ПРИЛАДИ. РАДІОТЕХНІКА ТА ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЇ

УДК 517.2

В.Л. Баранов, д.т.н., проф.
Житомирський військовий інститут радіоелектроніки ім. С.П. Корольова
С.В. Водоп'ян, к.т.н., с.н.с.
Житомирський науково-дослідний інститут радіосистем
Р.М. Костюченко, аспір.
Житомирський військовий інститут радіоелектроніки ім. С.П. Корольова

МЕТОД МОДЕЛЮВАННЯ ФІЗИЧНИХ ПРОЦЕСІВ НА ОСНОВІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ НЕЛІНІЙНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

Запропоновано метод аналітичного моделювання фізичних процесів, що побудований на одномірних диференціальних перетвореннях нелінійних крайових задач. Розглянуто особливості моделювання нелінійних крайових задач. Наведено приклад застосування запропонованого методу.

Постановка проблеми. Математичні моделі фізичних процесів у теплових, механічних і електричних системах описуються диференціальними рівняннями в частинних похідних із заданими граничними умовами. У багатьох практичних застосуваннях крайові задачі містять нелінійності в граничних умовах. Такі нелінійні крайові задачі називаються задачами з зовнішньою нелінійністю. Відомі чисельні методи розв'язку нелінійних крайових задач з зовнішньою нелінійністю вимагають виконання значного обсягу обчислень на ЕОМ і в ряді випадків не можуть забезпечити заданої точності моделювання, коли на час моделювання накладено обмеження, пов'язані з виконанням моделювання в реальному часі. В зв'язку з цим виникає потреба в розробці аналітичних і чисельно-аналітичних методів моделювання нелінійних крайових задач, які суттєво знижують обчислювану складність моделювання фізичних процесів на ЕОМ і дозволяють виконувати моделювання в межах допустимої похибки за заданий час.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. [1–9] показав, що серед аналітичних і чисельно–аналітичних методів широке застосування в практичних цілях отримали методи моделювання, що грунтується на інтегральних і диференціальних перетвореннях крайових задач. Основний недолік інтегральних перетворень пов'язаний з обмеженням області їх застосуванням класом лінійних рівнянь в частинних похідних з лінійними граничними умовами. Диференціальні перетворення дозволяють розширити область їх застосування на нелінійні крайові задачі, але особливості нелінійних крайових умов потребують додаткових наукових досліджень.

Метою статті є розробка методу моделювання фізичних процесів, який розширює область застосування аналітичних моделей на задачі з нелінійними крайовими умовами.

Розглянемо фізичні процеси, що описуються функцією $u(x_1,\ x_2)$ двох незалежних змінних в області, що визначається обмеженнями:

$$0 \le |x_1| \le \infty\,,\ 0 \le |x_2| \le \infty\,. \tag{1}$$

Математична модель фізичного процесу в області (1) у вигляді нелінійної крайової задачі складається з диференціального рівняння в частинних похідних:

$$f(x_1,\ x_2,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x_1},\ \frac{\partial u}{\partial x_2},\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}) = 0 \tag{2}$$

І граничних (крайових) умов на межі Γ середовища, в якому протікає фізичний процес. Обмежимось розглядом крайових задач, у яких граничні умови складаються з трьох основних видів:

умови Діріхле: $u(x)\big|_{x\in\Gamma} = \psi(x)\,,$ (3)

умови Неймана: $\frac{du(x)}{d\bar{n}}\Big|_{x\in\Gamma} = \psi(x)\,,$ (4)

змішані умови: $\left|-\frac{du(x)}{d\bar{n}} + \delta(u)\right|_{x\in\Gamma} = 0\,,$ (5)

де $\psi(x)$ неперервна функція, визначена на граничній поверхні Γ; а $\frac{du(x)}{d\bar{n}}$ означає похідну, взяту в точці поверхні Γ в напрямку нормалі до неї, $\delta(u)$ – неперервна функція, яка визначена на граничній поверхні Γ, x – вектор з координатами x_1, x_2.

З широкого класу нелінійних крайових задач (1)–(5) виділимо нелінійні задачі з умовами (3)–(5), у яких диференціальне рівняння в частинних похідних (2) можливо представити у вигляді однієї з двох форм:

$$\frac{\partial^2 u(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} = \varphi_1(x_1, x_2, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}), \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2 u(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} = \varphi_1(x_1, x_2, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}). \tag{7}$$

де φ_1, φ_2 – довільні функції своїх аргументів.

Нелінійні крайові задачі (3)–(7) пропонується моделювати на основі зміщених диференціальних перетворень [1]:

$$U(k_1, x_2) = \frac{H_1^{k_1}}{k_1!}\left(\frac{\partial^{k_1} u(x_1, x_2)}{\partial x_1^{k_1}}\right)_{x_1 = x_{1\nu}}, \tag{8}$$

$$U(x_1, k_2) = \frac{H_2^{k_2}}{k_2!}\left(\frac{\partial^{k_2} u(x_1, x_2)}{\partial x_2^{k_{21}}}\right)_{x_2 = x_{2\nu}}. \tag{9}$$

де $x_{1\nu}$, $x_{2\nu}$ – координати фіксованої точки в межах області (1); k_1, k_2 – цілочисельні аргументи, що приймають значення 0, 1, 2, $3,...,\infty$; $U(k_1, x_2)$, $U(x_1, k_2)$ – диференціальні зображення функції $u(x_1, x_2)$, які будемо називати диференціальними спектрами, а їх значення при фіксованих значеннях цілочисельних аргументів – дискретами відповідних диференціальних спектрів, H_1, H_2 – задані додатні сталі, що визначають обмеження на незалежні змінні в середовищі, в якому розглядається фізичний процес:

$$x_{1\nu} \le x_1 \le x_{1\nu} + H_1,\ x_{2\nu} \le x_2 \le x_{2\nu} + H_2. \tag{10}$$

Обернений перехід з області зображень в область оригіналів здійснюється оберненими диференціальними перетвореннями вигляду:

$$u(x_1, x_2) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \left(\frac{x_1 - x_{1\nu}}{H_1}\right)^{k_1} U(k_1, x_2), \tag{11}$$

$$u(x_1, x_2) = \sum_{k_2=0}^{\infty} \left(\frac{x_2 - x_{2\nu}}{H_2}\right)^{k_2} U(x_1, k_2). \tag{12}$$

Всі основні властивості одномірних диференціальних перетворень, які встановлені в [6]–[8], зберігаються для перетворень виду (8), (9) і викладені в [1].

Переведемо рівняння (6) в область зображень диференціальними перетвореннями (8), а переведення рівняння (7) в область зображень виконаємо диференціальними перетвореннями (9).

Отримаємо:

$$\begin{aligned} U(k_1 + 2, x_2) = \frac{k_1!H_1^2}{(k_1+2)!}\Phi_1[k_1, x_2, U(k_1, x_2), \frac{k_1+1}{H_1}\ U(k_1 + 1, x_2), \frac{dU(k_1, x_2)}{dx_2}, \\ \frac{(k_1+1)}{H_1}\ \frac{dU(k_1+1, x_2)}{dx_2}, \frac{d^2U(k_1, x_2)}{dx_2^2}], \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} U(x_1, k_2 + 2) = \frac{k_2!H_2^2}{(k_2+2)!}\Phi_2[x_1, k_2, U(k_1, x_2), \frac{dU(x_1, k_2)}{dx_1}, \frac{k_2+1}{H_2}\ U(x_1, k_2 + 1), \\ \frac{(k_2+1)}{H_2}\ \frac{dU(x_1, k_2+1)}{dx_1}, \frac{d^2U(x_1, k_2)}{dx_1^2}], \end{aligned} \tag{14}$$

де Φ_1 – зображення функції φ_1 на основі перетворень (8); Φ_2 – зображення функції φ_2 на основі перетворень (9).

Рекурентний вигляд виразів (13), (14) дозволяє знаходити дискрети диференціальних спектрів $U(k_1,x_2)$ і $U(x_1, k_2)$ послідовно, надаючи цілочисельним аргументам k_1 і k_2 значення 0, 1, 2, 3,…. Аналітичні обчислення за виразами (13), (14) можна виконувати з невідомими початковими дискретами диференціальних спектрів, використовуючи їх символьні позначення. Рівняння для визначення невідомих дискрет диференціальних спектрів складають на основі граничних умов (3)–(5), використовуючи обернені перетворення (11), (12). Граничні умови вигляду (3), (4) пов’язані з дискетами диференціальних спектрів (8), (9) таким чином [1]:

$$u(x_{1\nu}, x_2) = U(0, x_2),\quad u(x_1, x_{2\nu} 0) = U(x_1, 0), \tag{15}$$

$$u(x_{1_\nu} + H_1, x_2) = \sum_{k_1=0}^{\infty} U(k_1, x_2) = \psi_1(x_2),$$

$$u(x_1,\ x_{2_\nu} + H_2) = \sum_{k_2=0}^{\infty} U(x_1, k_2) = \psi_2(x_1),$$

$$U(1, x_2) = H_1\left[\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1}\right]_{x_1=x_{1_\nu}} \qquad U(x_1, 1) = H_2\left[\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2}\right]_{x_2=x_{2_\nu}},$$

$$\left[\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1}\right]_{x_1=x_{1_\nu}+H_1} = \frac{1}{H_1}\sum_{k_1=0}^{\infty}(k_1+1)U(k_1+1, x_2) = \psi_1(x_2),$$

$$\left[\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2}\right]_{x_2=x_{2_\nu}+H_2} = \frac{1}{H_2}\sum_{k_2=0}^{\infty}(k_2+1)U(x_1, k_2+1) = \psi_2(x_1).$$

Підстановка функції $u(x_1, x_2)$ з виразів (11), (12) у граничну умову (5) дає звичайні нелінійні диференціальні рівняння для визначення невідомих дискрет диференціальних спектрів:

$$\left[\frac{du(x_1, x_2)}{dx_1}\right]_{x_1=x_{1_\nu}+H_1} = \sum_{k_1=0}^{\infty}\frac{k_1}{H_1}U(k_1, x_2) = \delta(u)\Bigg|_{x_1=x_{1_\nu}+H_1}, \tag{16}$$

$$\left[\frac{du(x_1, x_2)}{dx_2}\right]_{x_2=x_{2_\nu}+H_2} = \sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{k_2}{H_2}U(x_1, k_2) = \delta(u)\Bigg|_{x_2=x_{2_\nu}+H_2}. \tag{17}$$

Нелінійне диференціальне рівняння (16) слід інтегрувати за аргументом x_2 згідно з виразом (13), який визначає залежність дискрет диференціального спектра $U(k_1, x_2)$ від похідних $\frac{dU(k_1, x_2)}{dx_2}$. Згідно з виразом (14) нелінійне диференціальне рівняння (17) необхідно інтегрувати по аргументу x_1 .

Чисельному розв'язку нелінійних диференціальних рівнянь (16), (17) заважає відсутність усіх початкових умов. Частина початкових умов визначається граничними умовами (15) Невідомі початкові умови слід позначати символьно. Але це потребує аналітичного розв'язку нелінійних диференціальних рівнянь (16), (17). Аналітичний розв'язок нелінійних диференціальних рівнянь (16), (17) можливо знайти двома шляхами. Перший шлях полягає в застосуванні одномірних диференціальних перетворень Пухова Г.Є. [6]–[8] для аналітичного розв'язку нелінійних диференціальних рівнянь (16), (17). Другий шлях потребує лінералізації нелінійної функції $\delta(u)$, що переводить диференціальні рівняння (16), (17) у клас лінійних рівнянь. Для лінійних диференціальних рівнянь відомий аналітичний вигляд розв'язку, який вимагає визначення невідомих параметрів інтегрування. Частина параметрів визначається після підстановки обернених диференціальних перетворень (11), (12) у граничні умови (3)–(5). Але в загальному випадку кількість параметрів інтегрування перевищує кількість рівнянь для їх визначення за допомогою граничних умов (3)–(5). В цьому випадку маємо некоректну задачу, яку потрібно розв’язувати методами розв'язку некоректних задач [10]. Можливий шлях розв'язку некоректних задач запропоновано академіком А.М. Тихоновим [10]. Цей метод регуляризує некоректну задачу шляхом зведення її до мінімізації квадрата норми невідомих параметрів з обмеженнями у вигляді граничних умов (3)–(5). Особливості застосування даного методу розглянемо далі на прикладі.

Після визначення параметрів інтегрування диференціальних рівнянь (16), (17) визначаються повністю усі дискрети диференціальних спектрів $U(k_1,\ x_2)$, або $U(x_1,\ k_2)$, що дає можливість знайти розв'язок нелінійної крайової задачі (3)–(7) оберненими диференціальними перетвореннями (11) або (12).

Особливості моделювання фізичних процесів у вигляді нелінійних крайових задач розглянемо на прикладі визначення температурного поля порожнинного циліндра.

Приклад.

Потрібно визначити температурне поле порожнинного циліндра, внутрішня поверхня якого $\rho = \gamma$ підтримується при температурі α , торець z = 0 теплоізольований, а інша частина поверхні випромінює тепло за законом Стефана–Больцмана.

Задача зводиться до розв'язку рівняння Лапласа:

$$\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\cdot\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,\quad \begin{matrix}\gamma < \rho < \beta \\ 0 < z < 1\end{matrix}. \tag{18}$$

З граничними умовами:

$$u\Big|_{\rho=\gamma} = \alpha\,, \quad \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0} = 0\,, \tag{19}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \rho} + hu^4\right)\Bigg|_{\rho=\beta} = 0\,, \tag{20}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z} + hu^4\right)\Bigg|_{z=1} = 0\,. \tag{21}$$

γ = 0,1875, β = 0,25, α = 2000, $h = 0{,}05896 \cdot 10^{-8}$.

Розв’язання.

Нелінійна задача (18)–(21) містить нелінійні граничні умови (20), (21) і тому належить до нелінійних крайових задач із зовнішньою нелінійністю.

Введемо позначення $\rho = x_1$, $z = x_2$ і перетворимо рівняння (18) до вигляду:

$$\frac{\partial v}{\partial x_1} = -x_1 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\,; \tag{22}$$

$$v(x_1, x_2) = x_1 \cdot \frac{\partial u}{\partial x_1}\,. \tag{23}$$

Граничні умови (19)–(21) з врахуванням введених позначень набудуть вигляду:

$$u\Big|_{x_1=\gamma} = \alpha\,, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2}\Big|_{x_2=0} = 0\,, \tag{24}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + hu^4\right)\Bigg|_{x_1=\beta} = 0\,, \tag{25}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_2} + hu^4\right)\Bigg|_{x_2=1} = 0\,. \tag{26}$$

Перший етап запропонованого методу полягає в тому, що диференціальними перетвореннями (8) переводимо рівняння (22), (23) в область зображень при $x_{1\nu} = \gamma$ [8]:

$$V(k+1,\, x_2) = -\frac{H_1}{(k+1)} \sum_{l=0}^{l=k} \binom{1}{l} \cdot \gamma^{1-l} \cdot H_1^{l} \cdot \frac{d^2 U(k-l, x_2)}{dx_2^2}\,, \tag{27}$$

$$V(k,\, x_2) = \sum_{l=0}^{l=k} \binom{1}{l} \cdot \gamma^{1-l} \cdot H_1^{l-1} (k-l+1) \cdot U(k-l+1, x_2)\,. \tag{28}$$

де $k = k_1 = 0, 1, 2, 3, \ldots$ – цілочисельний аргумент;

$\binom{1}{l} = \dfrac{1}{l!\cdot(1-l)!}$ – біноміальні коефіцієнти.

На основі співвідношень (15) граничні умови (24) дозволяють задати початкові диференціального спектра $U(x_1, k_2)$ у вигляді:

$$U(0, x_2) = \alpha\,,\ U(1, x_2) = H_1 \varphi(x_2) \tag{29}$$

де $\varphi(x_2)$ – довільна функція, яку потрібно визначити.

Другий етап методу полягає в аналітичному визначенні дискрет диференціального спектра $U(x_1, k_2)$ за виразами (27), (28), (29) шляхом послідовного надання цілочисельному аргументу k значень 0, 1, 2, ...

В результаті виконання другого етапу отримуємо диференціальний спектр:

$$\begin{gathered} U(0, x_2) = \alpha\,,\ U(1, x_2) = H_1 \varphi(x_2)\,, \\ U(2, x_2) = -\frac{H_1^2}{2\gamma} \varphi(x_2)\,,\ U(3, x_2) = -\frac{H_1^3}{3}\left[\frac{\varphi(x_2)}{\gamma^2} - \frac{\ddot{\varphi}(x_2)}{2}\right], \end{gathered} \tag{30}$$

де $\ddot{\varphi}(x_2) = \dfrac{d^2 \varphi(x_2)}{dx_2^2}$.

На третьому етапі відновлюємо оригінал розв’язку крайової задачі $u(x_1, x_2)$ оберненими перетвореннями (11), використовуючи диференціальний спектр (30):

$$u(x_1, x_2) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x_1-\gamma}{H_1}\right)^k \cdot U(k, x_2) =$$
$$= \alpha + \gamma \cdot \varphi(x_2)\left[\frac{x_1-\gamma}{\gamma} - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x_1-\gamma}{\gamma}\right)^2 + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{x_1-\gamma}{\gamma}\right)^3\right] - \frac{(x_1-\gamma)^3}{6}\cdot\ddot{\varphi}(x_2) = . \tag{31}$$
$$= \alpha + \gamma \cdot \varphi(x_2)\ln\frac{x_1}{\gamma} - \frac{(x_1-\gamma)^3}{6}\cdot\ddot{\varphi}(x_2)$$

В розв'язку крайової задачі (31) міститься невідома функція $\varphi(x_2)$, яка повинна задовольняти граничним умовам (24)–(26).

Четвертий етап методу полягає у визначенні невідомої функції $\varphi(x_2)$. З цією метою підставляємо розв'язок (31) в граничну умову (25). В результаті отримаємо нелінійне диференціальне рівняння:

$$\frac{1}{2}(\beta-\gamma)^2\cdot\ddot{\varphi}(x_2) - \frac{\gamma}{\beta}\varphi(x_2) = h\cdot\left[\alpha + \gamma\cdot\varphi(x_2)\ln\frac{\beta}{\gamma} - \frac{(\beta-\gamma)^3}{6}\ddot{\varphi}(x_2)\right]^4 . \tag{32}$$

Помножимо ліву і праву частини рівняння (32) на $\frac{1}{h\alpha^4}$ і введемо позначення:

$$b_1 = \frac{(\beta-\gamma)^2}{2h\alpha^4},\ b_2 = \frac{\gamma}{\beta\cdot h\alpha^4},\ b_3 = \frac{\gamma}{\alpha}\ln\frac{\beta}{\gamma},\ b_4 = \frac{(\beta-\gamma)^3}{6\alpha} . \tag{33}$$

З врахуванням позначень (33) рівняння (32) зведемо до вигляду:

$$\sqrt[4]{1-\left[1+b_2\varphi(x_2)-b_1\ddot{\varphi}(x_2)\right]} = 1 + b_3\varphi(x_2) - b_4\ddot{\varphi}(x_2) \tag{34}$$

Розв'язок нелінійного диференціального рівняння (34) виконаємо методом лінеаризації. Розкладемо ліву частину рівняння (34) в степеневий ряд до кубічного члена і виділимо з нелінійних складників головну лінійну частину. В результаті отримаємо лінійне диференціальне рівняння:

$$1 - \frac{1}{4}\left[1+b_2\varphi(x_2)-b_1\ddot{\varphi}(x_2)\right] - \frac{3}{32}\left(1+2\left[b_2\varphi(x_2)-b_1\ddot{\varphi}(x_2)\right]\right) - \frac{21}{384}$$
$$\left(1+3\left[b_2\varphi(x_2)-b_1\ddot{\varphi}(x_2)\right]\right) = 1 + b_3\varphi(x_2) - b_4\ddot{\varphi}(x_2). \tag{35}$$

Рівняння (35) перетворимо до вигляду:

$$\left(\frac{77}{128}b_1 + b_4\right)\cdot\ddot{\varphi}(x_2) - \left(\frac{77}{128}b_2 + b_3\right)\cdot\varphi(x_2) = \frac{51}{128} . \tag{36}$$

З (24) з врахуванням (31), (36) випливає умова $\dot{\varphi}(0) = 0$.

Загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння (36) при $\dot{\varphi}(0) = 0$ має вигляд:

$$\varphi(x_2) = –C - C_4\cdot chC_2x_2 . \tag{37}$$

де $C_2 = \sqrt{\dfrac{\frac{77}{128}b_2 + b_3}{\frac{77}{128}b_1 + b_4}}$ = 22,75 при $x_1 = \beta = 0,25$.

Підстановка (37) у вираз (31) дасть розв'язок нелінійної крайової задачі в аналітичному вигляді:

$$u(x_1, x_2) = \alpha - C_1\ln\frac{x_1}{\gamma} - C_3\frac{chC_2x_2}{chC_2}\left[\ln\frac{x_1}{\gamma} - \frac{C_2^2}{6\gamma}(x_1-\gamma)^3\right], \tag{38}$$

де $C_1 = C\gamma$, $C_3 = C_4\cdot\gamma\cdot chC_2$.

Розв'язок (38) задовольняє крайові умови (24), (25), але містить невідомі параметри C_1, C_2, C_3, для визначення яких маємо тільки одну граничну умову (26).

П'ятий етап методу полягає в розв'язку некоректної задачі визначення параметрів C_1, C_2, C_3 розв'язку (38) при одній граничній умові (26). Цю некоректність задачі розв'яжемо методом Тихонова А.М. [10] шляхом введення регуляризуючого функціонала у вигляді квадрата норми параметрів C_1, C_3 , оскільки для визначення C_2 маємо одну граничну умову (26):

$$I = C_1^2 + C_3^2 . \tag{39}$$

Підстановка розв'язку (38) в граничну умову (26) дає рівняння:

$$-\left.\frac{\partial u}{\partial x_2}\right|_{x_2=1} = C_2\cdot C_3\cdot thC_2\left[\ln\frac{x_1}{\gamma} - \frac{C_2^2}{6\gamma}(x_1-\gamma)^3\right] = \left.h\,u^4\right|_{x_2=1} \tag{40}$$

Де thC_2 при C_2 = 22,75 в (37) можна прийняти рівним одиниці.

Тоді рівняння (40) приймає вигляд:

$$C_2 \cdot C_3 \cdot \left[\ln\frac{x_1}{\gamma} - \frac{C_2^2}{6\gamma}(x_1-\gamma)^3 \right] = h u^4 \Big|_{x_2=1} \tag{41}$$

Некоректна задача звелась до оптимізаційної задачі відшукання мінімуму регуляризуючого функціонала (39) при обмеженні у вигляді рівності (41).

Підстановка C_3 з рівняння (41) у вираз (39) дає регуляризуючий функціонал у вигляді:

$$I = C_1^2 + \left(\frac{h u^4 \big|_{x_2=1}}{C_2 \left[\ln\frac{x_1}{\gamma} - \frac{C_2^2}{6\gamma}(x_1-\gamma)^3 \right]} \right)^2 . \tag{42}$$

Необхідні умови мінімізації (42) дають до рівняння (41) додатково два рівняння:

$$\frac{\partial I}{\partial C_1} = 0, \ \frac{\partial I}{\partial C_2} = 0. \tag{43}$$

Умови (43) з врахуванням (42) перетворяться до вигляду:

$$C_1 \cdot C_2 \cdot \left[\ln\frac{x_1}{\gamma} - \frac{C_2^2}{6\gamma}(x_1-\gamma)^3 \right] - 4hC_3 \ln\frac{x_1}{\gamma} \cdot u^3 \Big|_{x_2=1} = 0, \tag{44}$$

$$4C_2^2 \cdot C_3 \cdot \left[\ln\frac{x_1}{\gamma} - \frac{C_2^2}{6\gamma}(x_1-\gamma)^3 \right] \cdot \frac{(x_1-\gamma)^3}{3\gamma} - \left[\ln\frac{x_1}{\gamma} - \frac{C_2^2}{6\gamma}(x_1-\gamma)^3 \right] u\Big|_{x_2=1} = 0, \tag{45}$$

$$u\Big|_{x_2=1} = \alpha - C_1 \ln\frac{x_1}{\gamma} - C_3 \cdot \left[\ln\frac{x_1}{\gamma} - \frac{C_2^2}{6\gamma}(x_1-\gamma)^3 \right].$$

Таким чином, невідомі в діапазоні зміни визначаються з системи трьох нелінійних рівнянь (41), (44), (45). З усіх коренів, що задовольняють цю систему слід вибрати додатні дійсні корені. Які дають мінімальне значення регуляризуючого функціонала (42).

Розв'язок (38) невизначений в особливих точках $x_1 = \beta = 0,25$, $x_2 = 1$, в яких невизначено напрямок зовнішньої нормалі. В особливих точках відбувається перетин зовнішньої поверхні циліндра з його внутрішнім торцем. З метою усунення невизначеності спряжемо зовнішню поверхню циліндра з його верхнім торцем в перетині x_1Ox_2 колом нескінченно малого радіуса, зовнішня нормаль до якого розкладається на дві рівні складові до зовнішньої поверхні циліндра і до його торця. З врахуванням цього граничні умови випромінювання тепла за законом Стефана–Больцмана в особливих точках $x_1 = \beta = 0,25$, $x_2 = 1$ мають вигляд:

$$-\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big|_{\substack{x_1=\beta \\ x_2=1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} h u^4 \Big|_{\substack{x_1=\beta \\ x_2=1}}, \tag{46}$$

$$-\frac{\partial u}{\partial x_2}\Big|_{\substack{x_1=\beta \\ x_2=1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} h u^4 \Big|_{\substack{x_1=\beta \\ x_2=1}}. \tag{47}$$

Підстановка розв'язку (38) у вирази (46), (47) дає два рівняння для визначення C_1 і C_3 в особливих точках $x_1 = \beta = 0,25$ при $x_2 = 1$:

$$C_2 \cdot C_3 \cdot \left[\ln\frac{x_1}{\gamma} - \frac{C_2^2}{6\gamma}(x_1-\gamma)^3 \right] = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot hu^4 \Big|_{\substack{x=\beta \\ x_2=1}}, \tag{48}$$

$$\frac{C_1}{\beta} + C_3 \cdot \left[\frac{1}{\beta} - \frac{C_2^2}{2\gamma}(x_1-\gamma)^2 \right] = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot hu^4 \Big|_{\substack{x_1=\beta \\ x_2=1}}, \tag{45}$$

де $u\Big|_{\substack{x_1=\beta \\ x_2=1}} = \alpha - C_1 \ln\frac{\beta}{\gamma} - C_3 \cdot \left[\ln\frac{\beta}{\gamma} - \frac{C_2^2}{6\gamma}(\beta-\gamma)^3 \right] 4.$

В особливих точках згідно з (15) C_2, = 22,75 а невідомі параметри C_1 та C_3 визначаються з системи нелінійних рівнянь (48), (49). З усіх коренів, які задовольняють цю систему, потрібно вибрати додатні дійсні корені C_1 та C_3, які дають мінімальне значення регуляризуючого функціонала (39). Таким чином, моделювання температурного поля порожнинного циліндра виконано в аналітичному вигляді (38).

Чисельні розрахунки температурного поля за виразами (38), (41), (44), (45), (48), (49) показали, що результати аналітичного розв'язку нелінійної крайової задачі (18)–(21) поміщаються між результатами, отриманими двома різними методами в роботах [4] і [9].

Висновки. Запропонований метод моделювання фізичних процесів на основі одномірних диференціальних перетворень крайових задач дозволяє отримати аналітичний вигляд розв'язку нелінійних крайових задач. Це дає можливість суттєво знизити обсяг обчислень на ЕОМ в умовах моделювання фізичних процесів у реальному або прискореному часі. Показано, що запропонований метод розширює область застосування аналітичних моделей на задачі з нелінійними крайовими умовами. Але це розширення області застосування аналітичних моделей може призвести до некоректної задачі, яку потрібно регуляризувати.

Перспектива подальших досліджень пов'язана з розширенням класу задач на нелінійні крайові задачі в області складної форми, що дасть змогу значно розширити область прикладного застосування методів аналітичного моделювання фізичних процесів.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Баранов В.Л., Водоп'ян С.В., Костюченко Р.М.* Зміщені системоаналоговідиференціальні перетворення для розв'язку крайових задач // Вісник ЖДТУ. – 2005. – № 4 (35). – С. 42–48.
2. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. – М.: БИНОМ, 2003. – 632 с.
3. *Береговенко Г.Я., Пухов Г.Е., Саух С.Е.* Численные операторные методы решения дифференциальных уравнений и анализа динамических систем. – Киев: Наук. думка, 1993. – 262 с.
4. *Березовский А.А.* Нелинейные краевые задачи теплоизлучающего тела. – К.: Наук. думка, 1968. – 165 с.
5. *Поршнев С.В.* Вычислительная математика. – Санкт-Петербург: БХВ–Петербург, 2004. – 320 с.
6. *Пухов Г.Е.* Дифференциальные преобразования и математическое моделирование физических процессов. – Киев: Наук. думка, 1986. – 158 с.
7. *Пухов Г.Е.* Дифференциальные преобразования функций и уравнений. – Киев: Наук. думка, 1984. – 420 с.
8. *Пухов Г.Е.* Приближенные методы математического моделирования, основанные на применении дифференциальных Т-преобразований. – Киев: Наук. думка, 1988. – 216 с.
9. *Равчев В.Л., Слесаренко А.П.* Алгебра логики и интегральные преобразования в краевых задачах. – Киев: Наук. думка, 1976. – 288 с.
10. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986. – 288 с.

БАРАНОВ Володимир Леонідович – доктор технічних наук, професор, провідний науковий співробітник Житомирського військового інституту радіоелектроніки ім. С.П. Корольова. Заслужений діяч науки і техніки України.

Наукові інтереси:
– моделювання;
– оптимізація;
– диференціальні перетворення;
– чисельні методи.

ВОДОП'ЯН Сергій Васильович – кандидат технічних наук, старший науковий співробітник Житомирського науково-дослідного інституту радіосистем.

Наукові інтереси:
– алгоритми багатоканальних автоматичних систем управління та оцінювання;
– чисельні методи;
– диференціальні перетворення.

КОСТЮЧЕНКО Руслана Михайлівна – викладач кафедри фундаментальних дисциплін Житомирського військового інституту радіоелектроніки ім. С.П. Корольова.

Наукові інтереси:
– моделювання;
– чисельні методи
– диференціальні перетворення.

Подано 12.03.2007