УДК 519.876.2:519.876.3+519.863

М.В. Новожилова, д.ф.-м.н., проф.
Н.О. Попельнюх, аспір.
Харківський державний технічний університет будівництва та архітектури

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ОПТИМІЗАЦІЇ РЕСУРСІВ ПРОЕКТУ ПРИ ТОЧНИХ ВИХІДНИХ ДАНИХ

Робота присвячена розробці методики розв'язання оптимізаційної задачі розподілу ресурсів у проекті з урахуванням можливості розриву його некритичних робіт у часі. Побудована математична модель задачі, що базується на застосуванні апарата Ф-функцій та структур лінійних нерівностей, досліджені властивості області припустимих розв'язків.

Постановка проблеми. Задача розподілу ресурсів – фінансів, сировини, енергії, обладнання, трудових ресурсів, обчислювальних потужностей – одна з найбільш розповсюджених в управлінні проектами [7]. Часто ресурсів, що були виділені під проект, буває недостатньо. Звідси виникає задача їх оптимального розподілу. Специфіка задачі управління ресурсами проекту потребує одночасного оптимального розподілу декількох ресурсів.

Ціль роботи – застосування розробленого алгоритму [4] для розв'язання задачі розподілу ресурсів проекту в умовах, коли вихідні дані проекту задані точно, враховуючи можливість розриву робіт проекту у часі.

Аналіз публікацій. Класичними методами розв'язання задач управління проектами та їх ресурсами є метод сітьового планування та управління (СРМ) і метод оцінки та перегляду програм (PERT) [7]. Слід відмітити, що ці методи застосовуються тільки на одно- та двоaccess ресурсних задачах, що виключає їх застосування для моделювання та розв'язання багатовимірних задач.

Для великих сіток використовуються алгоритми для вирівнювання потреб в ресурсах [14]. Хоча ці алгоритми і називаються програмами оптимізації, в більшості випадків фактично виконується лише евристичний розподіл ресурсів. Детальний огляд цих методів наводиться в [8, 9, 11]. Крім вирівнювання потреб в ресурсах, розглядається також і мінімізація тривалості виконання проекту при обмеженнях на ресурси. В зв'язку з комбінаторним характером цих задач можливість їх розв'язку засобами класичного математичного програмування досить обмежена [12]. Розглянуті в [9, 13] алгоритми на основі гілок та меж виявились придатними лише для сіток з кількістю вершин менше 50. Тому основна увага в напрямку раціонального розподілу ресурсів приділялася розвитку евристичних методів. Опублікований в [8–10] аналіз говорить про те, що жоден з них не може завжди давати найкращий варіант розподілу ресурсів.

Постановка задачі. Розглянемо проект, що складається з n робіт $R=\{R_\mu\}$, $\mu=1,2,\ldots n$. На множині R задано умову часткової впорядкованості [1]. В даному випадку під частковою впорядкованістю робіт розуміється конкретна послідовність їх виконання, що обумовлена специфікою проекту, що описується.

Для кожної роботи R_μ відомі її характеристики у детермінованих умовах $R_\mu\ :\left(a_\mu, b^{\kappa}{}_\mu\right)$: a_μ – тривалість роботи, b_μ^k – інші ресурси роботи, $\mu=1,2,\ldots n,\quad k=1,2,\ldots\kappa$. В загальному випадку у кожної роботи R_μ більш ніж два ресурси.

У випадку дворесурсної задачі робота R_μ – це завжди щільна точкова множина (рис. 1). Далі будемо вважати роботи та їх геометричні інтерпретації еквівалентними.

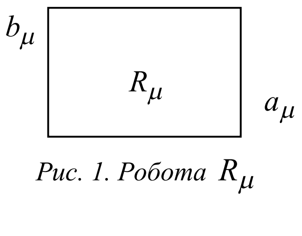

Рис. 1. Робота R_μ

Необхідно:

- провести розподіл операцій на критичні R_i, $i\in K$ (що не мають резервів часу, де K – множина критичних операцій) та некритичні $-R_j$, $j\in K_{noKr}$, $K_{noKr}=J/K$ (де J/K – теоретико-множинна від'ємність), $J=K_{noKr}\cup K$, де $|J|=n$;
- визначити резерви часу некритичних робіт $t_x\left(R_j\right)$;

- визначити критичний шлях проекту L_x (***Задача I*** [3]);
- провести вирівнювання та оптимізацію використання ресурсу b^1 (***Задача II***).

Розв'язання ***Задачі I*** здійснюється методами сітьового планування.

Результат розв'язання ***Задачі I*** – критичний шлях проекту L_x (найкраще розміщення об'єктів у часі з врахуванням умови часткової впорядкованості робіт), є початковим наближенням для ***Задачі II***. Так, наприклад:

$$J = 6,\; R_1(3,3), R_2(5,2), R_3(4,5), R_4(2,6), R_5(4,5), R_6(4,4),$$

а часткова впорядкованість робіт у проекті визначається послідовністю:

$$R_1 \prec R_2 \prec R_3,\; R_4 \prec R_3,\; R_3 \prec R_6,\; R_5 \prec R_6 .$$

Графічне зображення результату розв'язання ***Задачі I*** наведене на рис. 2.

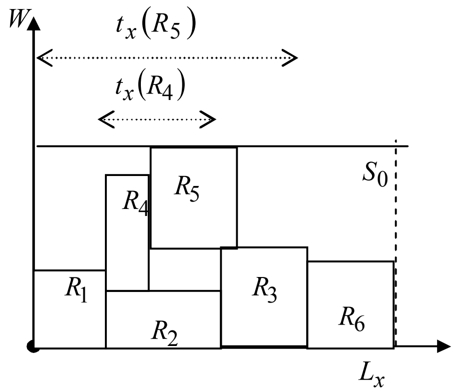

Рис. 2. Графічне зображення результату розв'язання ***Задачі I***

Задача II – оптимізація та вирівнювання ресурсу b^1. Передбачається можливість розриву некритичних робіт R_j у часі на 2.

Сформулюємо ***Задачу II*** в рамках теорії оптимізаційного геометричного проектування [6] як задачу розміщення, вихідні дані якої задані точно.

Маємо напівнескінчену смугу $S_0 = \{(x, y) \in R^2 \,|\, x \in [0, L_x], y \in [0, W]\}$, де W – обмеження на використання ресурсу b^1, а L_x – час, відведений під виконання проекту. Маємо також $R = \{R_\mu\}$, $\mu = 1, 2, \ldots n$ частково впорядкованих об'єктів з характеристиками $R_\mu \;: (a_\mu, b^\kappa{}_\mu)$. Кожна R_μ має свої параметри розміщення [6] $u_\mu = (x_\mu, y_\mu)$, що задають її положення в просторі R^2.

Задається можливість розриву R_j таким чином:

$$a_j^1 + a_j^2 = a_j;\quad 0 < a_j^1 < a_j;\quad a_j^1,\, a_j^2 \geq 0 . \tag{1}$$

Зазначимо, що a_j^1, a_j^2 – змінні.

Необхідно знайти вектор параметрів розміщення об'єктів $u_\mu = (u_{Kr},\, u_{noKr})$ (u_{Kr} – фіксовані) у смузі S_0 такий, щоб ширина зайнятої частини смуги $L_y < W$ була мінімальною.

Математична постановка ***Задачі II*** є такою.

Знайти

$$u_{noKr} = \arg \min_{u \in D_{II} \in R^{6K_{noKr}+1}} \max\left(u_j + b_j^1\right), \tag{2}$$

де область припустимих розв'язків D_{II} описується системою лінійних нерівностей, що задають умови розміщення R_i та R_j в S_0 з урахуванням (1)

$$\begin{cases} x_i \le Z - a_i, \\ y_i \le W - b_i, \ i = 1, 2, ..., K, \\ x_j^l \le Z - a_j^l, \ j = 1, 2, ..., J/K, \ l = 1, 2, \\ y_j^{€} \le W - b_j, \\ x_i, x_j^l \ge 0, y_i, y_j^l \ge 0, \end{cases} \tag{3}$$

де $\left(x_j^{€}, y_j^{€}\right)$ – параметри розміщення об'єкта R_j^{l},

та структурами лінійних нерівностей [6], що задають умови неперетинання R_i та R_j:

$$x_j - x_i = a_i, \ \ i = 1, 2, ..., K, \ \ j = 1, 2, ..., K, \ \ i \ne j, \tag{4}$$

$$\left[\begin{aligned} & x_j^1 - x_j^2 \ge a_j^{2}, \\ & x_j^2 - x_j^1 \ge a_j^1, \\ & y_j^1 - y_j^2 \ge b_j, \\ & y_j^2 - y_j^1 \ge b_j, \end{aligned}\right. \quad j = 1, 2, ..., J/K \quad \left[\begin{aligned} & x_i - x_j^l \ge a_j^l, \\ & x_j^l - x_i \ge a_i, \\ & y_i - y_j^l \ge b_j^l, \\ & y_j^l - y_i \ge b_i^1, \end{aligned}\right. \quad i \ne j, \ l = \overline{1, 2}. \tag{5}$$

Зауваження 1. Умова (4) – аналітична умова часткової впорядкованості.

Зазначимо, що умови (4–5) в контексті задачі, що розглядається, означають, що дві роботи не можуть використовувати один и той же ресурс одночасно.

Для множини R_j діапазон резерву часу $t_x\left(R_j\right)$, за час якого робота може бути виконана, задається так:

$$\begin{cases} u_j + t_x\left(R_j\right) \ge \tilde{u}_j \ge u_j; \\ \left(x_j^1 + a_j^1\right) + \left(x_j^2 + a_j^2\right) \le u_j + t_x\left(R_j\right), \end{cases} \tag{6}$$

де $\tilde{u}_j$ – параметр розміщення R_j у рамках $t_x\left(R_j\right)$.

Цільова функція накладає таке обмеження:

$$y_j + b_j \le L_y. \tag{7}$$

Область припустимих розв'язків D_{II} (незв'язна, компоненти зв'язності неопуклі, границі області – кусково-лінійні) може бути представлена у вигляді $D_{II} = \cup D_s^{II}$, $s = 1, 2, ..., 4^{\left(K_{noKr}\right)\left(K_{noKr}-1\right)/2}$, де $D_s^{II} \subset R^{6K_{noKr}+1}$ – опуклий компакт [1]. У загальному випадку $s > 1$.

У зв'язку з тим, що область D_{II} є незв'язною, застосовуємо один з методів дискретної оптимізації, а саме – метод гілок і границь. Область D_{II} формується за допомогою дерева розв'язків А [2]. Вершини дерева розв'язків на останньому рівні – системи нерівностей, що описують підобласті області D_{II}. Для розв'язання пропонується модифікація дерева розв'язків, що забезпечує послідовну перевірку можливостей розбиття R_j, яка задана умовою (1). На останньому $K_{noKr}(2K_{noKr} - 1)$-му рівні дерева А кожна вершина описує підобласть $D_s^{II} \subset D_{II}$.

Існує набір правил відсікання вершин дерева [2]. Задамо додаткове правило відсікання, яке обумовлено модифікацією дерева.

Правило 1. Якщо на поточній вершині дерева розв'язань отримано нерівність, де x_j^l, $l = 1, 2$ не належить інтервалу, що задається умовою (6), то така вершина вважається кінцевою, тобто якщо виконується така умова:

$$\begin{cases} u_j + t_x\left(R_j\right) \ge \tilde{u}_j \ge u_j; \\ \left(x_j^1 + a_j^1\right) + \left(x_j^2 + a_j^2\right) \le u_j + t_x\left(R_j\right), \end{cases}$$

$$x_j^l \notin u_j + t_x\left(R_j\right).$$

Методика розв’язання ідеалізованої задачі прямокутників у смузі з урахуванням можливості їх розбиття описана в [4]. Застосуємо цей підхід і для розв’язання ***Задачі II***.

Будуємо дерево розв’язків A [2] для критичних робіт, застосовуючи набір правил відсікання вершин дерева [2]. Далі, на відміну від методики [2], всі обмеження, що описують умови розміщення і неперетинання R_i, ставимо у відповідність до кореня A0 дерева A. Тобто, отримавши топологію дерева критичних робіт, вважаємо її незмінною і фактично робимо вершину дерева (що описує підобласть оптимального розміщення об’єктів) на останньому $\left(K\left(K-1\right)\right)/2$-му рівні коренем нового дерева A1 для некритичних робіт. Зазначимо, що у дереві A1 координати x_i вважаються константами, оскільки розміщення критичних робіт є фіксованим. Під час розгалуження застосовуємо правила відсікання вершин [2]. Така модифікація дерева значно збільшує кількість рівнів дерева й ускладнює процес його побудови, однак надає можливість оптимального розміщення об’єктів вкупі з одночасним вирівнюванням ресурсів, які вони використовують.

Останній рівень дерева розв’язків A1 має $4^{K_{noKr}(2K_{noKr}-1)}$ вершин, кожній з яких відповідає підобласть $D_s^{II} \subset D_{II}$, що описується системою нерівностей вигляду:

$$\begin{cases} a_j^1 + a_j^2 = a_j, \\ x_j^l \le Z - a_j^l, \ \ j = 1,2,...,J/K, \ \ l = 1,2, \\ y_j^l \le W - b_j, \\ x_j^2 - x_j^1 \ge a_j^1, \\ x_j^l - x_i \ge a_i, \ \ i = 1,2,...,K, \\ x_i, x_j^l \ge 0, \ \ y_i, y_j^l \ge 0, \ \ a_j^1 = 1, \ \ a_j^2 \ge 0, \ \ 0 < a_j^1 < a_j. \end{cases} \tag{8}$$

Крок 1. На кожному $K_{noKr}-1$-му рівні дерева здійснюємо перебір усіх вершин $D_s^{II} \subset D_{II}$, застосовуючи правила [2], Правило 1 та Правило 2.

Правило 2. Підобласть $D_s^{II^*}$ дерева розв’язків повинна задовольняти умові $D_s^{II^*} \ne \varnothing$, інакше вершина дерева A1, що їй відповідає, вважається кінцевою.

Для визначення «непорожньості» підобластей D_s^{II} застосовуємо методику, що запропонована в [4].

Крок 2. На кожній зі знайдених на попередньому кроці підобластей $D_s^{II^*}$ для визначення a_j^1, a_j^2 об’єкта $\breve{R}_j$ розв’язуємо задачу лінійного програмування вигляду:

$$a_j^{l} \to \max \tag{10}$$

на системі (8).

Крок 3. Формально визначаємо $\breve{R}_j$ як R_i, вважаємо його розміщення фіксованим, а його зв’язки з іншими об’єктами жорсткими. Переходимо до R_j, $j = j+1$, розбиваємо його за умовою (1), розгалужуємо дерево A1 з вершини, яка відповідає підобласті $D_s^{II^*}$. Повертаємось до Кроку 1.

Зазначимо, що даний підхід дає локально оптимальне розв’язання задачі.

Виходячи з результатів розв’язання ***Задачі I*** (рис. 2), результат розв’язання ***Задачі II*** має вигляд, наведений на рис. 3:

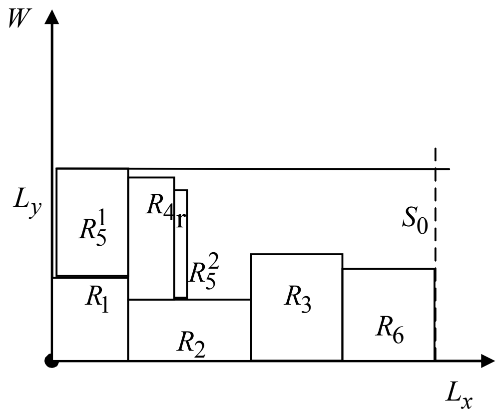

Рис. 3. Графічне зображення результату розв'язання ***Задачі ІІ***

Висновки. Наведена загальна постановка задачі управління ресурсами в умовах стабільності навколишнього середовища. Досліджено область припустимих розв'язань задачі. Запропоновано алгоритм розв'язання поставленої задачі з урахуванням можливості розбиття некритичних об'єктів.

Напрямок подальших досліджень. Передбачається розробка програмного комплексу для розв'язання поставленої задачі та проведення чисельних експериментів. Розробляється модифікація моделі на випадок, якщо вихідні дані задані з похибкою.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1989. – 624 с.
2. *Новожилова М.В.* Методы поиска экстремума линейной функции цели на структурах линейных неравенств: Дисс...к.ф.-м.н.: 05.13.16. – Харьков: АН УССР, ИПМаш. – 1989. – 153 с.
3. *Новожилова М.В., Попельнюх Н.А.* Анализ задачи управления ресурсами в условиях стабильности окружающей среды // Науковий вісник будівництва. – Харків: ХДТУБА, 2005. – № 31. – С. 313–317.
4. *Новожилова М.В., Попельнюх Н.А.* Решение задачи размещения прямоугольников в полосе с учетом возможности их разбиения // Системы обработки информации (в печати).
5. *Стоян Ю.Г., Гиль Н.И.* Методы и алгоритмы размещения плоских геометрических объектов. – К.: Наукова думка, 1976. – 248 с.
6. *Стоян Ю.Г., Яковлев С.В.* Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. – К.: Наукова думка, 1986. – 266 с.
7. Управление проектами: Справочное руководство / Под ред. И.И. Мазура, В.Д. Шапиро. – М.: Высш. шк., 2000. – 875 с.
8. *Davis E.W.* Resources Allocation in Project Network Models – A Survey // J. Ind. Eng., 1966. – № 17 (4). – Pp. 33–41.
9. *Davis E.W.* Project Scheduling under Resource Constraints – Historical Review and Categorization of Procedures // AIIE Trans. – 1973. – № 4. – Pp. 297–313.
10. *Davis E.W., Patterson J.H.* A Comparization of Heuristic and Optimum Solution in Resource Constrained Project Scheduling // Management Sci. – 1975. – № 8. – Pp. 944–955.
11. *Dewitte L.* Manpower Leveling of PERT Networks // Data Proc. for Sci. – 1964. – № 3. – Pp. 29–37.
12. *Moder J., Elmaghraby S.* Handbook of Operations Research. Models and Applications. New York: Litton Educational Publishing. – 1978.
13. *Patterson J.H., Huber W.D.* A Horizon-Varying, Zero-One Approach to Project Scheduling // Management Sci. – 1974. – № 6. – Pp. 990–998.
14. *Wiest J.D.* A Heuristic Model for Scheduling Large Projects with Limited Resources // Management Sci. – 1967. – № 6. – Pp. 359–377.

НОВОЖИЛОВА Марина Володимирівна – доктор фізико-математичних наук, професор, завідуюча кафедрою комп'ютерного моделювання та інформаційних технологій Харківського державного технічного університету будівництва та архітектури.

Наукові інтереси:

– математичне моделювання.

ПОПЕЛЬНЮХ Наталія Олександрівна – аспірант кафедри комп'ютерного моделювання та інформаційних технологій Харківського державного технічного університету будівництва та архітектури.

Наукові інтереси:

– управління проектами.

Подано 11.07.06

Новожилова М.В., Попельнюх Н.О. Розв'язання задачі оптимізації ресурсів проекту при точних вихідних даних

Новожилова М.В., Попельнюх Н.А. Решение задачи оптимизации ресурсов проекта при точных исходных данных

Novozhilova M.V., Popelnyukh N.A. The solution of optimization project resources distribution problem with exact initial data

УДК 519.876.2:519.876.3+519.863

Розв'язання задачі оптимізації ресурсів проекту при точних вихідних даних / М.В. Новожилова, Н.О. Попельнюх

Робота присвячена розробці методики розв'язання оптимізаційної задачі розподілу ресурсів у проекті з урахуванням можливості розриву його некритичних робіт у часі. Побудована математична модель задачі, що базується на застосуванні апарату Ф-функцій та структур лінійних нерівностей, досліджені властивості області припустимих розв'язків.

УДК 519.876.2:519.876.3+519.863

Решение задачи оптимизации ресурсов проекта при точных исходных данных / М.В. Новожилова, Н.А. Попельнюх

Работа посвящена разработке методики решения оптимизационной задачи распределения ресурсов в проекте с учетом возможности разрыва его некритических работ во времени. Построена математическая модель задачи, основанная на применении аппарата Ф-функций и структур линейных неравенств, исследованы особенности области допустимых решений.

УДК 519.876.2:519.876.3+519.863

The solution of optimization project resources distribution problem with exact initial data / M.V. Novozhilova, N.A. Popelnyukh

The presented groundwork is dedicated to the development of solution method of optimization project resources distribution problem taking into account the possibility of its non-critical operations break-up. Mathematical model of the problem, based upon Ф –functions apparatus and linear inequalities structures, is built; the properties of feasible solutions field are investigated.