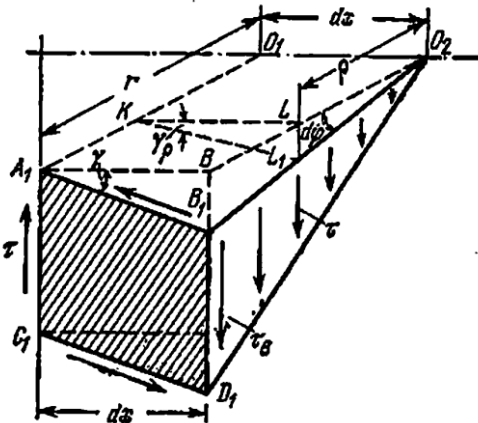


Рис. 3. Напруження та деформації в елементарному сегменті балки

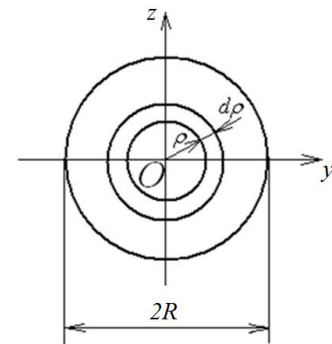


Рис. 4. Схема поперечного перетину балки

Зсувні напруження можна визначити з (7), підставляючи значення τ_ρ , виражене з (8) і виносячи величину $\left(G \frac{d\varphi}{dx} \right)^{\frac{1}{m}}$, яка є сталою при інтегруванні по площі, за знак інтегрування:

$$\left(G \frac{d\varphi}{dx} \right)^{\frac{1}{m}} \int_A \rho^{\frac{1}{m}+1} dA = T. \quad (9)$$

Позначимо:

$$I_{0m} = \int_A \rho^{\frac{1}{m}+1} dA. \quad (10)$$

Тоді:

$$\left(G \frac{d\varphi}{dx} \right)^{\frac{1}{m}} I_{0m} = T. \quad (11)$$

З цього рівняння отримаємо:

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^{\frac{1}{m}} = \frac{T}{G^{\frac{1}{m}} I_{0m}}. \quad (12)$$

Підставляючи $\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^{\frac{1}{m}}$ з (12) в (8), отримаємо:

$$\tau_{\rho} = \rho^{\frac{1}{m}} (T/I_{0m}). \quad (13)$$

Найбільші зсувні напруження діють на поверхні балки:

$$\tau = r^{\frac{1}{m}} (T/I_{0m}). \quad (14)$$

Величина I_{0m} для суцільної балки буде (рис. 4):

$$I_{0m} = \int_A \rho^{\frac{1}{m+1}} dA = \int_0^R \rho^{\frac{1}{m+1}} \rho d\rho = \int_0^R \rho^{\frac{1}{m+2}} d\rho = \frac{m}{1+3m} \rho^{\frac{1}{m+3}} \Big|_0^R = \frac{m}{1+3m} R^{\frac{1}{m+3}}. \quad (15)$$

У випадку порожнистої балки отримаємо:

$$I_{0m} = I_{0m}(R) - I_{0m}(r) = \frac{m}{1+3m} \left(R^{\frac{1}{m+3}} - r^{\frac{1}{m+3}} \right). \quad (16)$$

де $I_{0m}(R)$ і $I_{0m}(r)$ – величини, визначені для суцільних балок радіусів R і r відповідно.

На рисунку 5 наведена залежність напружень від радіальної координати для балки круглого поперечного перетину з радіусом 6 мм, показником $m=1,1$ і модулем зсуву $G=10^{8,5}$ Н/м², розрахована за виразом (13).

На рисунку 6 наведена залежність напружень від показника m для балки круглого поперечного перетину з радіусом 6 мм і модулем зсуву $G=10^{8,5}$ Н/м², розрахована за виразом (13).

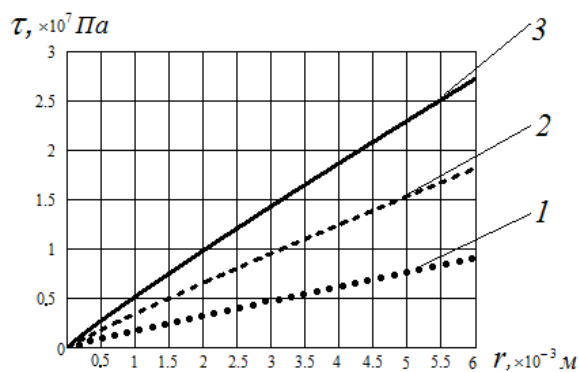


Рис. 5. Залежність напружень від радіальної координати для балки круглого поперечного перетину: 1 – $T=0,5$ Н·м; 2 – $T=1$ Н·м; 3 – $M=1,5$ Н·м

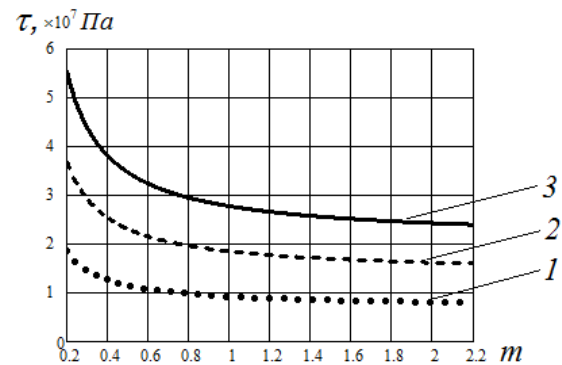


Рис. 6. Залежність найбільших напружень від показника m для балки круглого поперечного перетину: 1 – $T=0,5$ Н·м; 2 – $T=1$ Н·м; 3 – $M=1,5$ Н·м

Кут закручування балки буде:

$$\varphi = \gamma \frac{l}{r}, \quad (17)$$

де l – довжина балки.

Із (5) маємо:

$$\gamma = \frac{\tau^m}{G}. \quad (18)$$

Підставляючи (18) в (17), отримаємо:

$$\varphi = \frac{\tau^m l}{G r}. \quad (19)$$

Після підстановки (14) в (19), отримуємо:

$$\varphi = \frac{(T/I_{0m})^m}{G} l. \quad (20)$$

На рисунку 7 наведена залежність кута повороту порожнистої балки від крутного моменту, розрахована за виразом (20).

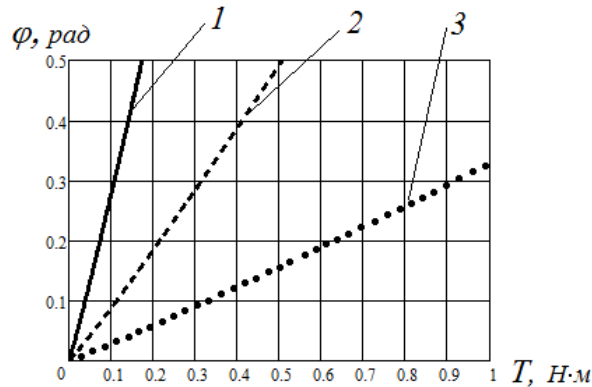


Рис. 7. Залежність кута повороту балки від крутного моменту при $R = 6$ мм; $r = 5$ мм;
 $l = 3$ мм:

1 – $G = 10^8$ Н/м²; 2 – $G = 10^{8.5}$ Н/м²; 3 – $G = 10^9$ Н/м²

Висновок. Розроблена математична модель кручення балки із степеневим законом зв'язку між напруженнями та деформаціями, характерним для більшості конструктивних полімерних матеріалів. Отримані аналітичні вирази для розрахунку суцільної та порожнистої полімерної балки на міцність та жорсткість при крученні. На основі отриманих аналітичних виразів побудовані графічні залежності зсувних напружень та кута закручування полімерної балки від величини крутного моменту за відомих значеннях модуля зсуву, зовнішнього та внутрішнього радіусів балки.

Отримані результати можуть бути використані для проектування полімерних деталей машин та приладів, будівельних конструкцій, виробів легкої промисловості тощо.

Список використаної літератури:

1. Полімери в машинобудуванні [Електронний ресурс]. – Режим доступу : <http://www.eai.org.ua/pol-meri-v-mashinobuduvann/>.
2. Аутан А.А. Enhancement in Mechanical Properties of Polystyrene Filled with Carbon Nano Particulates (CNPS) / А.А. Аутан, М.М. Mahmoud, А.А. Omer // World Journal of Nano Science and Engineering (WJNSE). – 2012. – Vol. 2. – № 2. – P. 103–109.
3. Mechanical behaviour of cyclic olefin copolymer/exfoliated graphite nanoplatelets nanocomposites foamed through supercritical carbon dioxide / А.Віані, А.Дорігато, М.Слоуф, А.Пегоретті // Express Polymer Letters. – 2016. – № 10 (12). – P. 977–989.
4. Иванов М.Н. Детали машин : учебник / М.Н. Иванов, В.А. Финогенов. – 15-е изд. испр. и доп. – М. : Юрайт, 2014. – 408 с.
5. Суберляк О.В. Технология переработки полимерных та композиционных материалов : підруч. для студ. вищ. навч. закл. / О.В. Суберляк, П.І. Бащанник. – Л. : Растр-7, 2007. – 376 с.
6. Пахаренко В.А. Переработка полимерных композиционных материалов / В.А. Пахаренко, Р.А. Яковлева, А.В. Пахаренко. – К. : Воля, 2006. – 552 с.
7. Кулезнев В.Н. Основы технологии переработки пластмасс / В.Н. Кулезнев ; под ред. В.Н. Кулезнёва и В.К. Гусева. – М. : Химия, 2006. – 726 с.
8. Тагер А.А. Физико-химия полимеров / А.А. Тагер. – изд. 4-е, перер. и дополн. – М. : Научный мир, 2007. – 576 с.
9. Беляев Н.М. Сопротивление материалов / Н.М. Беляев. – М. : Наука, 1976. – 608 с.

10. Лебедев В.С. Основные процессы, машины и аппараты предприятий бытового обслуживания / В.С. Лебедев – М. : Легкая индустрия, 1976. – 399 с.

References:

1. Jevroalaninform (2015), “Polimery v mashinobuduvanni”, available at: www.eai.org.ua/pol-meri-v-mashinobuduvann/ (accessed 02 November 2016).
2. Ayman, A.A., Mahmoud, M.M. and Omer, A.A. (2012), “Enhancement in Mechanical Properties of Polystyrene Filled with Carbon Nano Particulates (CNPS)”, *World Journal of Nano Science and Engineering (WJNSE)*, Vol. 2, No. 2, pp. 103–109.
3. Biani, A., Dorigato, A., Slouf, M. and Pegoretti, A. (2016), “Mechanical behaviour of cyclic olefin copolymer/exfoliated graphite nanoplatelets nanocomposites foamed through supercritical carbon dioxide”, *Express Polymer Letters*, No. 10 (12), pp. 977–989.
4. Ivanov, M.N. and Finogenov, V.A. (2014), *Detali mashin*, Yuwrite, Moscow, 408 p.
5. Suberljak, O.V. and Bashtannyk, P.I. (2007), *Tehnologija pererobky polimernih ta kompozycijnyh materialiv*, Rastr-7, Lviv, 376 p.
6. Pakharenko, V.A. (2006), *Pererabotka polimernih kompozitsionnyh materialov*, Volya, Kyiv, 552 p.
7. Kuleznev, V.N. and Gusev, V.K. (2006), *Osnovy tehnologii pererabotki plastmass*, Chemistry, Moscow, 726 p.
8. Tager, A.A. (2007), *Phiziko-khimia polimerov*, Scientific World, Moscow, 576 p.
9. Belyaev, N.M. (1976), *Soprotivlenie materialov*, Nauka, Moscow, 608 p.
10. Lebedev, V.S. (1976), *Osnovnye protsessy, mashiny i apparaty predpriyatiy bytovogo obsluzhivaniya*, Legkaya industriya, Moscow, 399 p.

КУЛІК Тетяна Ігорівна – кандидат технічних наук, доцент кафедри електромеханічних систем Київського національного університету технологій та дизайну.

Наукові інтереси:

- лиття полімерів під тиском;
- технологія взуттєвого виробництва.

Тел.: (097) 309-04-70.

E-mail: t-81@ukr.net.

ЗЛОТЕНКО Борис Миколайович – доктор технічних наук, завідувач кафедри електромеханічних систем Київського національного університету технологій та дизайну.

Наукові інтереси:

- лиття полімерів під тиском;
- технологія взуттєвого виробництва.

Тел.: (050) 810-96-10.

E-mail: zlotenco@ukr.net.

Стаття надійшла до редакції 06.09.2016.