

РІВНЯННЯ РУХУ НОВОГО ДВОКІЛЬЦЕВОГО ДИНАМІЧНО НАСТРОЮВАНОВОГО ГРАВІМЕТРА

(Представлено д.т.н., проф. Безвесільною О.М.)

Найбільш перспективними гравіметрами, які працюють у складі авіаційної гравіметричної системи, є гіроскопічні. Проте двокільцеві, порівняно з однокільцевими динамічно настроюваними гіроскопами, мають переваги, найбільш вагомими з яких: більш високі точність та швидкодія, малі габарити, висока чутливість. У роботі отримано рівняння руху нового динамічно настроюваного гравіметра, що дасть можливість дослідити його в подальшому, зробити математичне моделювання, визначити статичні та динамічні похибки.

Постановка проблеми. Для вивчення характеристик гравітаційного поля Землі необхідно побудувати авіаційну гравіметричну систему (АГС), чутливим елементом якої є гравіметр. У роботі [1] запропоновано схеми такої АГС, розроблено теорію та методику побудови АГС.

За допомогою АГС можна здобути гравіметричну інформацію у важкодоступних районах земної кулі набагато швидше та з меншими витратами, ніж за допомогою наземних або морських засобів. Але зростаючі вимоги до точності вимірювання гравітаційних аномалій, зменшення габаритів та ваги гравіметра АГС націлюють на пошук більш точних гравіметрів, які мають ще менші габарити та вагу.

Тому актуальним є дослідження двокільцевого динамічно настроюваного гравіметра (ДГ), який має менші габарити, ніж гіроскопічний вимірювач прискорень (ГВП), а точність більшу, ніж у ГВП та однокільцевого ДНГ.

Аналіз досліджень. Ефективність роботи АГС значною мірою забезпечується вибором чутливого елемента системи – гравіметра. Сьогодні одними з найспективніших вважаються гіроскопічні гравіметри.

У роботі [1] Безвесільної О.М. досліджено можливість і доцільність використання як гравіметра АГС гіроскопічного вимірювача прискорень. Похибка вимірювання Δg АГС на базі гірогравіметра була 1 мГл. У роботах Безвесільної О.М. і Литвиненко П.Л. обґрунтовано доцільність використання як гравіметра АГС однокільцевого динамічно настроюваного гіроскопа (ДНГ), похибка вимірювання Δg АГС була 1 мГл. У роботах [2, 3] обґрунтовано, що двокільцевий ДНГ має значно більшу точність та швидкодію, ніж однокільцевий. Тому у подальшому доцільно дослідити можливість використання у якості гравіметра авіаційної гравіметричної системи модифікованого двокільцевого ДНГ як найбільш перспективного з відомих авіаційних гравіметрів. Але в літературі [3–7] немає ніяких відомостей щодо рівняння руху двокільцевого динамічно настроюваного гравіметра, яке необхідне для подальшого моделювання приладу.

Метою роботи є отримання рівняння руху нового двокільцевого динамічно настроюваного гравіметра.

Основна частина. Методика складання рівнянь руху була наступна [8]. Складемо спочатку рівняння моментів карданового кільця щодо осей внутрішніх торсіонів у системі координат, що обертається разом з кардановим кільцем. Потім змінну β повороту карданового кільця відносно приводного вала або нейтрального положення кільця, перетворимо до змінних α_1 і β_1 – кутів повороту кільця відносно системи координат ξ і η , що не обертається разом з приводним валом і кардановим кільцем, а зв'язаної з корпусом гравіметра, що не обертається. В змінних α_1 і β_1 відхилення β кільця будуть гармонійними функціями часу, що змінюються з частотою $\dot{\gamma}$ обертання приводного двигуна. Проектуванням моментів, що діють навколо координатних осей, зв'язаних з кільцем, на координатні осі, одержимо рівняння руху кільця відносно осей ξ і η . У таких рівняннях можна виділити складові моментів, що повільно змінюються і що є функціями α_1 , β_1 , і їхніх похідних, також складові, що повільно змінюються, – функції переносної кутової швидкості W_ξ, W_η, W_ζ і складові з періодичними коефіцієнтами, що змінюються з високою частотою $2\dot{\gamma}$. Високочастотні складові в наступному відкидаються. Вони надто ускладнюють аналіз рівнянь руху ДНГ, але легко усуваються застосуванням двокільцевого карданового підвісу ротора.

Викладена методика складання рівнянь руху карданова кільця, спочатку складають рівняння руху відносно зв'язаної з кільцем системи координат, потім перетворюють ці рівняння до опорних осей ξ, η, ζ .

Рівняння руху ротора будемо складати відразу відносно осей – осей Резаля, що не обертаються разом з ротором. Це можливо, оскільки ротор – симетричний: всі екваторіальні моменти інерції ротора однакові. Лише моменти зовнішніх сил спочатку задамо в осях, зв'язаних з ротором, потім перепроєктуємо їх на осі, що не обертаються. При цьому моменти зовнішніх сил, що діють на ротор навколо осей Резаля, дорівнюємо до моментів навколо опорних осей ξ і η , оскільки осі Резаля не збігаються з опорними осями на дуже малі кути α_1 і β_1 . Нарешті, додаванням отриманих рівнянь моментів ротора і кільця навколо осі ξ одержимо рівняння моментів усього гравіметра навколо осі ξ . А додаванням рівнянь ротора і кільця навколо осі η одержимо рівняння гравіметра в цілому навколо осі η .

При використанні такої методики в явній формі не враховується момент впливу ротора на карданове кільце і карданового кільця на ротор. Очевидно, що ці два внутрішніх моменти рівні та взаємно протилежні за знаком. При додаванні проекцій моментів ротора і кільця на осі опорної системи координат проекції цих внутрішніх моментів взаємно знищуються.

Рівняння руху карданового кільця

Рівняння динаміки приводного вала тривіально просте:

$$\dot{\gamma} = \text{const}$$

Тут $\dot{\gamma}$ – відносна швидкість, що створюється синхронним приводним двигуном, що живиться стабілізованою по частоті напругою. Абсолютну швидкість вала $\dot{\gamma} + \omega_\zeta$ можна приблизно вважати рівною $\dot{\gamma}$, оскільки $\omega_\zeta \ll \dot{\gamma}$.

Перейдемо до складання рівняння руху кільця карданового підвісу навколо осі внутрішніх торсионів. Як опорну приймемо координатну систему $\xi\eta\zeta$, що зв'язана з основою приладу (рис. 1). З віссю ξ з'єднаємо вісь приводного вала. З кардановим кільцем зв'яжемо праву систему координат $X_k Y_k Z_k$. Вісь внутрішніх торсионів збігається з віссю X_k . Кутова швидкість основи гравіметра задана складовими $\omega_\xi, \omega_\eta, \omega_\zeta$.

Відповідно до теореми про зміну моменту кількості руху рівняння моментів навколо осі X_k одержимо за алгоритмом:

$$\frac{dK_{xk}}{dt} + \omega_{yk} k_{zk} - \omega_{zk} k_{yk} = M_{xk} - [m\rho w]_{xk}, \tag{1}$$

де K_{xk} – головний момент кількості руху тіла відносно нерухомої точки O; ω_{xk} – кутова швидкість переносного руху рухомої системи координат; M_{xk} – головний момент зовнішніх сил, прикладених до системи відносно полюса O; $\rho(0, l, 0)$ – зміщення відносно точки O.

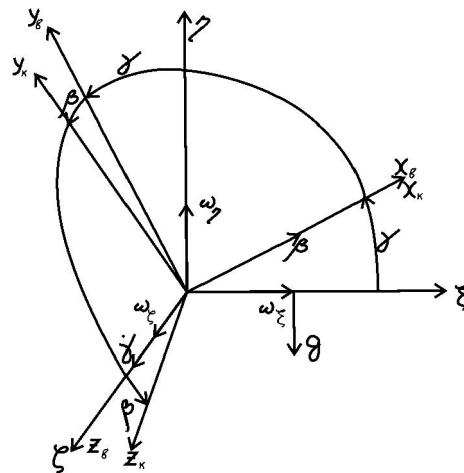


Рис. 1. Положення осей $X_k Y_k Z_k$, що зв'язані з кардановим кільцем, відносно опорної системи координат $\xi\eta\zeta$

З кінематичного креслення (рис. 1) одержимо наступні вирази складових абсолютної кутової швидкості кільця:

$$\omega_{xk} = \dot{\beta} + \omega_\xi \cos \gamma + \omega_\eta \sin \gamma;$$

$$w_{yk} = -w_{\xi} \sin \gamma \cos \beta + w_{\eta} \cos \gamma \cos \beta + (\dot{\gamma} + w_{\zeta}) \sin \beta;$$

$$w_{zk} = w_{\xi} \sin \gamma \sin \beta - w_{\eta} \cos \gamma \sin \beta + (\dot{\gamma} + w_{\zeta}) \cos \beta.$$

Складові моменту кількості руху будуть:

$$K_{xk} = I_{xk} w_{xk} = I_{xk} (\dot{\beta} + w_{\xi} \cos \gamma + w_{\eta} \sin \gamma);$$

$$K_{yk} = I_{yk} w_{yk} = I_{yk} (-w_{\xi} \sin \gamma \cos \beta + w_{\eta} \cos \gamma \cos \beta + (\dot{\gamma} + w_{\zeta}) \sin \beta);$$

$$K_{zk} = I_{zk} w_{zk} = I_{zk} (w_{\xi} \sin \gamma \sin \beta - w_{\eta} \cos \gamma \sin \beta + (\dot{\gamma} + w_{\zeta}) \cos \beta).$$

Заготовимо вирази, що відповідають рівнянню (2):

$$\frac{dK_{xk}}{dt} = I_{xk} (\ddot{\beta} + \dot{w}_{\xi} \cos \gamma - w_{\xi} \dot{\gamma} \sin \gamma + \dot{w}_{\eta} \sin \gamma + w_{\eta} \dot{\gamma} \cos \gamma);$$

$$w_{yk} K_{zk} - w_{zk} K_{yk} = (I_{zk} - I_{yk}) w_{yk} w_{zk}.$$

Представимо вирази для моментів M_{xk} зовнішніх сил, що діють відносно осей гравіметра:

$$M_{xk} = M_p + M_T + M_{\delta}, \tag{2}$$

де M_p – проекція моменту сили ваги; M_T – момент вимірювального датчика моменту.

Вважаючи, що вісь чутливості гравіметра виставлена за істинною вертикаллю, запишемо вирази для проекцій моменту сили ваги:

$$M_p = -mgl. \tag{3}$$

З урахуванням того, що АГС працює тільки в разі прямолінійного польоту літака зі сталою швидкістю, представимо моменти сил в'язкого тертя:

$$M_T = -f_1 \dot{\beta}, \tag{4}$$

де f_1 – коефіцієнти сил в'язкого тертя відносно відповідних осей.

Запишемо вирази для моментів вимірювального датчика моментів:

$$M_{\delta} = -k_1 \dot{\beta}, \tag{5}$$

де k_1 – коефіцієнт, що дорівнює добутку передаточних коефіцієнтів датчика моменту каналу вимірювання.

Остаточно запишемо вираз (2) з урахуванням (3–5):

$$M_{xk} = -mgl - k_1 \dot{\beta} - f_1 \dot{\beta} - M_d \text{sign} \dot{\beta},$$

де M_d – залишкові моменти сил сухого тертя.

З урахуванням наведених припущень рівняння руху гравіметра мають вигляд:

$$\begin{aligned} I_{xk} \ddot{\beta} + k_1 \dot{\beta} + f_1 \dot{\beta} + I_{xk} (\dot{w}_{\xi} \cos \gamma + \dot{w}_{\eta} \sin \gamma) + I_{xk} (-w_{\xi} \sin \gamma + w_{\eta} \cos \gamma) + \\ (I_{zk} - I_{yk}) \cdot [(\dot{\gamma} + w_{\zeta})^2 \sin \beta \cos \beta + (\dot{\gamma} + w_{\zeta}) \cdot (w_{\xi} \sin \gamma - w_{\eta} \cos \gamma) \sin^2 \beta + \\ + (\dot{\gamma} + w_{\zeta}) \cdot (-w_{\xi} \sin \gamma + w_{\eta} \cos \gamma) \cos^2 \beta] = \\ = -mgl - M_d \text{sign} \dot{\beta} - mlw \end{aligned}$$

Якщо знехотити w_{ζ} у порівнянні з $\dot{\gamma}$, оскільки $w_{\zeta} \ll \dot{\gamma}$, і ліанеризувати тригонометричні функції $\beta (\beta \ll 1)$, одержимо:

$$\begin{aligned} I_{xk} \ddot{\beta} + f_1 \dot{\beta} + k_1 \dot{\beta} + I_{xk} (\dot{w}_{\xi} \cos \gamma + \dot{w}_{\eta} \sin \gamma) + (I_{zk} - I_{yk}) \dot{\gamma}^2 \beta + 2(I_{zk} - I_{yk}) \dot{\gamma} w_{\xi} \beta + \\ + (I_{zk} + I_{xk} - I_{yk}) \dot{\gamma} (-w_{\xi} \sin \gamma + w_{\eta} \cos \gamma) = -mgl - M_d \text{sign} \dot{\beta} - mlw \end{aligned} \tag{6}$$

Зазначимо, що отримане рівняння руху карданового кільця необхідні лише для того, щоб врахувати вплив цього кільця на рух ротора. Інформативним є рух ротора. Перейдемо до складання рівняння руху ротора. Ротор обертається разом із приводним валом навколо осі ζ з постійною кутовою швидкістю $\dot{\gamma}$. А також повертається разом з кардановим кільцем відносно приводного вала на кут β навколо осі X_k і відносно карданового кільця на кут α . Поворот на кут α супроводжується скручуванням зовнішніх торсионів.

Розглянемо рух ротора відносно координатної системи XYZ – осей Резаля, які повертаються разом з ротором на малі кути відносно площини, перпендикулярної до осі ζ приводного вала, але не обертаються разом з ротором з кутовою швидкістю $\dot{\gamma}$. Ротор вважаємо симетричним відносно осі Z (всі екваторіальні моменти інерції рівні між собою), тому використання осей Резаля цілком припустимо. Масу торсионів не враховуємо через її малість у порівнянні з ротором і кардановим кільцем. Рівняння руху ротора в осях XYZ дають можливість робити висновки про закон зміни двох кутів повороту

ротора, що знімаються за допомогою двох датчиків кута, закріплених на корпусі приладу, тобто таких, що не обертаються разом з ротором. Рівняння руху ротора в координатних осях XYZ зручні для аналізу, оскільки більш симетричні. Позначимо α_1, β_1 – кути відхилення ротора відносно корпусу приладу: α_1 – кут відхилення екваторіальної площини ротора відносно осі ξ корпусу приладу; β_1 – кут відхилення площини ротора відносно осі η . Ці два кути характеризують положення координатної системи XYZ ротора гравіметра відносно системи $\xi\eta\zeta$, що зв'язана з корпусом. Відносне положення площин, в яких відраховуються кути α і β , а також кути α_1 і β_1 , показано на рис. 2. А також показана площина (площина, перпендикулярна осі ζ (Z_B)), що показує, яка дотична до сфери одиничного радіуса в точці перетину осі ζ зі сферою, на якій показане відносне положення опорної координатної системи.

Замінивши трикутник на сфері плоскими трикутниками на картинній площині, що можливо внаслідок малості (у порівнянні з 1 рад) кутів α і β або α_1, β_1 , одержимо наступні співвідношення:

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_1 \cos \gamma - \beta_1 \sin \gamma; \\ \beta &= \beta_1 \cos \gamma + \alpha_1 \sin \gamma. \end{aligned} \tag{7}$$

Диференціюванням співвідношень (7) знайдемо наступні залежності:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \dot{\alpha}_1 \cos \gamma - \alpha_1 \dot{\gamma} \sin \gamma - \dot{\beta}_1 \sin \gamma - \beta_1 \dot{\gamma} \cos \gamma; \\ \dot{\beta} &= \dot{\beta}_1 \cos \gamma - \beta_1 \dot{\gamma} \sin \gamma + \dot{\alpha}_1 \sin \gamma + \alpha_1 \dot{\gamma} \cos \gamma; \\ \ddot{\alpha} &= \ddot{\alpha}_1 \cos \gamma - 2\dot{\alpha}_1 \dot{\gamma} \sin \gamma - \alpha_1 \dot{\gamma}^2 \cos \gamma - \ddot{\beta}_1 \sin \gamma - 2\dot{\beta}_1 \dot{\gamma} \cos \gamma + \beta_1 \dot{\gamma}^2 \sin \gamma; \\ \ddot{\beta} &= \ddot{\beta}_1 \cos \gamma - 2\dot{\beta}_1 \dot{\gamma} \sin \gamma - \beta_1 \dot{\gamma}^2 \cos \gamma + \ddot{\alpha}_1 \sin \gamma + 2\dot{\alpha}_1 \dot{\gamma} \cos \gamma - \alpha_1 \dot{\gamma}^2 \sin \gamma. \end{aligned}$$

Ці кінематичні співвідношення будуть використані при переході від руху карданова кільця і ротора в системі, що обертається до руху в системі координат, що не обертається.

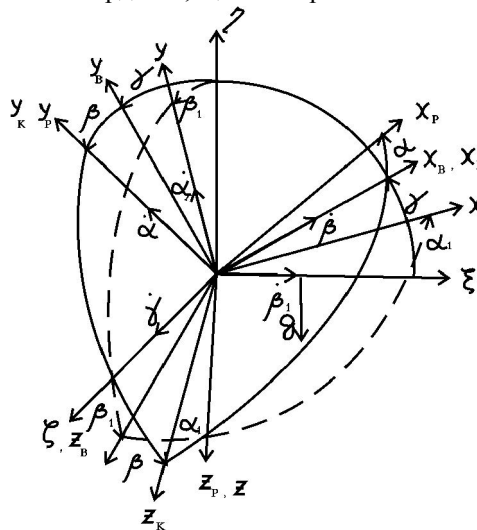


Рис.2. Відносне положення осей і площин, в яких відраховуються кути α, β і α_1, β_1

Перетворимо рівняння руху карданового кільця (1), отримані в системі координат $X_k Y_k Z_k$, що обертається, до опорної системи координат $\xi\eta\zeta$, яка зв'язана з корпусом приладу. Для цього виразимо координати α і β і їхні похідні через координати α_1, β_1 , і їхні похідні, скориставшись залежностями (7) і їх похідними. Одержимо:

$$\begin{aligned}
 & I_{xk}(\ddot{\beta}_1 \cos \gamma - 2\dot{\gamma}\dot{\beta}_1 \sin \gamma - \dot{\gamma}^2 \beta_1 \cos \gamma + \ddot{\alpha} \sin \gamma + 2\dot{\alpha}_1 \dot{\gamma} \cos \gamma - \alpha_1 \dot{\gamma}^2 \sin \gamma) + \\
 & + f_1(\dot{\beta}_1 \cos \gamma - \beta_1 \dot{\gamma} \sin \gamma + \dot{\alpha}_1 \sin \gamma + \dot{\gamma} \alpha_1 \cos \gamma) + k_1(\beta_1 \cos \gamma + \alpha_1 \sin \gamma) + \\
 & I_{xk}(\dot{w}_\xi \cos \gamma + \dot{w}_\eta \sin \gamma) + (I_{zk} - I_{yk})\dot{\gamma}^2(\beta_1 \cos \gamma + \alpha_1 \sin \gamma) + 2(I_{zk} - I_{yk})\dot{\gamma}w_\xi \times \\
 & \times (\beta_1 \cos \gamma + \alpha_1 \sin \gamma) + (I_{zk} + I_{xk} - I_{yk})\dot{\gamma}(-w_\xi \sin \gamma + w_\eta \cos \gamma) = \\
 & + -mgl - M_d \text{sign} \dot{\beta} - mlw.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Вихідні електричні сигнали в розглянутому гравіметрі з внутрішнім кардановим підвісом знімаються датчиками кута, що перетворюють кутові переміщення ротора відносно корпусу приладу. Тому перетворимо рівняння моментів (5) карданового кільця в складові вздовж осей ξ і η опорної системи координат. З рис. 1 випливає:

$$M_\xi = M_{xk} \cos \dot{\gamma}t; M_\eta = M_{xk} \sin \dot{\gamma}t, \tag{9}$$

а також врахуємо відомі рівності:

$$\sin^2 \gamma = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\gamma; \cos^2 \gamma = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\gamma; \sin \gamma \cos \gamma = \frac{1}{2} \sin 2\gamma.$$

Рівняння моментів кільця, що діють навколо осі ξ :

$$\begin{aligned}
 & I_{xk}(\frac{1}{2}\ddot{\beta}_1 + \frac{1}{2}\ddot{\beta}_1 \cos 2\gamma - \dot{\gamma}\dot{\beta}_1 \sin 2\gamma - \frac{1}{2}\dot{\gamma}^2 \beta_1 - \frac{1}{2}\dot{\gamma}^2 \beta_1 \cos 2\gamma + \frac{1}{2}\ddot{\alpha}_1 \sin 2\gamma + \dot{\gamma}\dot{\alpha}_1 + \\
 & + \dot{\gamma}\dot{\alpha}_1 \cos 2\gamma - \frac{1}{2}\dot{\gamma}^2 \alpha_1 \sin 2\gamma) + f_1(\frac{1}{2}\dot{\beta}_1 + \frac{1}{2}\dot{\beta}_1 \cos 2\gamma - \frac{1}{2}\dot{\gamma}\beta_1 \sin 2\gamma + \frac{1}{2}\dot{\alpha}_1 \sin 2\gamma + \\
 & + \frac{1}{2}\dot{\gamma}\alpha_1 + \frac{1}{2}\dot{\gamma}\alpha_1 \cos 2\gamma) + k_1(\frac{1}{2}\beta_1 + \frac{1}{2}\beta_1 \cos 2\gamma + \frac{1}{2}\alpha_1 \sin 2\gamma) + I_{xk}(\frac{1}{2}\dot{w}_\xi + \frac{1}{2}\dot{w}_\xi \cos 2\gamma + \\
 & + \frac{1}{2}\dot{w}_\xi \sin 2\gamma) + (I_{zk} - I_{yk})\dot{\gamma}^2(\frac{1}{2}\beta_1 + \frac{1}{2}\beta_1 \cos 2\gamma + \frac{1}{2}\alpha_1 \sin 2\gamma) + (I_{zk} - I_{yk})\dot{\gamma}w_\xi \times \\
 & \times (\beta_1 + \beta_1 \cos 2\gamma + \alpha_1 \sin 2\gamma) + (I_{zk} + I_{xk} - I_{yk})\dot{\gamma}(-\frac{1}{2}w_\xi \sin 2\gamma + \frac{1}{2}w_\eta + \frac{1}{2}w_\eta \cos 2\gamma) + \\
 & + mgl \cdot \cos \gamma + M_d \text{sign} \dot{\beta} \cdot \cos \gamma + mlw \cdot \cos \gamma = 0
 \end{aligned} \tag{10}$$

Аналогічне рівняння моментів, що діють навколо осі η :

$$\begin{aligned}
 & I_{xk}(\frac{1}{2}\ddot{\beta}_1 \sin 2\gamma - \dot{\gamma}\dot{\beta}_1 + \dot{\gamma}\dot{\beta}_1 \cos 2\gamma - \frac{1}{2}\dot{\gamma}^2 \beta_1 \sin 2\gamma + \frac{1}{2}\ddot{\alpha}_1 - \frac{1}{2}\ddot{\alpha}_1 \cos 2\gamma + \dot{\gamma}\dot{\alpha}_1 \sin 2\gamma - \\
 & - \frac{1}{2}\dot{\gamma}^2 \alpha_1 + \frac{1}{2}\dot{\gamma}^2 \alpha_1 \cos 2\gamma) + f_1(\frac{1}{2}\dot{\beta}_1 \sin 2\gamma - \frac{1}{2}\dot{\gamma}\beta_1 + \frac{1}{2}\dot{\gamma}\beta_1 \cos 2\gamma + \frac{1}{2}\dot{\alpha}_1 - \frac{1}{2}\dot{\alpha}_1 \cos 2\gamma + \\
 & + \frac{1}{2}\dot{\gamma}\alpha_1 \sin 2\gamma) + k_1(\frac{1}{2}\beta_1 \sin 2\gamma + \frac{1}{2}\alpha_1 - \frac{1}{2}\alpha_1 \cos 2\gamma) + I_{xk}(\frac{1}{2}\dot{w}_\xi \sin 2\gamma + \frac{1}{2}\dot{w}_\eta - \\
 & - \frac{1}{2}\dot{w}_\eta \cos 2\gamma) + (I_{zk} - I_{yk})\dot{\gamma}^2(\frac{1}{2}\beta_1 \sin 2\gamma + \frac{1}{2}\alpha_1 - \frac{1}{2}\alpha_1 \cos 2\gamma) + \\
 & + (I_{zk} - I_{yk})\dot{\gamma}w_\xi (\beta_1 \sin 2\gamma + \alpha_1 - \alpha_1 \cos 2\gamma) + (I_{zk} + I_{xk} - I_{yk})\dot{\gamma}(-\frac{1}{2}w_\xi + \\
 & + \frac{1}{2}w_\xi \cos 2\gamma + \frac{1}{2}w_\eta \sin 2\gamma) + mgl \cdot \sin \gamma + M_d \text{sign} \dot{\beta} \cdot \sin \gamma + mlw \cdot \sin \gamma = 0
 \end{aligned} \tag{11}$$

Якщо не враховувати члени, що змінюються з частотою $2\dot{\gamma}$, одержимо більш прості вирази:

$$\begin{aligned}
 & I_{xk}(\frac{1}{2}\ddot{\beta}_1 - \frac{1}{2}\dot{\gamma}^2 \beta_1 + \dot{\gamma}\dot{\alpha}_1) + f_1(\frac{1}{2}\dot{\beta}_1 + \frac{1}{2}\dot{\gamma}\alpha_1) + k_1 \frac{1}{2} \beta_1 + I_{xk} \frac{1}{2} \dot{w}_\xi + \\
 & + \frac{1}{2}(I_{zk} - I_{yk})\dot{\gamma}^2 \beta_1 + (I_{zk} - I_{yk})\dot{\gamma}w_\xi \beta_1 + \frac{1}{2}(I_{zk} + I_{xk} - I_{yk})\dot{\gamma}w_\eta + \\
 & + mgl \cdot \cos \gamma + M_d \text{sign} \dot{\beta} \cdot \cos \gamma + mlw \cdot \cos \gamma = 0
 \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2}I_{xk}(-2\dot{\gamma}\dot{\beta}_1 + \ddot{\alpha}_1 - \dot{\gamma}^2 \alpha_1) + \frac{1}{2}f_1(-\dot{\gamma}\beta_1 + \dot{\alpha}_1) + \frac{1}{2}k_1 \alpha_1 + \frac{1}{2}I_{xk}\dot{w}_\eta + \frac{1}{2}(I_{zk} - I_{yk})\dot{\gamma}^2 \alpha_1 + \\
 & + (I_{zk} - I_{yk})\dot{\gamma}w_\xi \alpha_1 - \frac{1}{2}(I_{zk} + I_{xk} - I_{yk})\dot{\gamma}w_\xi + mgl \cdot \sin \gamma + \\
 & + M_d \text{sign} \dot{\beta} \cdot \sin \gamma + mlw \cdot \sin \gamma = 0
 \end{aligned} \tag{13}$$

Рівняння руху ротора гравіметра

Рівняння руху ротора складемо також на підставі теореми моментів у осях XYZ – осях Регаля:

$$\begin{aligned} \frac{dK_x}{dt} + w_y K_z - w_z K_y &= M_x; \\ \frac{dK_y}{dt} + w_z K_x - w_x K_z &= M_y. \end{aligned} \quad (14)$$

Згідно з рис. 2:

$$\begin{aligned} w_x &= (\dot{\beta}_1 + w_\xi) \cos \alpha_1 + w_\eta \sin \alpha_1 \sin \beta_1 - w_\zeta \sin \alpha_1 \cos \beta_1 \approx \dot{\beta}_1 + w_\xi; \\ w_y &= \dot{\alpha}_1 + w_\eta \cos \beta_1 + w_\zeta \sin \beta_1 \approx \dot{\alpha}_1 + w_\eta; \\ w_z &= (\dot{\beta}_1 + w_\xi) \sin \alpha_1 - w_\eta \cos \alpha_1 \sin \beta_1 + w_\zeta \cos \alpha_1 \cos \beta_1 \approx w_\zeta. \end{aligned} \quad (15)$$

Тоді

$$\begin{aligned} K_x &= I_{xp} w_x \approx I_{xp} (\dot{\beta}_1 + w_\xi); \\ K_y &= I_{yp} w_y \approx I_{yp} (\dot{\alpha}_1 + w_\eta); \\ K_z &= I_{zp} (\dot{\gamma} + w_\zeta) \approx I_{zp} \dot{\gamma}. \end{aligned}$$

Позначимо $I_{xp} = I_{yp} = I_\epsilon; I_{zp} = I_0$, тоді

$$K_x = I_\epsilon (\dot{\beta}_1 + w_\xi); K_y = I_\epsilon (\dot{\alpha}_1 + w_\eta); K_z = I_0 \dot{\gamma}. \quad (16)$$

Підставивши (15) і (16) в (14), знайдемо:

$$\begin{aligned} I_\epsilon (\ddot{\beta}_1 + \dot{w}_\xi) + I_0 \dot{\gamma} (\dot{\alpha}_1 + w_\eta) - I_\epsilon (\dot{\alpha}_1 + w_\eta) w_\zeta &= M_x; \\ I_\epsilon (\ddot{\alpha}_1 + \dot{w}_\eta) + I_\epsilon (\dot{\beta}_1 + w_\xi) w_\zeta - I_0 \dot{\gamma} (\dot{\beta}_1 + w_\xi) &= M_y. \end{aligned}$$

Оскільки $w_\zeta \ll \dot{\gamma}$, зневажимо членами з співмножниками w_ζ . Одержимо:

$$\begin{aligned} I_\epsilon (\ddot{\beta}_1 + \dot{w}_\xi) + I_0 \dot{\gamma} (\dot{\alpha}_1 + w_\eta) &= M_x; \\ I_\epsilon (\ddot{\alpha}_1 + \dot{w}_\eta) - I_0 \dot{\gamma} (\dot{\beta}_1 + w_\xi) &= M_y. \end{aligned}$$

З урахуванням малості кутів α_1 і β_1 , замінімо в правих частинах останніх рівнянь M_x на M_ξ , а M_y на M_η , тобто представимо у вигляді:

$$\begin{aligned} I_\epsilon (\ddot{\beta}_1 + \dot{w}_\xi) + I_0 \dot{\gamma} (\dot{\alpha}_1 + w_\eta) &= M_\xi; \\ I_\epsilon (\ddot{\alpha}_1 + \dot{w}_\eta) - I_0 \dot{\gamma} (\dot{\beta}_1 + w_\xi) &= M_\eta. \end{aligned} \quad (17)$$

Складемо вирази моментів зовнішніх сил, що діють на ротор навколо осей ξ і η , тобто розкриємо M_ξ і M_η в рівняннях (17).

При повороті ротора на кут α навколо осі $Y_p(Y_k)$, що збігається з віссю зовнішніх торсионів, на ротор гравіметра будуть діяти момент сил пружності скручування зовнішніх торсионів – $k_2 \alpha$, момент сил демпфірування – $f_2 \dot{\alpha}$ й інші моменти зовнішніх сил $M_{yp}^{e.c.}$, тобто

$$M_{yp}^{e.c.} - k_2 \alpha - f_2 \dot{\alpha} = M_{yp}. \quad (18)$$

Виразимо в залежності (18) α і $\dot{\alpha}$ через α_1, β_1 , та їх похідні, скориставшись (6) і похідними від виразу (6):

$$M_{yp} = -k_2 (\alpha_1 \cos \gamma - \beta_1 \sin \gamma) - f_2 (\dot{\alpha}_1 \cos \gamma - \alpha_1 \dot{\gamma} \sin \gamma - \dot{\beta}_1 \sin \gamma - \beta_1 \dot{\gamma} \cos \gamma) + M_{yp}^{e.c.}.$$

Спроекуємо M_{yp} на осі ξ і η . Одержимо:

$$\begin{aligned} M_{\xi p} &= -M_{yp} \sin \gamma = k_2 (\alpha_1 \sin \gamma \cos \gamma - \beta_1 \sin^2 \gamma) + f_2 (\dot{\alpha}_1 \sin \gamma \cos \gamma - \alpha_1 \dot{\gamma} \sin^2 \gamma - \\ &\quad - \dot{\beta}_1 \sin^2 \gamma - \beta_1 \dot{\gamma} \sin \gamma \cos \gamma) - M_{yp}^{e.c.} \sin \gamma; \\ M_{\eta p} &= M_{yp} \cos \gamma = -k_2 (\alpha_1 \cos^2 \gamma - \beta_1 \sin \gamma \cos \gamma) - f_2 (\dot{\alpha}_1 \cos^2 \gamma - \alpha_1 \dot{\gamma} \sin \gamma \cos \gamma - \\ &\quad - \dot{\beta}_1 \sin \gamma \cos \gamma - \beta_1 \dot{\gamma} \cos^2 \gamma) + M_{yp}^{e.c.} \cos \gamma, \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} M_{\xi p} &= k_2 \left(\frac{1}{2} \alpha_1 \sin 2\gamma - \frac{1}{2} \beta_1 + \frac{1}{2} \beta_1 \cos 2\gamma \right) + f_2 \left(\frac{1}{2} \dot{\alpha}_1 \sin 2\gamma - \frac{1}{2} \alpha_1 \dot{\gamma} + \frac{1}{2} \alpha_1 \dot{\gamma} \cos 2\gamma - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \dot{\beta}_1 + \frac{1}{2} \dot{\beta}_1 \cos 2\gamma - \frac{1}{2} \beta_1 \dot{\gamma} \sin 2\gamma \right) - M_{yp}^{e.c.} \sin \gamma; \end{aligned} \quad (19)$$

$$M_{np} = -k_2 \left(\frac{1}{2} \alpha_1 + \frac{1}{2} \alpha_1 \cos 2\gamma - \frac{1}{2} \beta_1 \sin 2\gamma \right) - f_2 \left(\frac{1}{2} \dot{\alpha}_1 + \frac{1}{2} \dot{\alpha}_1 \cos 2\gamma - \frac{1}{2} \alpha_1 \dot{\gamma} \sin 2\gamma - \frac{1}{2} \dot{\beta}_1 \sin 2\beta - \frac{1}{2} \beta_1 \dot{\gamma} - \frac{1}{2} \beta_1 \dot{\gamma} \cos 2\gamma + M_{yp}^{e.c.} \cos \gamma \right).$$

Знехтуємо, як і раніше, складовими моментів, що змінюються з подвійною частотою обертання ротора. Одержимо наступний вираз:

$$\begin{aligned} M_{\xi p}^* &= -\frac{1}{2} k_2 \beta_1 - \frac{1}{2} f_2 \alpha_1 \dot{\gamma} - \frac{1}{2} f_2 \dot{\beta}_1 - M_{yp}^{e.c.} \sin \gamma; \\ M_{\eta p}^* &= -\frac{1}{2} k_2 \alpha_1 - \frac{1}{2} f_2 \dot{\alpha}_1 + \frac{1}{2} f_2 \beta_1 \dot{\gamma} + M_{yp}^{e.c.} \cos \gamma. \end{aligned} \tag{20}$$

Розглянемо інші складові моментів зовнішніх сил, що діють навколо осі Y_p підвісу ротора. Крім моменту сил демпфірування $f_2 \dot{\alpha}$, на ротор діє складова моменту сил аеродинамічного опору, що залежить від частоти $\dot{\gamma}$ обертання приводного двигуна, а отже і ротора, і кута α повороту ротора.

Розклавши момент приводного двигуна M_ζ^0 , який спрямований уздовж осі ζ приводного вала, на дві ортогональні складові: складову $M_\zeta \cos \alpha$ уздовж осі Z_p і складову $-M_\zeta \sin \alpha$ уздовж негативного напрямку осі X_p . Перша витрачається на підтримку обертання ротора (подолання аеродинамічних сил при обертанні ротора, подолання сил в'язкого опору в підшипниках приводного вала і т. ін.). Друга складова впливає на рух ротора. Для ротора вона є моментом зовнішньої сили.

Спроекуємо складову $-M_\zeta^0 \sin \alpha$ на осі ξ і η системи координат, що не обертається. При цьому приймемо $\sin \alpha = \alpha$, $\cos \alpha = 1$. Одержимо:

$$M_\xi^0 = -M_\zeta^0 \alpha \cos \gamma; M_\eta^0 = -M_\zeta^0 \alpha \sin \gamma. \tag{21}$$

Виразимо кут α згідно з (3) через α_1 , β_1 , тоді

$$\begin{aligned} M_\xi^0 &= -M_\zeta^0 (\alpha_1 \cos \gamma - \beta_1 \sin \gamma) \cos \gamma = -M_\zeta^0 (\alpha_1 \cos^2 \gamma - \beta_1 \sin \gamma \cos \gamma) = \\ &= -M_\zeta^0 \left(\frac{1}{2} \alpha_1 + \frac{1}{2} \alpha_1 \cos 2\gamma - \frac{1}{2} \beta_1 \sin 2\gamma \right); \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} M_\eta^0 &= -M_\zeta^0 (\alpha_1 \cos \gamma - \beta_1 \sin \gamma) \sin \gamma = -M_\zeta^0 (\alpha_1 \sin \gamma \cos \gamma - \beta_1 \sin^2 \gamma) = \\ &= -M_\zeta^0 \left(\frac{1}{2} \alpha_1 \sin 2\gamma - \frac{1}{2} \beta_1 + \frac{1}{2} \alpha_1 \cos 2\gamma \right). \end{aligned} \tag{23}$$

Після відкидання в (22) і (23) членів, що змінюються з частотою $2\dot{\gamma}$, складові, що повільно змінюються, будуть:

$$M_\xi^{\partial*} = -\frac{1}{2} M_\zeta^0 \alpha_1; M_\eta^{\partial*} = \frac{1}{2} M_\zeta^0 \beta_1. \tag{24}$$

Представимо M_ζ^0 в (21) у вигляді добутку деякого коефіцієнта M_ζ^0 на $\dot{\gamma}$, тобто у вигляді $M_\zeta^0 = M_\zeta^0 \dot{\gamma}$. Тоді

$$M_\xi^{\partial*} = -\frac{1}{2} M_\zeta^0 \dot{\gamma} \alpha_1; M_\eta^{\partial*} = \frac{1}{2} M_\zeta^0 \dot{\gamma} \beta_1. \tag{25}$$

Врахуємо ще моменти зовнішніх сил $M_\xi^{e.c.}$ і $M_\eta^{e.c.}$, що діють безпосередньо навколо осей ξ і η . Наприклад, моменти, що розвиваються датчиками моменту або моменти магнітного тяжіння датчиків кута, що перетворюють кути α_1 , β_1 повороту ротора в електричні сигнали.

Підставивши в (17) вирази складових M_ξ і M_η згідно з (20), (23), (24), одержимо наступні рівняння руху ротора (без врахування вібраційних складових, що змінюються з частотою $2\dot{\gamma}$) відносно осей ξ і η :

$$\begin{aligned} I_\epsilon (\ddot{\beta}_1 + \dot{w}_\xi) + I_0 \dot{\gamma} (\dot{\alpha}_1 + w_\eta) + \frac{1}{2} k_2 \beta_1 + \frac{1}{2} f_2 \dot{\gamma} \alpha_1 + \frac{1}{2} f_2 \dot{\beta}_1 + \frac{1}{2} M_\zeta^0 \dot{\gamma} \alpha_1 = \\ = -M_{yp}^{e.c.} \sin \gamma + M_\xi^{e.c.}; \end{aligned} \tag{26}$$

$$I_{\epsilon}(\ddot{\alpha}_1 + \dot{w}_{\eta}) - I_0\dot{\gamma}(\dot{\beta}_1 + w_{\zeta}) + \frac{1}{2}k_2\alpha_1 + \frac{1}{2}f_2\dot{\alpha}_1 - \frac{1}{2}f_2\dot{\gamma}\beta_1 - \frac{1}{2}M_{\zeta}^0\dot{\gamma}\beta_1 = \\ = M_{yp}^{e.c.} \cos \gamma + M_{\eta}^{e.c.}.$$

Рівняння руху гравіметра з внутрішнім кардановим підвісом

Для одержання рівнянь моментів усієї рухомої частини розглянутого ДГ з внутрішнім кардановим підвісом в осях ξ і η разом з приводним валом і ротором (без врахування гармонійних складових, що змінюються з частотою $2\dot{\gamma}$) складемо рівняння моментів (13) карданового кільця і (26) – ротора гравіметра. Одержимо рівняння моментів навколо осі ξ :

$$(I_{\epsilon} + \frac{1}{2}I_{xk})\ddot{\beta}_1 + \frac{1}{2}(f_1 + f_2)\dot{\beta}_1 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)\beta_1 - \frac{1}{2}(I_{xk} + I_{yk} - I_{zk})\dot{\gamma}^2\beta_1 \\ + \frac{1}{2}(f_1 + f_2)\dot{\gamma}\alpha_1 + (I_0 + I_{xk})\dot{\gamma}\dot{\alpha}_1 + \frac{1}{2}M_{\zeta}^0\dot{\gamma}\alpha_1 = \\ = - \left[I_0 + \frac{1}{2}(I_{zk} + I_{xk} - I_{yk}) \right] \dot{\gamma}w_{\eta} - (I_{zk} - I_{yk})\dot{\gamma}w_{\zeta}\beta_1 - (I_{\epsilon} + \frac{1}{2}I_{xk})\dot{w}_{\xi} - \\ - M_{yp}^{e.c.} \sin \gamma + M_{\zeta}^{e.c.} - mgl \cdot \cos \gamma - M_d \text{sign} \dot{\beta} \cdot \cos \gamma - mlw \cdot \cos \gamma.$$

Аналогічне рівняння моментів навколо осі η :

$$(I_{\epsilon} + \frac{1}{2}I_{xk})\ddot{\alpha}_1 + \frac{1}{2}(f_1 + f_2)\dot{\alpha}_1 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)\alpha_1 - \frac{1}{2}(I_{xk} + I_{yk} - I_{zk})\dot{\gamma}^2\alpha_1 - \\ - \frac{1}{2}(f_1 + f_2 + M_{\zeta}^0)\dot{\gamma}\beta_1 - (I_0 + I_{xk})\dot{\gamma}\dot{\beta}_1 = \left[I_0 + \frac{1}{2}(I_{zk} + I_{xk} - I_{yk}) \right] \dot{\gamma}w_{\zeta} - \\ - (I_{zk} - I_{yk})\dot{\gamma}w_{\zeta}\alpha_1 - (I_{\epsilon} + \frac{1}{2}I_{xk})\dot{w}_{\eta} + M_{yp}^{e.c.} \cos \gamma + M_{\eta}^{e.c.} - mgl \cdot \sin \gamma - \\ - M_d \text{sign} \dot{\beta} \cdot \sin \gamma - mlw \cdot \sin \gamma.$$

Висновки: отримано рівняння руху нового двокільцевого динамічно настроюваного гравіметра з внутрішнім кардановим підвісом. Такий гравіметр має більшу швидкодію, точність та менші габарити порівняно з іншими авіаційними гравіметрами. В подальшому доцільно дослідити динамічні та статичні похибки ДГ, втому числі на ЕОМ та експериментально. Новизна отриманих результатів підтверджується заявкою на винахід [9].

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Безвесільна О.М.* Вимірювання прискорень: Підручник. – К.: Либідь, 2001. – 264.
2. *Пельпор Д.С., Матвеев В.С., Арсентьев В.Д.* Динамически настраиваемые гироскопы: Теория и конструкция. – М.: Машиностроение, 1998. – 264 с.
3. *Безвесільна О.М., Коробійчук І.В.* Сучасні тенденції розвитку авіаційних гравіметрів // Восточно-европейский журнал передовых технологий. – 2006. – № 19. – С. 137–139.
4. *Сагитов М.У.* Приборы и методы обработки гравиинерциальных измерений: Сб. статей. – М.: ИФЗ АН СССР, 1984. – 192 с.
5. *Сагитов М.У.* Гравиинерциальные исследования. – М.: Наука, 1983. – 260 с.
6. *Безвесільна О.М.* Про підвищення точності вимірювань прискорення сили тяжіння // Прикладна механіка. – 1995. – № 4. – С. 92–96.
7. *Пуцина Л.З.* Измерения с гравиметром на самолете в США // Изв. вузов / Геодезия и аэрофотосъемка. – № 1. – М., 1962. – С. 123–130.
8. *Одинцов А.А.* Теория и расчет гироскопических приборов. – К.: Выща школа, 1985. – 392 с.
9. *Безвесільна О.М., Коробійчук І.В., Нечай С.О., Подчашиньский Ю.О.* Заявка на винахід № а 200505440 від 07.06.2005.

КОРОБІЙЧУК Ігор Вацлавович – аспірант кафедри автоматизованих і комп'ютерних технологій Житомирського державного технологічного університету.
– гравіметра.