

УДК 681.5.015.44.

А.Г. Тютюнник, к.т.н., доц.
С.С. Свістельник, ст. викл.

Житомирський державний технологічний університет

**СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНИХ СПОСТЕРЕЖНИХ ПРИСТРОЇВ
НА ОСНОВІ ДИСКРЕТНИХ ФІЛЬТРІВ КАЛМАНА-Б'ЮСІ**

Розглядається загальна задача синтезу оптимальних спостережних пристроїв на базі цифрової фільтрації Калмана-Б'юсі для технологічних об'єктів. Пропонується покроковий алгоритм синтезу матриці підсилення фільтра.

Вступ. При створенні сучасних систем автоматичного керування (САК) технологічними процесами, необхідно враховувати основні збурюючі впливи на об'єкт керування, що призводить до задач синтезу та аналізу стохастичних САК.

Постановка задачі дослідження. Задачі побудови оптимальних САК в імовірнісних умовах певним чином пов'язані з проблемами оптимальної оцінки та відновлення технологічної інформації про об'єкт керування, яка зашумлена, а іноді не зовсім доступна для безпосереднього вимірювання.

Синтез оптимальних САК в таких умовах може ґрунтуватись на відомому принципі декомпозиції, коли оптимальний регулятор в САК можна представити як послідовне з'єднання оптимального спостережного пристрою для оцінки необхідної інформації про об'єкт керування та детермінованої частини регулятора, який реалізує певний закон керування об'єктом.

Бібліографія наукових праць щодо використання оптимальних фільтрів Калмана-Б'юсі в системах автоматичного керування досить широка. Проте більшість цих робіт носить теоретичний або оглядовий характер [1, 2, 7, 8]. У даній роботі зроблено акцент на практичне використання фільтрів Калмана-Б'юсі для побудови оптимальних спостережних пристроїв для одержання достовірної інформації про стан об'єкта керування (ОК) в імовірнісних умовах функціонування.

Основна частина. Розглянемо об'єкт керування, який описаний системою диференціальних рівнянь у векторно-матричній формі:

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= AX(t) + B_1U(t) + D_1q(t); \\ Z(t) &= HX(t) + v(t), \end{aligned} \quad (1)$$

де

- $X(t)$ – вектор стану об'єкта керування;
- $Z(t)$ – вектор вимірювання;
- $U(t)$ – вектор керування;
- $q(t)$ – вектор випадкових збурень на вході ОК;
- $v(t)$ – вектор завад вимірювання;
- A, B, D, H – відомі матриці.

Задача оптимальної фільтрації полягає в тому, щоб за результатами вимірювання вектора $Z(t)$, який містить певні компоненти від впливу збурень $q(t)$ та завад вимірювання $v(t)$, визначити параметри вектора $X(t)_\phi$ на виході фільтра, які були б максимально наближеними до параметрів вектора стану об'єкта керування $X(t)_{ок}$:

$$e(t) = X(t)_\phi - X(t)_{ок} \rightarrow \min. \quad (2)$$

Для синтезу структури фільтра в дискретній формі опишемо ОК (1) різницевиими рівняннями, для чого введемо заміну:

$$\dot{X}(t) = \frac{1}{T}[X(k+1) - X(k)] \quad \text{або} \quad \dot{X}(t) = \frac{1}{T}[X(k) - X(k-1)], \quad (3)$$

де T – крок дискретності.

Тоді дискретний об'єкт керування (1) можна представити різницевиими рівняннями в наступній векторно-матричній формі:

$$\begin{cases} X(k) = \Phi X(k-1) + BU(k-1) + Dq(k-1), \\ Z(k) = HX(k) + v(k), \end{cases} \quad (4)$$

де введені позначення:

 E – одинична матриця;

$$\Phi = |E + TA_1|; \quad B = TB_1; \quad D = TD_1. \quad (5)$$

Вектор випадкових збурень $q(k)$ вважаємо гаусовським білим шумом з нульовим середнім значенням:

$$M[q(k)] = 0. \tag{6}$$

Його матрична кореляційна функція має вигляд:

$$M[q(k)q^T(i)] = R(k)_q \cdot \delta(k-i). \tag{7}$$

Вектор завад вимірювання $v(t)$ вважаємо теж гаусовським білим шумом з нульовим середнім значенням:

$$M[v(k)] = 0, \tag{8}$$

та діагональною кореляційною матрицею:

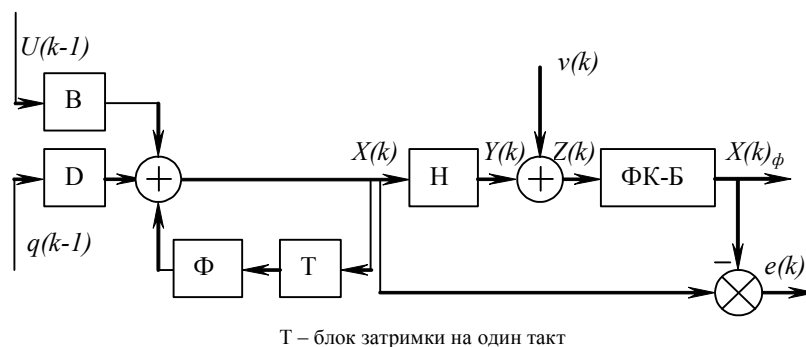
$$M[v(k)v^T(i)] = R(k)_v \cdot \delta(k-i). \tag{9}$$

Випадкові сигнали $q(k)$ і $v(k)$ некорельовані між собою:

$$M[q(k)v^T(k-i)] = 0 \tag{10}$$

для всіх k та всіх i .

Структурна схема об'єкта керування (4) з фільтром Калмана-Б'юсі в загальному вигляді подана на рис. 1.



Т – блок затримки на один такт

Рис. 1. Структурна схема об'єкта керування з фільтром К-Б

Оптимальність фільтрації визначається критерієм:

$$I = M[e^T(k)e(k)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i^2(k) \rightarrow \min \tag{11}$$

мінімуму середньої квадратичної похибки.

Структуру оптимального фільтра згідно [3, 4] в загальному вигляді подано наступною системою різницевих рівнянь:

$$X(k)_\phi = \Phi X(k-1)_\phi + BU(k-1) + K\{Z(k) - H[\Phi X(k-1)_\phi + BU(k-1)]\}, \tag{12}$$

або структурною схемою.

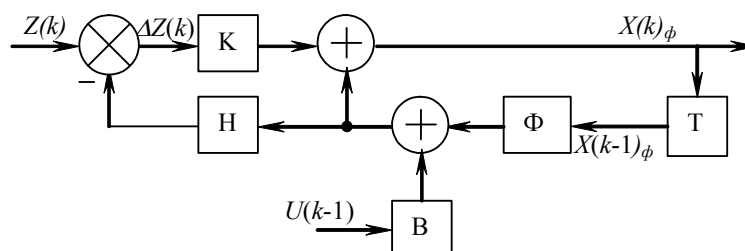


Рис. 2. Структурна схема фільтра К-Б

Слід зазначити, що в структурі фільтра матриці елементів B, H, Φ ідентичні матрицям об'єкта керування, а матрицю коефіцієнтів підсилення K необхідно визначити за системою різницевих рівнянь [3]:

$$K(k) = L'(k) \cdot H^T \cdot [HL'(k)H^T + R(k)_v]^{-1}, \tag{13}$$

де

$$L'(k) = \Phi \cdot L(k-1) \cdot \Phi^T + R(k-1)_q - \tag{14}$$

– апріорна кореляційна матриця похибок фільтрації;

$$L(k) = [E - K(k) \cdot H] \cdot L'(k) - \tag{15}$$

– апостеріорна матриця похибок фільтрації.

Використовуючи формули (13, 14, 15), запропоновано покроковий алгоритм розрахунку матриці підсилення фільтра К:

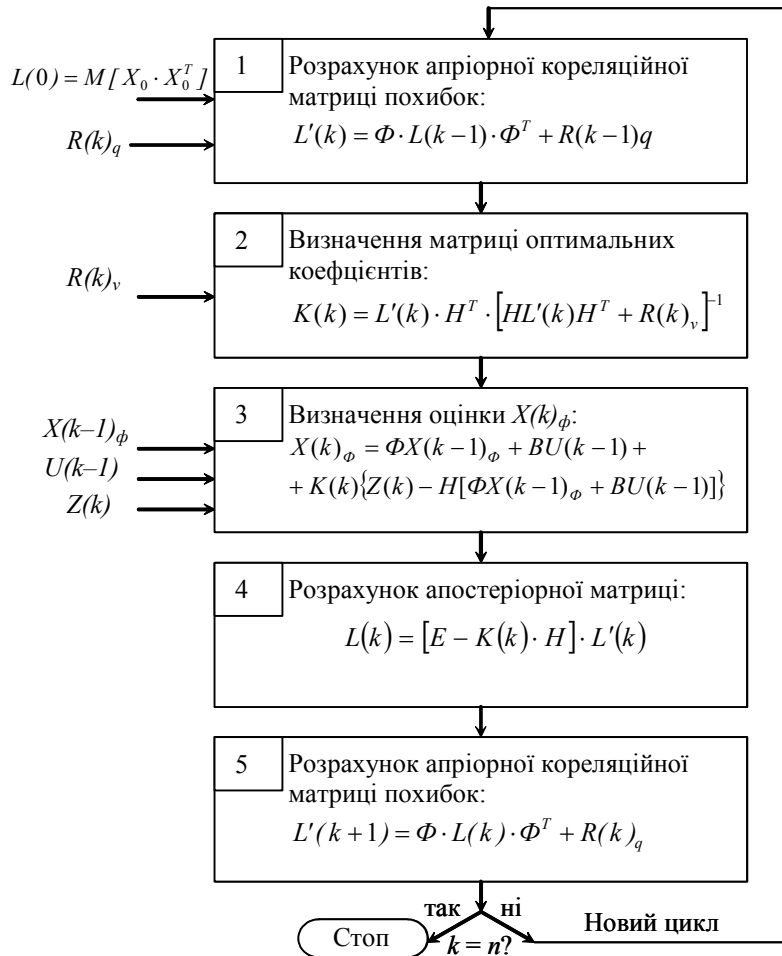


Рис. 3. Покроковий алгоритм розрахунку матриці підсилення фільтра К-Б

На першому етапі при $k = 1$ визначається апіорна матриця $L'(k)$:

$$L'(k) = \Phi \cdot L(k-1) \cdot \Phi^T + R(k-1)_q \tag{16}$$

при початкових умовах:

$$L(0) = M [X(0) X^T(0)]; R(0)_q = R_q (t = 0). \tag{17}$$

На другому етапі визначаються компоненти матриці підсилення:

$$K(k) = L'(k) \cdot H^T \cdot [H \cdot L'(k) \cdot H^T + R(k)_v]^{-1} \tag{18}$$

з використанням апіорної матриці попереднього етапу.

На третьому етапі обчислюється оцінка вектора стану, тобто вихідна величина фільтра:

$$X(k)_\phi = \Phi X(k-1)_\phi + BU(k-1) + K \{Z(k) - H[\Phi X(k-1)_\phi + BU(k-1)]\}, \tag{19}$$

де

$$Z(k) = X(k) \cdot H + v(k). \tag{20}$$

На четвертому етапі визначається апостеріорна матриця

$$L(k) = [E - K(k) \cdot H] \cdot L'(k). \tag{21}$$

На останньому, п'ятому, етапі готується апіорна матриця:

$$L'(k+1) = \Phi \cdot L(k) \cdot \Phi^T + R(k)_q \tag{22}$$

На один крок вперед для 4-го етапу.

Реалізуємо одержані алгоритми побудови оптимального фільтра Калмана-Б'юсі для об'єкта 2-го порядку, який описано системою рівнянь:

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= AX(t) + B_1U(t) + D_1q(t); \\ Z(t) &= H \cdot X(t) + v(t), \end{aligned} \quad (23)$$

де

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}; B_1 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}; D_1 = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}; H = [h_1 \quad h_2].$$

При переході до дискретної форми представлення згідно з (3) система рівнянь (23) набуде вигляду:

$$\begin{cases} X(k) = \Phi X(k-1) + BU(k-1) + Dq(k-1); \\ Z(k) = HX(k) + v(k), \end{cases} \quad (24)$$

де

$$\Phi = E + T \cdot A = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix}; c_1 = 1 + Ta_{11}; c_2 = 1 + Ta_{12}; c_3 = 1 + Ta_{21}; c_4 = 1 + Ta_{22}.$$

Тоді досліджуваний об'єкт керування (24) можна подати системою різницевих рівнянь:

$$\begin{aligned} x_1(k) &= c_1x_1(k-1) + c_2x_2(k-1) + Tb_1u(k-1) + Td_1q(k-1); \\ x_2(k) &= c_3x_1(k-1) + c_4x_2(k-1) + Tb_2u(k-1) + Td_2q(k-1); \\ Z(k) &= h_1x_1(k) + h_2x_2(k) + v(k). \end{aligned} \quad (25)$$

На першому етапі синтезу матричне рівняння (16) перетворюється в систему 4-х різницевих рівнянь:

$$\begin{aligned} l'_1(k) &= c_1^2l_1(k-1) + c_1c_2l_2(k-1) + c_1c_2l_3(k-1) + c_2^2l_4(k-1) + r_q; \\ l'_2(k) &= c_1c_3l_1(k-1) + c_1c_4l_2(k-1) + c_2c_3l_3(k-1) + c_2c_4l_4(k-1); \\ l'_3(k) &= c_1c_3l_1(k-1) + c_3c_2l_2(k-1) + c_4c_1l_3(k-1) + c_4c_2l_4(k-1); \\ l'_4(k) &= c_3^2l_1(k-1) + c_3c_4l_2(k-1) + c_3c_4l_3(k-1) + c_4^2l_4(k-1) + r_q. \end{aligned} \quad (26)$$

На другому етапі визначаються компоненти матриці підсилення К з матричного рівняння (18):

$$\begin{aligned} K_1(k) &= \frac{h_1l'_1(k) + h_2l'_2(k)}{h_1^2l'_1(k) + h_1h_2[l'_2(k) + l'_3(k)] + h_2^2l'_4(k) + R_v(k)}; \\ K_2(k) &= \frac{h_1l'_3(k) + h_2l'_4(k)}{h_1^2l'_1(k) + h_1h_2[l'_2(k) + l'_3(k)] + h_2^2l'_4(k) + R_v(k)}. \end{aligned} \quad (27)$$

На третьому етапі за формулою (19) визначаються вихідні координати фільтра:

$$\begin{aligned} x_1(k)_\phi &= c_1x_1(k-1) + c_2x_2(k-1) + Tb_1u(k-1) + \\ &+ K_1(k)\{Z(k-1) - h_1[c_1x_1(k-1)_\phi + c_2x_2(k-1)_\phi + Tb_1u(k-1)] - \\ &- h_2[c_3x_1(k-1)_\phi + c_4x_2(k-1)_\phi + Tb_2u(k-1)]\}; \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} x_2(k)_\phi &= c_3x_1(k-1)_\phi + c_4x_2(k-1)_\phi + Tb_2u(k-1) + \\ &+ K_2(k)\{Z(k-1) - h_1[c_1x_1(k-1)_\phi + c_2x_2(k-1)_\phi + Tb_1u(k-1)] - \\ &- h_2[c_3x_1(k-1)_\phi + c_4x_2(k-1)_\phi + Tb_2u(k-1)]\}. \end{aligned} \quad (29)$$

На четвертому етапі за формулою (21) визначаються елементи апостеріорної матриці

$$\begin{aligned} l_1(k) &= [1 - K_1(k)h_1] - l'_1(k) - K_1(k)h_2l'_3(k); \quad l_2(k) = [1 - K_1(k)h_1] - l'_2(k) - K_1(k)h_2l'_4(k); \\ l_3(k) &= [1 - K_2(k)h_2] - l'_3(k) - K_2(k)h_1l'_1(k); \quad l_4(k) = [1 - K_2(k)h_2] - l'_4(k) - K_2(k)h_1l'_2(k). \end{aligned} \quad (30)$$

На п'ятому етапі за матричним рівнянням (22) аналогічно системі (26) необхідно одержати елементи апіорної матриці L' на крок вперед $l'_1(k+1)$; $l'_2(k+1)$; $l'_3(k+1)$; $l'_4(k+1)$.

Експериментальні дослідження. Розглянемо ефективність роботи фільтра Калмана-Б'юсі для об'єкта керування, який піддається впливу випадкових збурень $q(t)$ типу білий шум з нульовим середнім (шуми стану). В процесі вимірювання вихідної величини ОК $Y(t)$ на неї впливають завади $v(t)$ типу білий шум з нульовим середнім. Крім того, на ОК діє детермінований сигнал керування $U(t)$:

$$\dot{X}(t) = AX(t) + B_1U(t) + D_1q(t); \quad Z(t) = H \cdot X(t) + v(t), \quad (31)$$

де

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1,5 \end{bmatrix}; \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad D_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

На вхід ОК діє детермінований ступеневий сигнал:

$$U(t) = 10 \cdot 1(t).$$

Завади $q(t)$ та $v(t)$ приведені на рис. 4 та рис. 5.

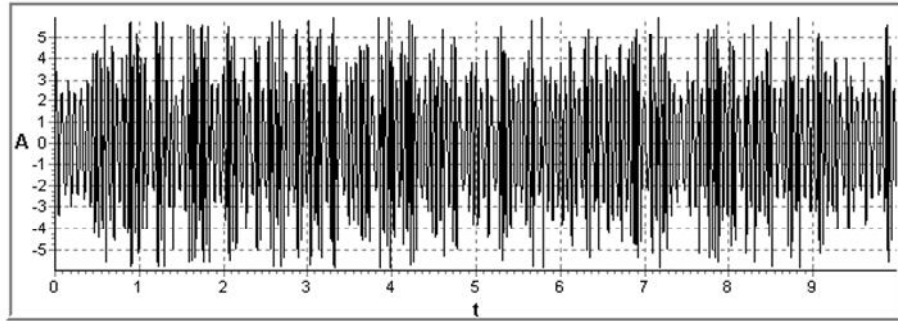


Рис. 4. Випадкові збурення $q(t)$

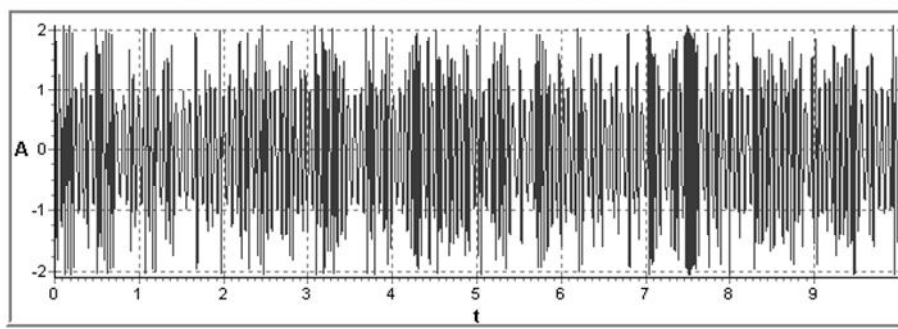


Рис. 5. Шуми вимірювання $v(t)$

Сигнал $x_1(t)$, який зашумлений завадами $q(t)$ та $v(t)$, наведено на рис. 6.

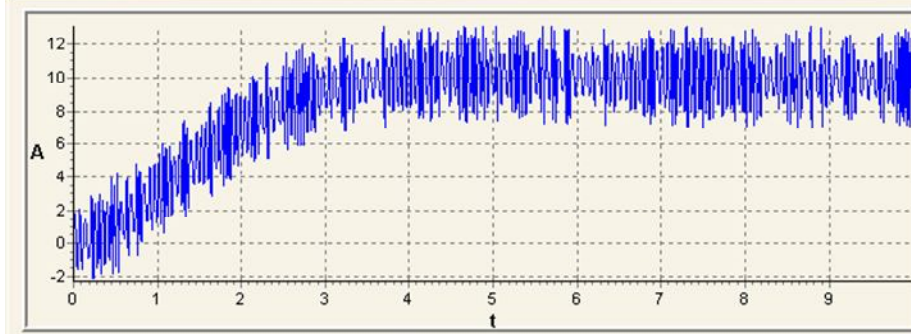


Рис. 6. Сигнал $x_1(t)$ на вході фільтра

Той же сигнал $x_1(t)$ після процедури фільтрації на виході фільтра Калмана-Б'юсі наведено на рис. 7.

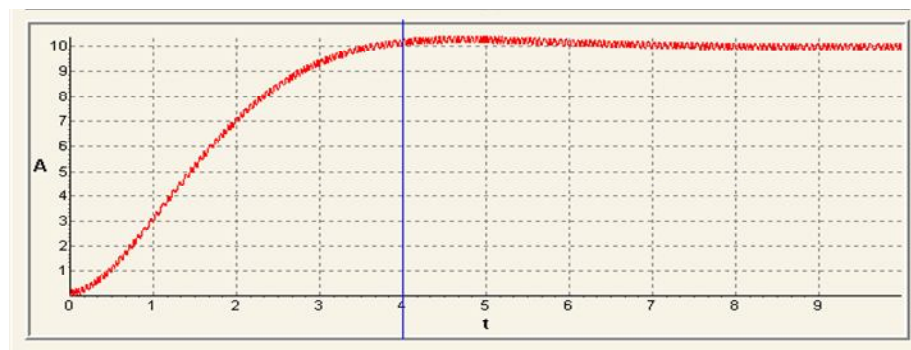


Рис. 7. Сигнал $x_1(t)$ на виході фільтра

Висновки. Запропонований у статті покроковий алгоритм синтезу параметрів оптимального фільтра Калмана-Б'юсі дає можливість синтезувати дискретний спостережний пристрій для великої кількості об'єктів керування, які описуються системою диференціальних рівнянь другого порядку в загальному вигляді з метою побудови оптимальної САК у ймовірнісних умовах.

Результати моделювання динаміки роботи оптимального фільтра Калмана-Б'юсі для конкретного об'єкта в ймовірнісних умовах роботи характеризують його ефективність.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Балакришнан А.В. Теория фильтрации Калмана. – М.: Мир, 1988. – 168 с.
2. Браммер К., Зиффлинг Г. Фильтр Калмана-Бьюси. – М.: Наука, 1982. – 200 с.
3. Венгеров А.А., Щаренский В.А. Прикладные вопросы оптимальной линейной фильтрации. – М.: Энергоиздат, 1982. – 192 с.
4. Кузовков Н.Т. Модальное управление и наблюдающие устройства. – М.: Машиностроение, 1976. – 184 с.
5. Тютюнник А.Г. Оптимальні і адаптивні системи автоматичного керування. – Ж.: ЖІТІ, 2002. – 420 с.
6. Колеснік І.С., Хміль С.Л. Оптимальне управління системою агрегатів // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2005. – № 6 – С. 36–40.
7. Тимченко А.А. Основи системного проектування та системного аналізу складних об'єктів. – Київ: Либідь, 2004. – 211 с.
8. Шматок С.О., Подчащинський Ю.О. Автоматизоване проектування систем керування на основі MATLAB. – Житомир: ЖДТУ, 2005. – 172 с.

ТЮТЮННИК Анатолій Гнатович – кандидат технічних наук, доцент кафедри автоматизації і комп'ютеризованих технологій Житомирського державного технологічного університету.

Наукові інтереси:

- сучасна теорія управління;
- методи оптимізації та адаптації систем.

СВІСТЕЛЬНИК Сергій Сергійович – старший викладач кафедри автоматизації і комп'ютеризованих технологій Житомирського державного технологічного університету.

Наукові інтереси:

- сучасна теорія управління.

Подано 12.09.2006

Свістельник С.С., Тютюнник А.Г. Синтез оптимальних спостережних пристроїв на основі дискретних фільтрів Калмана-Б'юсі

Свистельник С.С., Тютюнник А.И. Синтез оптимальных наблюдающих устройств на основе дискретных фильтров Калмана-Бьюсси

Svistelnik S.S., Tyutyunnik A.I. Synthesis of optimal observation filters on the basis of discrete Kalman-Bjussi filters

УДК 681.5.015.44

Синтез оптимальних спостережних пристроїв на основі дискретних фільтрів Калмана-Б'юсі / С.С. Свістельник, А.Г. Тютюнник

Розглянуті питання синтезу спостережних пристроїв на базі дискретного фільтра Калмана-Б'юсі. Запропоновано покроковий алгоритм розрахунку основних елементів фільтра.

УДК 681.5.015.44

Синтез оптимальных наблюдающих устройств на основе дискретных фильтров калмана-Бьюсси / С.С. Свистельник, А.И. Тютюнник

Рассмотрены вопросы синтеза наблюдающих устройств на основе дискретных фильтров Калмана-Бьюсси. Предложено пошаговый алгоритм расчета основных элементов фильтра.

УДК 681.5.015.44

Synthesis of optimal observation filters on the basis of discrete Kalman-Bjussi filters / Svistelnik S.S., Tyutyunnik A.I.

The article reviews synthesis of observation devices on the basis of discrete Kalman-Djussi filters. There is offered an algorithm of calculation of main filter elements.