УДК 519.67

С.І. Яремчук, к.ф.-м.н., проф.
Ю.О. Шаповалов, доц.
І.М. Музика, магістрант
Житомирський державний технологічний університет

ОПТИМІЗАЦІЯ РОЗМІЩЕННЯ ОБ'ЄКТІВ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИДУ НА ОБЛАСТІ З ЗОНАМИ ЗАБОРОНИ

Розглядається задача оптимізації розміщення об'єктів, які можна розкласти на прямокутники, в багатозв'язній області. Розроблено математичну модель та алгоритм розв'язання поставленої задачі за допомогою модифікованого методу можливих напрямків.

Вступ. Задачі геометричного проектування виникають при плануванні будівництва, конструюванні пристроїв, організації вантажоперевезень та ін. Усі наведені практичні задачі зводяться до розв'язання задачі умовної оптимізації з заданим критерієм якості на множині припустимих розв'язків, яка описується обмеженнями, що накладаються на положення об'єктів.

Основні проблеми, що виникають при розв'язанні цих задач, обумовлені великою вимірністю, нелінійністю функції цілі або функцій, що входять у систему обмежень, та неопуклістю множини припустимих розв'язків. Більшість розроблених алгоритмів призначено для розв'язання вузького класу задач та не припускають зміни функції цілі чи інших параметрів.

Постановка проблеми. Розглядається задача оптимізації розміщення об'єктів спеціального виду на багатозв'язній області. Об'єкти, що розміщуються, можна розбити на взаємо-орієнтовані прямокутники, сторони яких паралельні координатним осям. Область розміщення описується системою нерівностей, що містить диференційовані опуклі функції. Крім цього в даній області є зони заборони у вигляді прямокутників.

Необхідно розмістити об'єкти так, щоб заданий критерій якості досягав свого мінімуму. На розміщення накладено умови взаємного неперетину об'єктів та їх невиходу за межі області розміщення.

Аналіз джерел дослідження. Задачам оптимізації розміщення присвячено багато досліджень. Найбільш популярними є задачі щільного розміщення. Для їх розв'язання здебільшого пропонуються методи, які використовують особливість цих задач, а саме те, що оптимальний розв'язок задачі знаходиться на межі області припустимих розв'язків. Наприклад, в [1] наведено постановки, математичні моделі та методи розв'язання практичних задач щільного розміщення. Для розв'язання зазначених задач запропоновано метод гілок та меж і метод послідовно-одиночного розміщення. В роботі [2] побудовано математичну модель задачі щільного розміщення прямокутників в опуклій області. Умови неперетину прямокутників включено у функцію цілі, а умови невиходу за межі області розміщення записано в системі обмежень. Для розв'язання задачі застосовано класичні методи умовної оптимізації. В роботі [3] наведено метод гілок та меж розв'язання задачі розміщення прямокутників у напівнескінченній смузі.

В [4] розглядається задача оптимізації розміщення прямокутників у прямокутнику з довільною, неперервно-диференційованою функцією цілі. Неопуклу, багатозв'язну множину припустимих розв'язків задачі подано у вигляді об'єднання опуклих підмножин. Розв'язок вихідної задачі шукається шляхом розв'язання послідовності підзадач методом умовного градієнта. Подальше дослідження задачі привело до створення методу G-проекцій [5], що являє собою модифікований метод проекції градієнта Розена [6]. В роботі [7] для розв'язання задачі оптимізації розміщення прямокутників в довільній опуклій області запропоновано метод спрямованого переходу та модифікований метод можливих напрямків. Дане дослідження є продовженням робіт [4], [7].

Ціль статті. Побудова математичної моделі та розробка алгоритму розв'язання задачі оптимізації розміщення об'єктів спеціального виду на багатозв'язній області з зонами заборони.

Викладення основного матеріалу. Задано m об'єктів F_i, $i=\overline{1,m}$, які необхідно розмістити на опуклій області Ω та s зон заборони у вигляді прямокутників.

Кожен з об'єктів F_i, $i=\overline{1,m}$ можна розбити на складові прямокутники D_{i1}, $D_{i2},\ldots,D_{im_i}$. Положення об'єкта F_i, $i=\overline{1,m}$ в області Ω визначається координатами його полюса [8]. Нехай полюсом $Z^i(\xi_1^i,\xi_2^i)$ об'єкта F_i буде геометричний центр складової D_{i1}. Полюсом складової D_{ij}, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,m_i}$ будемо вважати її геометричний центр.

Для кожного об'єкта F_i, $i=\overline{1,m}$, необхідно:

– визначити прямокутники D_{i1}, $D_{i2},\ldots,D_{im_i}$, на які розкладається об'єкт F_i;

– задати розміри кожного прямокутника D_{ij} , $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,m_i}$ - вектор $L^{ij}(l_1^{ij}, l_2^{ij})$;

– визначити положення $C^{ij}(c_1^{ij}, c_2^{ij})$ прямокутників D_{ij} , $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,m_i}$ у рухомій системі координат, центр якої співпадає з полюсом $Z^i(\xi_1^i, \xi_2^i)$ відповідного об'єкта F_i , а осі паралельні сторонам прямокутників.

Положення об'єктів F_i, $i = \overline{1,m}$ в області Ω визначається координатами вектора $Z(Z^1, Z^2, ..., Z^m) = (\xi_1^1, \xi_2^1, \xi_1^2, \xi_2^2, ..., \xi_1^m, \xi_2^m)$.

Зони заборони подамо у вигляді об'єктів F_j , $j = \overline{m+1, m+s}$, положення яких зафіксовано.

Таким чином, координати $(\xi_1^{m+1}, \xi_2^{m+1}, ..., \xi_1^{m+s}, \xi_2^{m+s})$ фіксованих об'єктів F_j , $j = \overline{m+1, m+s}$ є константами.

Отже має місце задача умовної оптимізації:

$$\chi(Z) \to \min , \ Z \in G , \tag{1}$$

де $Z(Z^1, Z^2, ..., Z^m)$ – параметр розміщення об'єктів F_i , $i = \overline{1,m}$; $\chi(Z)$ – неперервно-диференційована функція цілі; G – множина припустимих розв'язків задачі, яка визначається умовами належності об'єктів, що розміщуються, до області Ω , а також умовами їх неперетину між собою та фіксованими об'єктами.

Приклад припустимого розв'язку задачі (1) наведено на рис. 1. Зонам заборони відповідають об'єкти F_4, F_5 .

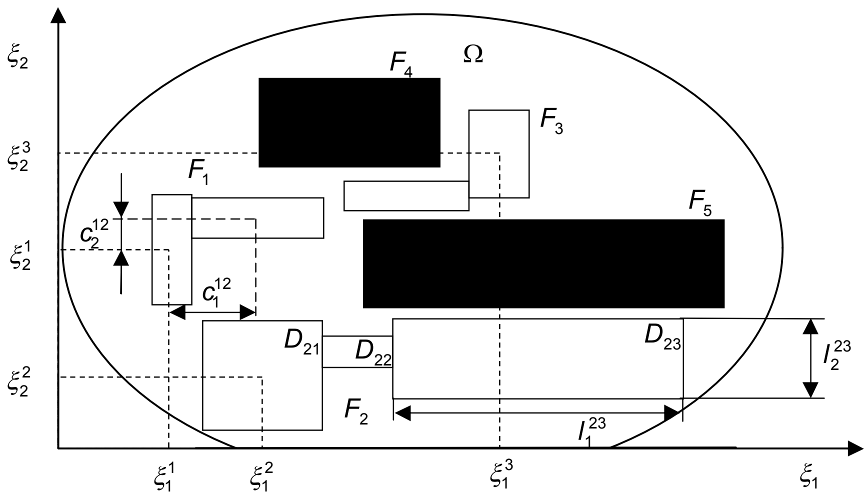


Рис. 1. Припустиме розміщення об'єктів

Для невиходу об'єкта F_i , $i = \overline{1,m}$ за межі області Ω достатньо накласти обмеження на положення вершин, які є кутовими точками опуклої оболонки його прямокутників D_{ij} , $j = \overline{1,m_i}$. У загальному випадку ці обмеження можна записати таким чином:

$$\varphi_p(Z) \le 0 , \ p = \overline{1,v} , \tag{2}$$

де $\varphi_p(Z)$ – неперервно-диференційовані та опуклі функції на опуклій множині $X \supset G$.

Вигляд та кількість обмежень (2) залежать від форми області Ω , кількості та форми об'єктів F_i , $i = \overline{1,m}$.

Для виконання умови неперетину об'єктів F_i , F_k , $i = \overline{1,m}$, $k = \overline{i+1, m+s}$ потрібно забезпечити неперетинання складових D_{ij} , D_{kl} , $j = \overline{1,m_i}$, $l = \overline{1,m_k}$, що належать різним об'єктам (умови неперетину фіксованих об'єктів не накладаються)

$$\left|\xi_1^i + c_1^{ij} - \left(\xi_1^k + c_1^{kl}\right)\right| \ge \frac{l_1^{ij} + l_1^{kl}}{2} \vee \left|\xi_2^i + c_2^{ij} - \left(\xi_2^k + c_2^{kl}\right)\right| \ge \frac{l_2^{ij} + l_2^{kl}}{2} , \\ i = \overline{1,m} , \ j = \overline{1,m_i} , \ k = \overline{i+1, m+s} , \ l = \overline{1,m_k} . \tag{3}$$

Множина припустимих розв'язків G задачі (1) визначається обмеженнями (2), (3). Через обмеження (3) вона є неопуклою, багатозв'язною, може бути незв'язною, з великою кількістю компонент зв'язності. Методи умовної оптимізації, що збігаються до стаціонарної точки потребують опуклості множини припустимих розв'язків. Тому в даному дослідженні використовується ідея декомпозиції множини припустимих розв'язків на опуклі підмножини і заміна розв'язання вихідної задачі (1) розв'язанням послідовності підзадач на опуклих підмножинах [4].

Множина G подається у вигляді об'єднання опуклих підмножин G_p [9]:

$$G = \bigcup_{p=1}^{r} G_p \text{, де } r = 4^{C_m^2} . \tag{4}$$

За розв'язок вихідної задачі (1) приймається кращий з розв'язків побудованих підзадач:

$$\chi(Z) \to \min \text{ , } Z \in G_p \text{ , } p = \overline{1,r} . \tag{5}$$

Обмеження неперетину пари D_{ij} , D_{kl} , $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,m_i}$, $k = \overline{i+1,m+s}$, $l = \overline{1,m_k}$ можна записати у вигляді:

$$\begin{gathered}\left(\xi_1^i + c_1^{ij}\right) - \left(\xi_1^k + c_1^{kl}\right) \geq \frac{l_1^{ij} + l_1^{kl}}{2} \vee \left(\xi_1^k + c_1^{kl}\right) - \left(\xi_1^i + c_1^{ij}\right) \geq \frac{l_1^{ij} + l_1^{kl}}{2} \vee \\ \vee \left(\xi_2^i + c_2^{ij}\right) - \left(\xi_2^k + c_2^{kl}\right) \geq \frac{l_2^{ij} + l_2^{kl}}{2} \vee \left(\xi_2^k + c_2^{kl}\right) - \left(\xi_2^i + c_2^{ij}\right) \geq \frac{l_2^{ij} + l_2^{kl}}{2} .\end{gathered} \tag{6}$$

Система обмежень, що визначає опуклі підмножини G_p, $p = \overline{1,r}$, складається з лінійних нерівностей (6), які забезпечують неперетин об'єктів (по одній для кожної пари складових елементів, що належать різним об'єктам), та з обмежень (2), які забезпечують невихід за межі області Ω .

Нерівності, що визначають G_p, можна записати наступним чином:

$$\phi_i(Z) \leq 0 \text{ , } i = \overline{1,q} , \tag{7}$$

де q – загальна кількість обмежень, що залежить від форми та кількості об'єктів F_i , вигляду області Ω .

Кожна з підзадач (5) є задачею умовної оптимізації. Для розв'язання отриманих підзадач можна застосувати модифікацію методу можливих напрямків [10].

Підмножини G_p, $p = \overline{1,r}$ відрізняються між собою лише тим, яка саме з можливих лінійних нерівностей (6), для кожної пари складових D_{ij} , D_{kl} , $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,m_i}$, $k = \overline{i+1,m+s}$, $l = \overline{1,m_k}$ входить в систему обмежень. На кожній ітерації методу можливих напрямків, після переходу в точку Z^k, у випадку наявності «ε-активного» обмеження $\phi_i\left(Z^k\right) \leq 0$ неперетину пари складових D_{ij} , D_{kl} , перевіряється виконання умов неперетину цієї ж пари по іншій координаті. Якщо знайдеться відповідне обмеження $\phi_i^*\left(Z^k\right) \leq 0$ неперетину D_{ij} , D_{kl} , для якого виконується умова $\phi_i^*\left(Z^k\right) \leq -\varepsilon_k$, то в системі обмежень задачі «ε-активне» обмеження $\phi_i\left(Z^k\right) \leq 0$ замінюється на не «ε-активне» $\phi_i^*\left(Z^k\right) \leq 0$. Таким чином розширюється множина можливих напрямків h у точці Z^k , здійснюється перехід до іншої підмножини G_p та зменшується час розв'язання вихідної задачі.

Алгоритм розв'язання задачі оптимізації розміщення об'єктів

1. $k = 0$. Обирається початкове розміщення $Z^0 = \left(\xi_1^1, \xi_2^1, \xi_1^2, \xi_2^2, \ldots, \xi_1^m, \xi_2^m\right) \in G_p \subset G$, $p = \overline{1,r}$, параметри методу $\varepsilon > 0$, $\varepsilon_0 \geq \varepsilon$, $0 < \gamma < 1$.

2. Розглянемо k-те наближення. Z^k , $\varepsilon_k > 0$, $k = 0,1\ldots$.

2.1. Перевіряються обмеження, що задають умови взаємного неперетину об'єктів. Якщо для розміщення Z^k обмеження $\phi_i\left(Z^k\right) \leq 0$, що забезпечує неперетин прямокутників D_{ij} , D_{kl} , $j \neq k$, задовольняє умові $-\varepsilon < \phi_i\left(Z^k\right) \leq 0$, тобто обмеження $\phi_i\left(Z^k\right) \leq 0$ є «ε-активним», то робиться перевірка: якщо для цієї пари об'єктів D_{ij} , D_{kl} має місце умова $\phi_i^*\left(Z^k\right) \leq 0$ (обмеження їх неперетину по іншій координаті), причому $\phi_i^*\left(Z^k\right) \leq -\varepsilon_k$ (тобто обмеження $\phi_i\left(Z^k\right) \leq 0$ в точці Z^k не є «ε-активним»), то в системі обмежень підзадачі робиться заміна нерівності $\phi_i\left(Z^k\right) \leq 0$ на $\phi_i^*\left(Z^k\right) \leq 0$. Таким чином відбувається перехід до іншої підмножини припустимих розв'язків.

2.2. Будується множина номерів «ε-активних» обмежень задачі $I\left(Z^k, \varepsilon_k\right)$, для яких виконується умова $-\varepsilon < \phi_i\left(Z^k\right) \le 0$, $i = \overline{1, q}$.

2.3. Знаходиться вектор спуску. Для цього розв'язується допоміжна задача лінійного програмування:

$$\overline{\chi}(h_1, h_2, \ldots, h_{2m}, y) = y \to \min ,$$

$$\begin{cases} \left(\nabla\chi\left(Z^k\right), h\right) \le y \\ \left(\nabla\phi_i\left(Z^k\right), h\right) \le y, \ \forall i \in I\left(Z^k, \varepsilon_k\right), \text{ якщо } \phi_i(Z) \text{ – нелінійна} \\ \left(\nabla\phi_i\left(Z^k\right), h\right) \le 0, \ \forall i \in I\left(Z^k, \varepsilon_k\right), \text{ якщо } \phi_i(Z) \text{ – лінійна} \\ \left|h_i\right| \le 1, \ i = \overline{1, 2m} \end{cases}$$

$\left(h^k\left(h_1^k, h_2^k, \ldots, h_{2m}^k\right), y_k\right)$ – розв'язок допоміжної задачі.

Якщо $y_k \ge -\varepsilon_k$ та $\varepsilon_k \le \varepsilon$ – обчислення припиняються, Z^k приймається за розв'язок задачі.

Якщо $y_k \ge -\varepsilon_k$ та $\varepsilon_k > \varepsilon$, то $Z^{k+1} = Z^k$, $\varepsilon_{k+1} = \gamma\varepsilon_k$, змінній k присвоюється значення $k+1$ та здійснюється перехід до п. 2.

Якщо ж $y_k < -\varepsilon_k$, то h^k – вектор спуску.

2.4. Пошук $k+1$-го наближення. $Z^{k+1} = Z^k + \beta_k h^k$, β_k знаходиться з умови $\beta_k = \arg\min\limits_{0<\beta<B_k} \chi\left(Z^k + \beta h^k\right)$, де B_k – максимально припустиме β, при якому виконуються усі нерівності $\phi_i\left(Z^k + B_k h^k\right) \le 0$, $i = \overline{1, q}$ системи обмежень підзадачі.

2.5. Змінній k присвоюється значення $k+1$ та здійснюється перехід до п. 2.

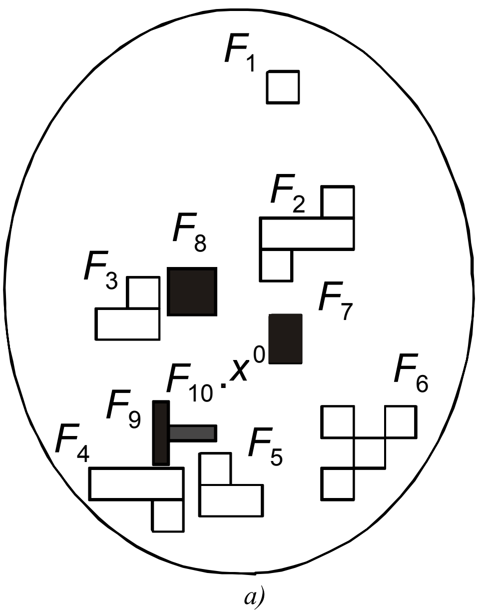
Наведений алгоритм програмно реалізовано. Початкове наближення Z^0 знаходиться методом штрафних функцій [11]. Пошук β_k проводиться за допомогою методу найпростішого перебору одновимірної оптимізації [11].

На рис. 2 зображено приклад розв'язання тестової задачі. Функція цілі задачі:

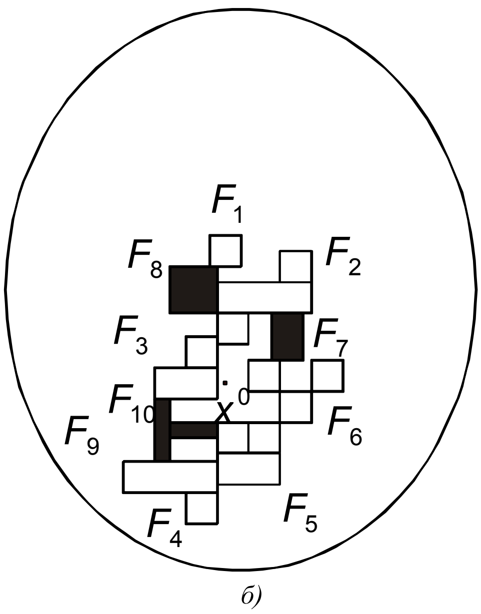
$\chi(Z) = \sum\limits_{i=1}^{m+k}\left(\left(x_1^0 - \xi_1^i\right)^2 + \left(x_2^0 - \xi_2^i\right)^2\right) \to \min$, де x^0 має координати (14;12), $m = 5$, $k = 3$.

Область Ω являє собою еліпс з піввісями (15;18), F_7, F_8, F_9, F_{10} – зони заборони.

Параметри методу: $\varepsilon_0 = 0.5$, $\varepsilon = 10^{-5}$, $\gamma = 0.5$. Розв'язок було отримано за 0.05 с. Зроблено 54 ітерації, 12 переходів у сусідні підмножини. Значення функції цілі: для початкового розміщення – $\chi\left(Z^0\right) = 1601.46$, для кінцевого розміщення – $\chi\left(Z^{54}\right) = 562.75$.



а)



б)

Рис. 2. Приклад розв'язання задачі:
а) початкове розміщення; б) отриманий розв'язок

Висновки. В результаті даного дослідження розроблено математичну модель та алгоритм розв'язання задачі оптимізації розміщення об'єктів спеціального виду на багатозв'язній області з використанням модифікації методу можливих напрямків.

Запропонований алгоритм програмно реалізовано.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Стоян Ю.Г., Яковлев С.В.* Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. – Киев: Наукова думка, 1986. – 265 с.
2. *Birgin E.G., Marinez J.M., Nishihara F.H., Ronconi D.P.* Orthogonal packing of rectangular items within arbitrary convex region by nonlinear optimization // Computers & Operations Research. – 2006. – № 33. – Pp. 3535–3548.
3. *Новожилова М.В.* Решение задачи поиска глобального экстремума линейной функции цели на структуре линейных неравенств. – Харьков, 1988. – 45 с. (Препр. / АН Украины. Ин-т пробл. машиностроения; № 292).
4. *Яремчук С.І., Жовнивський Д.О., Співак А.В.* Модифікація методу умовного градієнта для розв'язання задач оптимального розміщення джерел фізичних полів // Вісник ЖІТІ. – 1999. – № 9 / Технічні науки. – С. 248–253.
5. *Яремчук С.І., Рудюк Л.В.* Алгоритм розв'язання задачі розміщення прямокутників в прямокутній області // Вісник Київського університету імені Тараса Шевченка. – 2005. – № 2. – С. 339–343.
6. *Rosen J.B.* The gradient projection method for nonlinear programming // Part I. Linear constraints, SIAM J.Applied Mathematics 8. – 1960. – Pp. 181–217.
7. *Яремчук С.І., Шаповалов Ю.О.* Модифікація методу можливих напрямків для задачі оптимізації розміщення // Вісник ХНУ. – 2005. – № 5. Ч. 1. – Т. 2. – С. 146–151.
8. *Стоян Ю.Г., Гиль Н.И.* Методы и алгоритмы размещения плоских геометрических объектов. – Киев: Наук. думка, 1976. – 248 с.
9. *Власенко О.В., Співак А.В., Яремчук С.І.* Метод умовного градієнта для оптимального розташування джерел фізичних полів // Вісник ЖІТІ. – 1998. – № 7 / Технічні науки. – С. 248–253.
10. *Яремчук С.І., Шаповалов Ю.О.* Оптимізація розміщення об'єктів, які можна розкласти на прямокутники // Радиоэлектроника и информатика. – 2006. – № 1 – С. 87–90.
11. *Яремчук С.І.* Введення в математичні методи дослідження операцій: Навчальний посібник. – Житомир: ЖІТІ, 2002. – 300 с.

ßÐÅÌ×ÓÊ Світлана Іванівна – кандидат фізико-математичних наук, професор кафедри програмного забезпечення обчислювальної техніки Житомирського державного технологічного університету.

Наукові інтереси:
– екстремальні задачі;
– математичне моделювання.

ШАПОВАЛОВ Юрій Олександрович – доцент кафедри програмного забезпечення обчислювальної техніки Житомирського державного технологічного університету.

Наукові інтереси:
– методи оптимізації;
– комп'ютерне моделювання.

МУЗИКА Іван Миколайович – магістрант Житомирського державного технологічного університету.

Наукові інтереси:
– методи оптимізації;
– математичне моделювання.

Подано: 26.10.2006