УДК 629.78

С.В. Ковбасюк, к.т.н., с.н.с.
М.Ю. Ракушев, к.т.н.
Житомирський військовий інститут радіоелектроніки ім. С.П. Корольова

ЗАСТОСУВАННЯ ЗМІЩЕНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ДО РОЗВ'ЯЗКУ БАЛІСТИЧНИХ ЗАДАЧ

Наведено обчислювальний алгоритм інтегрування диференціальних рівнянь балістичного руху космічного апарата зміщеними диференціальними перетвореннями. Наведено формули, що враховують особливості диференційних рівнянь балістичного руху космічного апарата та дозволяють реалізувати числовий розв'язок цих рівнянь на основі зміщених диференціально-тейлорівських перетворень.

Вступ. Вирішення переважної більшості балістичних задач включає в себе задачу інтегрування диференціального рівняння руху космічного апарата (КА):

$$\frac{dq}{dw} = f\left(q, w\right), \text{ при } q_0 = q(w_0), \tag{1}$$

де q – вектор параметрів балістичного руху КА;

f – безперервна і безперервно-диференційована за w вектор-функція;

w – незалежна змінна, за якою проводиться інтегрування;

q_0 – вектор початкових умов балістичного руху КА;

w_0 – початкове значення незалежної змінної.

Виходячи з того, що диференціальні рівняння, які описують балістичний рух КА, є нелінійними, розв'язати їх із задовільною точністю у більшості практичних випадків можливо тільки із застосуванням ітераційних числових методів [3].

Аналіз останніх досліджень. Найбільш розповсюдженими числовими методами для розв'язку балістичних задач на теперішній час є метод Адамса 7-го порядку та метод Рунге-Кутта 4-го порядку [3]. Обчислювальні алгоритми числового розв'язку під час реалізації цих методів, виходячи з їх основних математичних властивостей, мають комбіновану структуру, що знижує їх гнучкість під час (пристосованості до) розв'язку різнопланових задач [3, 6]. Так, для початку розрахунку методом Адамса необхідно задати значення параметрів руху КА у 7-ми початкових точках (вузлах обчислювальної сітки), що, як правило, проводиться методом Рунге-Кутта, а для реалізації методом Адамса обчислювального алгоритму з адаптивним кроком, чи отримання розв'язку в проміжних між вузлами обчислювальної сітки точках необхідно застосовувати процедури інтерполяції [6].

Позбутися вищенаведених недоліків традиційних числових методів під час розв'язку балістичних задач вдається за допомогою математичного апарату диференціальних перетворень [1, 4, 5]. Диференціальні перетворення вже застосовувалися до розв'язку задачі інтегрування (1), але вони використовувалися у найпростішому варіанті – прямі диференціально-тейлорівськи перетворення [4]. Натомість відомі й інші, більш ефективні, з обчислювальної точки зору, види диференціальних перетворень – зміщені диференціальні перетворення.

Зміщені диференціальні перетворення є найсучаснішим, і тому ще недостатньо розповсюдженим, видом диференціальних перетворень. Вони розроблені на базі диференціально-тейлорівських перетворень і дозволяють досягти значного зменшення похибки апроксимації (нев'язкі) результуючого обчислювального алгоритму на дійсному розв'язку диференціального рівняння [1, 2]. Так, із використанням диференціально-тейлорівських перетворень непогодженість виникає за рахунок відкидання (неврахування) відрізку з останніх членів ряду Тейлора, а з використанням зміщених перетворень її вдається суттєво знизити за рахунок взаємного компенсування відкинутих відрізків ряду Тейлора у прямій і зворотній моделях [2].

Формулювання цілей статті. До специфіки зміщених диференціальних перетворень належить процедура визначення параметрів руху КА у наступній точці (вузлі обчислювальної сітки) із значення у попередній точці. При складній правій частині рівняння балістичного руху КА (1) таке визначення можливо провести тільки шляхом розв'язання нелінійного рівняння. Таким чином, виникає завдання розрахунку у наступній точці початкового наближення значень параметрів руху КА та вибору ітераційного методу розв'язку нелінійних рівнянь для остаточного визначення цих параметрів. Обґрунтований вибір ітераційного методу можливий тільки якщо врахувати математичні особливості балістичного руху КА.

Виходячи із вищевикладеного, **метою статті** є отримання обчислювального алгоритму інтегрування диференціальних рівнянь балістичного руху КА зміщеними диференціальними перетвореннями, які враховують математичні особливості цих рівнянь.

Викладення основного матеріалу. Диференціально-тейлорівськи перетворення – це функціональні перетворення вигляду:

$$Z(k)_{w^*} = P\{z(w)\}_{w^*} = \frac{H^k}{k!} \left.\frac{d^k[z(w)]}{dw^k}\right|_{w^*}, \; z(w) = P^{-1}\{Z(k)_{w^*}\} = \sum_{k=0}^{k_{\max}} \frac{w - w^*}{H} Z(k), \tag{2}$$

де $P\{\ \}$, $P^{-1}\{\ \}$ – оператор прямого та оберненого перетворень;

$Z(k)$ – диференціальний спектр, набір дискрет чи зображення $z(w)$;

k – цілочисловий аргумент (номер дискрети) диференціального спектра, $k = 0, 1, \dots$;

w^* – значення аргументу, при якому визначається диференціальний спектр;

H – відрізок аргументу w, на якому розглядається функція $z(w)$ і який не може перевищувати значення радіуса збіжності ряду Тейлора для $z(w)$ у точці w^*;

$k_{\max}$ – максимальний номер дискрети, що бере участь у відновленні.

Обчислювальний алгоритм інтегрування диференціальних рівнянь балістичного руху КА диференціально-тейлорівськими перетвореннями записується наступним чином [4]:

$$U_w = (w_0, w_1, \dots, w_n, \dots), \; H_n = w_{n+1} - w_n, \tag{3}$$

$$Q_n(0) = Q(0)_{w_n} = q_n, \; W_n(k) = P\{w\}_{w_n} = \begin{cases} w_n, \text{ при } k = 0 \\ H_n, \text{ при } k = 1 \\ 0, \text{ при } k \geq 1 \end{cases}, \tag{4}$$

$$Q_n(k) = Q(k)_{w_n} = P\left\{\frac{dq}{dw} = f(q, w)\right\}_{w_n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q_n(k+1) = \frac{H_n}{k+1} F[Q_n(k), W_n(k)], \text{ для } k = 0, \dots, k_{\max} - 1, \tag{5}$$

$$q_{n+1} = q(w_{n+1}) = \sum_{k=0}^{k_{\max}} Q_n(k), \tag{6}$$

де U_w – обчислювальна сітка за незалежною змінною w, на якій проводиться ітераційний числовий розв'язок (1);

H_n – крок обчислювальної сітки U_w;

$W_n(k)$ – диференціальний спектр незалежної змінної w;

$Q_n(k)$ – диференціальний спектр вектора параметрів руху КА;

$F[Q_n(k), W_n(k)] = P\{f(q, w)\}_{w_n}$ – переведена в область зображень права частина (1) (переведення здійснюється однозначною заміною математичних операцій ($+, -, *, /, \partial, \int, \dots$) та функцій ($\sin, \cos, \exp, \dots$) в області оригіналів на відповідні їм залежності в області зображень [5]).

Формули (3–6) дозволяють отримати значення вектора параметрів балістичного руху КА – q у будь-який необхідній точці U_w, починаючи з початкового значення q_0. При чому (5) являє собою рекурентну залежність, за якою визначається диференціальний спектр $Q_n(k)$, починаючи з $Q_n(0)$. Можна сказати, що (3–6) реалізує явний обчислювальний алгоритм, оскільки в (5) значення параметрів балістичного руху КА у вузлі $n+1$ – q_{n+1} визначається явно через значення параметрів руху КА у попередньому вузлі n – q_n.

Запишемо на сітці U_w обчислювальну схему інтегрування диференціальних рівнянь балістичного руху КА зміщеними диференціально-тейлорівськими перетвореннями [1, 2]:

$$\sum_{k=0}^{k_{\max}} \left(-\frac{1}{2}\right)^k Q_{n+1}(k) = \sum_{k=0}^{k_{\max}} \left(\frac{1}{2}\right)^k Q_n(k). \tag{7}$$

У (7) диференціальні спектри $Q_{n+1}(k)$ та $Q_{n+1}(k)$ розраховується за співвідношенням (4–5), а множник $(1/2)^k$ з'являється через вимогу зміщеності – прирівнювання двох відрізків ряду Тейлора на середині інтервалу між вузлами обчислювальної сітки $[w_n, w_{n+1}]$.

Значення параметрів руху КА, яке обчислюється, входить до залежності (7) нелінійно, тобто (7) є нелінійним рівнянням відносно q_{n+1}. Таким чином, зміщені диференціальні перетворення задають неявний обчислювальний алгоритм і тому для його реалізації необхідно використовувати один із ітераційних методів розв'язку нелінійних рівнянь.

Застосування будь-якого ітераційного методу розв'язку нелінійних рівнянь складається з двох етапів: визначення початкового наближення параметрів, що розшукуються, та безпосереднє застосування ітераційного методу.

Розглянемо, як подібне завдання вирішене під час застосування, широко розповсюдженого при розв'язанні балістичних задач, неявного методу Адамса 7-го порядку. Обчислювальний алгоритм інтегрування диференціальних рівнянь балістичного руху КА вищезазначеним методом записується наступним чином (вважатимемо, що необхідна кількість початкових точок відома та обчислювальна сітка (3) є рівномірною) [3]:

$$q_{n+1} = q_n + H_n \sum_{k=0}^{7} \alpha_k f(q_{n-k}, w_{n-k}), \tag{8}$$

$$q_{n+1} = q_n + H_n \sum_{k=0}^{7} \beta_k f(q_{n+1-k}, w_{n+1-k}), \tag{9}$$

де α_k, β_k – сталі коефіцієнти.

Екстраполяційна формула (8) є явним методом Адамса, за якою визначається початкове наближення для (9). Інтерполяційна формула (9) є неявним методом Адамса, яка реалізує одну ітерацію за методом простої ітерації для розв'язку нелінійного рівняння відносно q_{n+1}. Більш повно метод простої ітерації для (9) записується наступним чином:

$$q_{n+1}^{(s+1)} = q_n + H_n \sum_{k=0}^{7} \beta_k f\left(q_{n+1-k}^{(s)}, w_{n+1-k}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q_{n+1}^{(s+1)} = q_n + H_n \beta_0 f\left(q_{n+1}^{(s)}, w_{n+1}\right) + H_n \sum_{k=1}^{7} \beta_k f\left(q_{n+1-k}, w_{n+1-k}\right), \tag{10}$$

де s – індекс за методом простої ітерації.

Метод простої ітерації (10) збігається, якщо із необхідною точністю визначене початкове наближення $q_{n+1}^{(0)}$ та виконується умова [6]:

$$\left| \frac{\partial}{\partial q_{n+1}} \left(q_n + H_n \left[\beta_0 f(q_{n+1}, w_{n+1}) + \sum_{k=1}^{7} \beta_k f(q_{n+1-k}, w_{n+1-k}) \right] \right)_{q_{n+1}^*} \right| < 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| H_n \beta_0 \frac{\partial f\left(q_{n+1}^*, w_{n+1}\right)}{\partial q_{n+1}} \right| < 1. \tag{11}$$

де q_{n+1}^* – корінь рівняння (9).

Ліва частина (11) є відрізком ряду Тейлора для приросту часткової похідної (варіації) [3] помноженої на константу β_0.

Про виконання умови (11) для балістичних задач можна судити виходячи з широкої розповсюдженості та, відповідно, апробації обчислювального алгоритму (8–9) у практиці балістичних розрахунків, у наслідок чого можна стверджувати, що "нормальна робота" в (9), саме методу простої ітерації, спирається на математичні особливості балістичного руху КА, тобто математичні особливості (1), а саме значення – $\partial f\left(q_{n+1}^*, w_{n+1}\right) / \partial q_{n+1}$.

Скористаємось ознаками традиційного підходу (8–9) для отримання обчислювального алгоритму інтегрування (1) на основі зміщених диференціальних перетворень (7).

По-перше, початкове наближення параметрів балістичного руху КА в точці w_{n+1} – $q_{n+1}^{(0)}$ можна визначити подібно до (8), за допомогою явного обчислювального алгоритму (3–6).

По-друге, застосуємо метод простої ітерації для розв'язку рівняння (7), для цього перетворимо (7) із врахуванням (4):

$$q_{n+1}+\sum_{k=1}^{k_{\max}}\left(-\frac{1}{2}\right)^k Q_{n+1}(k)=\sum_{k=0}^{k_{\max}}\left(\frac{1}{2}\right)^k Q_n(k)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow q_{n+1}^{(s+1)}=\sum_{k=0}^{k_{\max}}\left(\frac{1}{2}\right)^k Q_n(k)-\sum_{k=1}^{k_{\max}}\left(-\frac{1}{2}\right)^k Q_{n+1}^{(s)}(k). \quad (12)$$

Залежність (12) буде збігатися, якщо із необхідною точністю визначене початкове наближення $q_{n+1}^{(0)}$ та виконується умова:

$$\left|\frac{\partial}{\partial q_{n+1}}\left[\sum_{k=0}^{k_{\max}}\left(\frac{1}{2}\right)^k Q_n(k)-\sum_{k=1}^{k_{\max}}\left(-\frac{1}{2}\right)^k Q_{n+1}(k)\right]_{q_{n+1}^*}\right|<1. \quad (13)$$

Розпишемо (13) при врахуванні інтервалу розгляду $[w_n, w_{n+1}]$ із (3) та прямого перетворення з (2):

$$\left|\frac{\partial}{\partial q_{n+1}}\left[\sum_{k=0}^{k_{\max}}\left(\frac{1}{2}\right)^k \frac{H_n^k}{k!}\frac{d^k[q(w_n)]}{dw^k}-\sum_{k=1}^{k_{\max}}\left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{H_n^k}{k!}\frac{d^k[q(w_{n+1})]}{dw^k}\right]_{q_{n+1}^*}\right|<1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left|\frac{\partial}{\partial q_{n+1}}\left[\sum_{k=0}^{k_{\max}}\left(\frac{1}{2}\right)^k \frac{H_n^k}{k!}\frac{d^k[q_n]}{dw^k}-\sum_{k=1}^{k_{\max}}\left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{H_n^k}{k!}\frac{d^k[q_{n+1}]}{dw^k}\right]_{q_{n+1}^*}\right|<1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left|\sum_{k=1}^{k_{\max}}\left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{H_n^k}{k!}\frac{\partial}{\partial q_{n+1}}\left[\frac{d^k q_{n+1}^*}{dw^k}\right]\right|<1. \quad (14)$$

Врахуємо в (14) залежність (1)

$$\left|\sum_{k=1}^{k_{\max}}\left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{H_n^k}{k!}\frac{\partial}{\partial q_{n+1}}\frac{d^{k-1}}{dw^{k-1}}\left[\frac{dq_{n+1}^*}{dw}\right]\right|<1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left|\sum_{k=1}^{k_{\max}}\left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{H_n^k}{k!}\frac{\partial}{\partial q_{n+1}}\left[\frac{d^{k-1}f\left(q_{n+1}^*, w_{n+1}\right)}{dw^{k-1}}\right]\right|<1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left|-\frac{H_n}{2}\frac{\partial f\left(q_{n+1}^*, w_{n+1}\right)}{\partial q_{n+1}}+\sum_{k=2}^{k_{\max}}\left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{H_n^k}{k!}\frac{\partial^k f\left(q_{n+1}^*, w_{n+1}\right)}{\partial q_{n+1}\partial w^{k-1}}\right|<1. \quad (15)$$

Залежність (15) подібна до (11) – вона є відрізком ряду Тейлора для приросту варіації (часткової похідної) і можна стверджувати, що для деякого інтервалу значень H_n вона буде виконуватися, оскільки радіус збіжності ряду Тейлора для варіації більший за радіус збіжності такого ряду для параметра руху КА. Таке врахування математичних особливостей диференціального рівняння (1) дозволяє застосувати метод простої ітерації для розв'язку (12).

Після того, як збіжність (12) доведено, запишемо повний обчислювальний алгоритм інтегрування диференціальних рівнянь балістичного руху КА зміщеними диференціально-тейлорівськими перетвореннями.

У точці n за відомим значенням параметрів руху КА q_n проводяться операції (3–5) для визначення диференціального спектра $Q_n(k)$:

$$Q_n(0)=q_n, \quad W_n(k)=\begin{cases} w_n, \text{ при } k=0 \\ H_n, \text{ при } k=1, \\ 0, \text{ при } k\geq 1 \end{cases} \quad (16)$$

$$Q_n(k+1)=\frac{H_n}{k+1}F\left[Q_n(k), W_n(k)\right], \text{ для } k=0, ..., k_{\max}-1. \quad (17)$$

На основі визначеного диференціального спектра (17) визначається початкове наближення параметрів балістичного руху КА в точці $n+1$:

$$q_{n+1}^{(s=0)}=\sum_{k=0}^{k_{\max}}Q_n(k) \quad (18)$$

та обчислюється незалежна від q_{n+1} частина з (12):

$$q_{n+\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{k_{\max}} \left(\frac{1}{2}\right)^k Q_n(k). \tag{19}$$

Використовуючи $q_{n+1}^{(s)}$, проводяться операції (3–5) для визначення диференціального спектра $Q_{n+1}^{(s)}(k)$:

$$Q_{n+1}^{(s)}(0) = q_{n+1}^{(s)}, \quad W_{n+1}(k) = \begin{cases} w_{n+1}, \text{ при } k = 0 \\ H_n, \text{ при } k = 1 \\ 0, \text{ при } k \geq 1 \end{cases}, \tag{20}$$

$$Q_{n+1}^{(s)}(k+1) = \frac{H_n}{k+1} F\left[Q_{n+1}^{(s)}(k), W_{n+1}(k)\right], \text{ для } k = 0, \ldots, k_{\max} - 1. \tag{21}$$

Визначається за методом простої ітерації наступне наближення параметрів руху КА:

$$q_{n+1}^{(s+1)} = q_{n+\frac{1}{2}} - \sum_{k=1}^{k_{\max}} \left(-\frac{1}{2}\right)^k Q_{n+1}^{(s)}(k). \tag{22}$$

Після проведення необхідної кількості ітерацій по s відповідно до (20–22), останнє значення $q_{n+1}^{(s)}$ приймається за q_{n+1}^{*} і здійснюється перехід до наступного вузла U_n.

Особливістю залежності (20) є значення $W_{n+1}(1) = H_n$, що виникає внаслідок розгляду інтервалу $[w_n, w_{n+1}]$.

Наведені формули (20–22) разом з (3) складають обчислювальний алгоритм інтегрування диференціальних рівнянь балістичного руху КА за допомогою зміщених диференціально-тейлорівських перетворень. При чому в залежності (22) враховані математичні особливості балістичного руху КА, що дало змогу для реалізації неявної обчислювальної схеми застосувати метод простої ітерації.

Було проведено моделювання прогнозування збуреного балістичного руху КА з врахуванням моделі гравітаційного поля Землі 8×8 та статичної атмосфери. Як диференціальні рівняння руху КА (1) розглядались системи, записані в гринвіцький прямокутній системі координат та в системі оскулюючих елементів [3]. В обох варіантах подана обчислювальна схема дала задовільну точність під час використання одної ітерації по s.

Висновки. У статті наведено формули, які складають обчислювальний алгоритм числового інтегрування диференціальних рівнянь балістичного руху КА зміщеними диференціально-тейлорівськими перетвореннями. У наведених формулах враховано математичні особливості диференціальних рівнянь балістичного руху КА, що дозволило довести можливість використання методу простої ітерації для розв’язання нелінійного рівняння “неявної” обчислювальної схеми.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Баранов Г.Л., Баранов В.Л., Жуков І.А., Алексєєва Л.О.* Диференціальні перетворення для комп’ютерного моделювання: Навчальний посібник. – К.: Національний авіаційний університет, 2002. – 106 с.
2. *Фролова О.Г.* Моделювання оптимальних процесів керування зміщеними диференціальними перетвореннями // Вісник ЖІТІ. – 2001. – № 18. – С. 155–160.
3. *Жданюк Б.Ф.* Основы статистической обработки траекторных измерений.– М.: Сов. радио, 1978. – 384 с.
4. *Ковбасюк С.В., Ракушев М.Ю.* Прогнозирование неуправляемого движения космического аппарата методом дифференциальных преобразований // Двойные технологии. – 2003. – № 4. – С. 16–20.
5. *Пухов Г.Е.* Дифференциальные преобразования и математическое моделирование физических процессов. – К.: Наукова думка, 1986. – 159 с.
6. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы: Учеб. пособие для вузов. – М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1989. – 432 с.

КОВБАСЮК Сергій Валентинович – кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, начальник науково-дослідного центру Житомирського військового інституту радіоелектроніки імені С.П. Корольова.

Наукові інтереси:

– розробка та дослідження радіоелектронних інформаційних систем космічної інфраструктури.

РАКУШЕВ Михайло Юрійович – кандидат технічних наук, провідний науковий співробітник науково-дослідного відділу науково-дослідного центру Житомирського військового інституту радіоелектроніки імені С.П. Корольова.

Наукові інтереси:

– математичне моделювання та диференціальні перетворення;

– балістико-навігаційне забезпечення управління польотами космічних апаратів.

Подано 22.09.2006

Ковбасюк С.В., Ракушев М.Ю. Застосування зміщених диференціальних перетворень до розв'язку балістичних задач

Ковбасюк С.В., Ракушев М.Ю. Применение смещенных дифференциальных преобразований для решения баллистических задач

Kovbasuyk S.V., Rakushev M.U. Application of the displaced differential transformations to decision of ballistic tasks

УДК 629.78

Застосування зміщених диференціальних перетворень до розв'язку балістичних задач / С.В. Ковбасюк, М.Ю. Ракушев

Наведено обчислювальний алгоритм інтегрування диференціальних рівнянь балістичного руху космічного апарату зміщеними диференціальними перетвореннями. Наведено формули, що враховують особливості диференційних рівнянь балістичного руху космічного апарату та дозволяють реалізувати числовий розв'язок цих рівнянь на основі зміщених диференціально-тейлорівських перетворень.

УДК 629.78

Применение смещенных дифференциальных преобразований для решения баллистических задач / С.В. Ковбасюк, М.Ю. Ракушев

Приведен вычислительный алгоритм интегрирования дифференциальных уравнений баллистического движения космического аппарата смещенными дифференциальными преобразованиями. Приведенные формулы учитывают особенности дифференциальных уравнений баллистического движения космического аппарата и позволяют реализовать численное решение этих уравнений на основе смещенных дифференциально-тейлоровськых преобразований.

УДК 629.78

Application of the displaced differential transformations to decision of ballistic tasks / S.V. Kovbasuyk, M.U. Rakushev

The computational integration algorithm of differential equalizations ballistic motion of space vehicle by the displaced differential transformations is resulted. Formulas which take info consideration the peculiarities of differential equalizations ballistic motion of space vehicle and allow to realize the numerical decision of these equalizations on the basis of the displaced differential-tailor transformations are resulted.