УДК 629.7.054

В.М. Мельник, к.т.н., доц.
В.В. Карачун, д.т.н., проф.
Національний технічний університет України “КПІ”

НЕВІСЕСИМЕТРИЧНИЙ ВИПАДОК ПРУЖНОЇ ДЕФОРМАЦІЇ ПОПЛАВЦЯ ГІРОСКОПА

Проводиться аналіз пружних коливань поверхні поплавця під дією зовнішніх хвильових чинників довільної фізичної природи. Формулюються наукові засади обчислення основних частот примусових коливань без аналізу ступеня впливу перехресного пружного руху.

Постановка проблеми. Поплавкові прилади, зокрема двоступеневі гіроскопи, знайшли досить широке використання в системах керування рухом літальних апаратів завдяки рідинно-статичному підвісу, що суттєво зменшує похибки вимірювань шляхом нівелювання сухого тертя на вихідній осі. Як з’ясувалося, цей шлях підвищення точності має свої вади, а саме: проникаюче акустичне випромінювання з боку рушійних установок докорінно змінює динаміку приладів, особливо у сукупності з іншими чинниками – силовим збудженням, кінематичним, тепловим факелом тощо. Наявність рідинно-фазної складової підвісу гіроскопа дозволяє звуковим хвилям з мінімальними втратами пройти всередину приладу.

Генерована в підвісі акустична вібрація може бути значно зменшена пасивними методами, зокрема застосуванням геометрії поплавця з ненульовою Гаусовою кривизною. Глибокий аналіз явища дозволить також більш ґрунтовно обрати той чи інший варіант лінії меридіану рухомої частини, виявити особливості локального типу.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Наявні результати наукових досліджень динаміки бортової апаратури серії ДУСУ, ДУСМ тощо, що виготовляється промисловістю, не містять даних впливу на прилади керування акустичного збурення вище 130 *дБ*, яке зазначене в паспортах. Це не відповідає реаліям натурних умов. Наприклад в районі реактивного струменя сучасних ракет-носіїв рівень акустичного тиску сягає 180 *дБ* і вище з досить широким спектром частот [1, 2]. Це призводить до значних змін динаміки бортової апаратури. В деяких випадках некоректовані прилади навіть втрачають ступені вільності [3, 4, 5, 6].

Найбільш привабливими щодо глибокого аналізу постають поліагрегатні структури навігаційно-пілотажного обладнання [7].

Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми. Важливим для практики постає випадок невісесиметричної пружної деформації рухомої частини поплавкового гіроскопа за умови дії зовнішнього збудження просторового характеру довільної фізичної природи. Тому має сенс розв’язувати проблему у загальному вигляді з окресленням можливих часткових рішень. Автори обрали за зовнішній чинник акустичне випромінювання як найбільш важливий в рамках вирішуваних задач.

Неабиякий інтерес являє собою обчислення парціальних частот складових коливання поплавця з наступним аналізом перехресного впливу двох інших. Це надасть можливість глибокого осмислення явища, отже і боротьби з наслідками його прояву.

Метою досліджень постає намір сформулювати наближені методи інтегрування рівнянь поплавця гіроскопу з ненульовою Гаусовою кривизною бічної поверхні. Метод викладається у найбільш узагальненому вигляді, що дозволяє одержати часткові випадки. Спочатку проводиться процедура розділення змінних у рівняннях за допомогою метода Фур’є, а потім використовується метод Бубнова-Гальоркіна.

Основний матеріал досліджень. Оскільки поплавець розглядається як замкнена оболонка обертання, тому в напрямку паралелі слід очікувати періодичності силових та кінематичних полів, тобто їх залежність певним чином від періодичних функцій виду $\cos k\varphi$ чи $\sin k\varphi$ ($k = 0,\ 1,\ \ldots$). У свою чергу, зовнішнє динамічне навантаження за всіма трьома напрямками може бути необов’язково періодичним за координатою φ. Але збудження

$$q_i^* = q_i^*\left(t, z, \varphi\right), \quad i = \overline{1,\ 3}$$

завжди можна, хоча б формально, навести у вигляді рядів Фур’є за параметром φ.

Тому приймаємо, що

$$q_i^* = q_i^*\left(t, z, \varphi\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left[q_{ik}^{(1)}\left(t, z\right)\cos k\varphi + q_{ik}^{(2)}\left(t, z\right)\sin k\varphi\right],\ i = \overline{1,\ 3}. \tag{1}$$

Пружні деформації поверхні поплавця $U_z = U_z(t, z, \varphi)$, $U_\varphi = U_\varphi(t, z, \varphi)$, $W = W(t, z, \varphi)$ спочатку наведемо наступним чином:

$$U_z = \sum_{k=0}^{\infty}\left[U_{z,k}^{(1)}(t,z)\cos k\varphi + U_{z,k}^{(2)}(t,z)\sin k\varphi\right];$$
$$U_\varphi = \sum_{k=0}^{\infty}\left[U_{\varphi,k}^{(1)}(t,z)\sin k\varphi + U_{\varphi,k}^{(2)}(t,z)\cos k\varphi\right]; \qquad (2)$$
$$W = \sum_{k=0}^{\infty}\left[W_k^{(1)}(t,z)\cos k\varphi + W_k^{(2)}(t,z)\sin k\varphi\right].$$

Рівняння повздовжних пружних переміщень поверхні поплавця мають вигляд:

$$\frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} - a_1(2z-1)\frac{\partial U_z}{\partial z} - a_2 U_z + a_3\frac{\partial^2 U_\varphi}{\partial z \partial \varphi} - a_4\frac{\partial W}{\partial z} =$$
$$= -\left[1+\alpha_1(2z-1)^2\right]q_1^* + \left[1+\alpha_1(2z-1)^2\right]\overset{*}{\alpha}{}^2\frac{\partial^2 U_z}{\partial t^2}. \qquad (3)$$

Звідси, для випадку антисиметричної, тобто невісесиметричної деформації $(k = 1)$, одержуємо:

$\underline{\cos\varphi}$:

$$\frac{\partial^2 U_{z,1}^{(1)}}{\partial z^2} - a_1(2z-1)\frac{\partial U_{z,1}^{(1)}}{\partial z} - a_2 U_{z,1}^{(1)} + a_3\frac{\partial U_{\varphi,1}^{(1)}}{\partial z} - a_4\frac{\partial W_1^{(1)}}{\partial z} =$$
$$= -\left[1+\alpha_1(2z-1)^2\right]q_{1,1}^{(1)}(z,t) + \overset{*}{\alpha}{}^2\left[1+\alpha_1(2z-1)^2\right]\frac{\partial^2 U_{z,1}^{(1)}}{\partial t^2}\quad; \qquad (4)$$

$\underline{\sin\varphi}$:

$$\frac{\partial^2 U_{z,1}^{(2)}}{\partial z^2} - a_1(2z-1)\frac{\partial U_{z,1}^{(2)}}{\partial z} - a_2 U_{z,1}^{(2)} - a_3\frac{\partial U_{\varphi,1}^{(2)}}{\partial z} - a_4\frac{\partial W_1^{(2)}}{\partial z} =$$
$$= -\left[1+\alpha_1(2z-1)^2\right]q_{1,1}^{(2)}(z,t) + \overset{*}{\alpha}{}^2\left[1+\alpha_1(2z-1)^2\right]\frac{\partial^2 U_{z,1}^{(2)}}{\partial t^2}, \qquad (5)$$

де $a_1 = 4(1+2\nu)\dfrac{\delta}{R(1+\zeta)}$; $a_2 = 8\nu\dfrac{\delta}{R(1+\zeta)}$; $a_3 = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1+\nu}{1+\zeta}\cdot\dfrac{l}{R}$; $a_4 = \dfrac{\mu+\nu}{1+\zeta}\cdot\dfrac{h}{R}$;

$q_1^* = (1-\nu^2)\cdot\dfrac{q_1 l^2}{\mathrm{E}h^2}$; $\overset{*}{\alpha}{}^2 = (1-\nu^2)\cdot\dfrac{\rho\omega_0^2 l^2}{\mathrm{E}h^2}$; $\alpha_1 = \dfrac{2\mu\delta}{R(1+\zeta)}$; $q_1^* = q_{1,1}^{(1)}\cos\varphi + q_{1,1}^{(2)}\sin\varphi$; $\zeta = \dfrac{\delta}{R}$;

$\mu = 8\zeta(1+\zeta)\eta^2$; $\eta = \dfrac{R}{l}$; ρ – щільність матеріалу; Е – модуль Юнга; ν – коефіцієнт Пуасона; R, l – радіус і довжина поплавця; $\pm\delta$ – опуклість оболонки.

Доповнимо ці рівняння відповідними граничними умовами. Для рівняння (4) –

на краю $z = 0$:

$$L_{11}U_{z,1}^{(1)}\Big|_{z=0} + L_{12}^{(k)}U_{\varphi,1}^{(1)}\Big|_{z=0} - L_{13}W_1^{(1)}\Big|_{z=0} = 0, \qquad (6)$$

де $L_{11} = \dfrac{\partial}{\partial z} + \dfrac{4\nu}{1+\zeta}\cdot\dfrac{\delta}{R}$; $L_{12}^{(k)} = \dfrac{\nu}{1+\zeta}\cdot\dfrac{l}{R}k$; $L_{13} = \dfrac{\mu+\nu}{1+\zeta}\cdot\dfrac{l}{R}$;

на краю $z = 1$:

$$N_{11}U_{z,1}^{(1)}\Big|_{z=1} + N_{12}^{(k)}U_{\varphi,1}^{(1)}\Big|_{z=1} - N_{13}W_1^{(1)}\Big|_{z=1} = 0, \qquad (7)$$

де $N_{11} = \dfrac{\partial}{\partial z} - \dfrac{4\nu}{1+\zeta}\cdot\dfrac{\delta}{R}$; $N_{12}^{(k)} = \dfrac{\nu}{1+\zeta}\cdot\dfrac{l}{R}k$; $N_{13} = \dfrac{\mu+\nu}{1+\zeta}\cdot\dfrac{l}{R}$.

Для рівняння (5) –

на краю $z = 0$:

$$L_{11}U_{z,1}^{(2)}\Big|_{z=0} - L_{12}^{(k)}U_{\varphi,1}^{(2)}\Big|_{z=0} - L_{13}W_1^{(2)}\Big|_{z=0} = 0; \qquad (8)$$

на краю ё:

$$N_{11}U_{z,1}^{(2)}\Big|_{z=1} - N_{12}^{(k)}U_{\varphi,1}^{(2)}\Big|_{z=1} - N_{13}W_1^{(2)}\Big|_{z=1} = 0. \qquad (9)$$

Рівняння колових пружних переміщень поверхні підвісу гіроскопа мають вигляд:

$$\frac{\partial^2 U_\varphi}{\partial \varphi^2} + b_1\left[1-\beta_1\left(2z-1\right)^2\right]\frac{\partial^2 U_z}{\partial z \partial \varphi} - b_2\left[1-2\beta_1\left(2z-1\right)^2\right]\frac{\partial^2 U_\varphi}{\partial z^2} -$$

$$-\beta_3\left(2z-1\right)\frac{\partial U_\varphi}{\partial z} - \beta_4\left(2z-1\right)\frac{\partial U_z}{\partial \varphi} + \beta_5 U_\varphi - \beta_6\frac{\partial W}{\partial \varphi} =$$

$$= -\left[1-\beta_3\left(2z-1\right)^2\right]q_2^* + \overset{*}{\beta}{}^2\left[1-\beta_3\left(2z-1\right)^2\right]\frac{\partial^2 U_\varphi}{\partial t^2}. \qquad (10)$$

Для невісесиметричної деформації звідсіль одержуємо:

$\underline{\sin\varphi}$:

$$-U_{\varphi,1}^{(1)} - b_1\left[1-\beta_1\left(2z-1\right)^2\right]\frac{\partial U_{z,1}^{(1)}}{\partial z} - \beta_2\left[1-2\beta_1\left(2z-1\right)^2\right]\frac{\partial^2 U_{\varphi,1}^{(1)}}{\partial z^2} =$$

$$-\beta_3\left(2z-1\right)\frac{\partial U_{\varphi,1}^{(1)}}{\partial z} + \beta_4\left(2z-1\right)U_{z,1}^{(1)} + \beta_5 U_{\varphi,1}^{(1)} + \beta_6 W_1^{(1)} =$$

$$= -\left[1-\beta_3\left(2z-1\right)^2\right]q_{2,1}^{(2)}\left(t,z\right) + \overset{*}{\beta}{}^2\left[1-\beta_3\left(2z-1\right)^2\right]\frac{\partial^2 U_{\varphi,1}^{(1)}}{\partial t^2}; \qquad (11)$$

$\underline{\cos\varphi}$:

$$-U_{\varphi,1}^{(2)} - b_1\left[1-\beta_1\left(2z-1\right)^2\right]\frac{\partial^2 U_{z,1}^{(2)}}{\partial z^2} - b_2\left[1-2\beta_1\left(2z-1\right)^2\right]\frac{\partial^2 U_{\varphi,1}^{(2)}}{\partial z^2} -$$

$$-b_3\left(2z-1\right)\frac{\partial U_{\varphi,1}^{(2)}}{\partial z} - b_4\left(2z-1\right)U_{z,1}^{(2)} + b_5 U_{\varphi,1}^{(1)} - b_6 W_1^{(2)} =$$

$$= -\left[1+\beta_3\left(2z-1\right)^2\right]q_{2,1}^{(1)}\left(t,z\right) + \overset{*}{\beta}{}^2\left[1-\beta_3\left(2z-1\right)^2\right]\frac{\partial^2 U_{\varphi,1}^{(2)}}{\partial t^2}. \qquad (12)$$

де $b_1 = \frac{1}{2}\left(1+\nu\right)\left(1+\zeta\right)\frac{R}{l}$; $b_2 = \frac{1}{2}\left(1-\nu\right)\left(1+\zeta\right)^2\frac{R^2}{l^2}$; $b_3 = 2\left(1-\nu\right)\left(1+\mu\right)\left(1+\zeta\right)\frac{\delta R}{l^2}$;

$b_4 = 2\left(3-\nu\right)\frac{\delta}{l}$; $b_5 = 4\left(1-\nu\right)\left(1+\zeta\right)\frac{\delta R}{l^2}$; $b_6 = 1+\mu\nu$; $\beta_1 = \frac{1+\mu}{1+\zeta}\cdot\frac{\delta}{R}$; $\beta_2 = 2\frac{1+\mu}{1+\zeta}\cdot\frac{\delta}{R}$;

$\beta_3 = \frac{1}{1+\zeta}\cdot\frac{\delta}{R}$; $q_2^* = \left(1-\nu^2\right)\cdot\frac{R^2\left(1+\zeta\right)^2}{\mathrm{E}h^2}q_2$; $\overset{*}{\beta}{}^2 = \left(1-\nu^2\right)\cdot\frac{\omega_0^2\rho}{\mathrm{E}}R^2\left(1+\zeta\right)^2$; $q_2^* = q_{2,1}^{(1)}\sin\varphi + q_{2,1}^{(2)}\cos\varphi$.

Доповнимо цю групу відповідними граничними умовами. Для рівняння (11) –

на краю $z=0$

$$-L_{21}^{(k)}U_{z,1}^{(1)}\Big|_{z=0} + L_{22}U_{\varphi,1}^{(1)}\Big|_{z=0} = 0, \qquad (13)$$

де $L_{21}^{(k)} = \frac{1}{1+\zeta}k\frac{l}{R}$; $L_{22} = \frac{\partial}{\partial z} - \frac{4\nu}{1+\zeta}\cdot\frac{\delta}{R}$;

на краю $z=1$

$$\frac{\partial U_{\varphi,1}^{(1)}}{\partial z}\Bigg|_{z=1} - \frac{1}{1+\zeta}\cdot\frac{l}{R}kU_{z,1}^{(1)}\Bigg|_{z=1} + \frac{4}{1+\zeta}\cdot\frac{\delta}{R}U_{\varphi,1}^{(1)}\Bigg|_{z=1} = 0. \qquad (14)$$

Для рівняння (12) –

на краю $z=0$

$$\frac{\partial U_{\varphi,1}^{(2)}}{\partial z}\Bigg|_{z=0} + \frac{1}{1+\zeta}\cdot\frac{l}{R}kU_{z,1}^{(2)}\Bigg|_{z=0} - \frac{4}{1+\zeta}\cdot\frac{\delta}{R}U_{\varphi,1}^{(2)}\Bigg|_{z=0} = 0; \qquad (15)$$

на краю $z=1$

$$\frac{\partial U_{\varphi,1}^{(2)}}{\partial z}\Bigg|_{z=1} + \frac{1}{1+\zeta}\cdot\frac{l}{R}kU_{z,1}^{(2)}\Bigg|_{z=1} + \frac{4}{1+\zeta}\cdot\frac{\delta}{R}U_{\varphi,1}^{(2)}\Bigg|_{z=1} = 0. \qquad (16)$$

Рівняння радіальних пружних переміщень поверхні поплавця гіроскопа мають вигляд:

$$\left[-1+\beta_4\left(2z-1\right)^2\right]\frac{\partial^4 W}{\partial z^4} - c_1\frac{\partial^4 W}{\partial z^2\partial\varphi^2} - c_2\frac{\partial^4 W}{\partial\varphi^4} + c_3\left(2z-1\right)\frac{\partial^3 W}{\partial z^3} - c_4\frac{\partial^3 W}{\partial z\partial\varphi^2} +$$

$$+c_5\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}-c_6\frac{\partial^2 W}{\partial\varphi^2}-c_7(2z-1)\frac{\partial W}{\partial z}-c_8\frac{\partial^3 U_\varphi}{\partial\varphi^3}-c_9\frac{\partial^3 U_\varphi}{\partial z^2\partial\varphi}-c_{10}\frac{\partial^3 U_z}{\partial z\partial\varphi^2}+$$

$$+c_{11}(2z-1)\frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2}+c_{12}(2z-1)\frac{\partial^2 U_\varphi}{\partial z\partial\varphi}+c_{13}\frac{\partial U_z}{\partial z}+c_{14}\frac{\partial U_\varphi}{\partial\varphi}-c_{15}(2z-1)U_z=$$

$$=\left[1-\beta_5(2z-1)\right]q_3^*+\overset{*}{\gamma}{}^2\left[1-\beta_5(2z-1)\right]\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}. \qquad (17)$$

Для випадку невісесиметричної деформації із (17) одержуємо:

$\underline{\cos k\varphi}$:

$$\left[-1+\beta_4(2z-1)^2\right]\frac{\partial^4 W_1^{(1)}}{\partial z^4}+c_1\frac{\partial^2 W_1^{(1)}}{\partial z^2}-c_2W_1^{(1)}+c_3(2z-1)\frac{\partial^3 W_1^{(1)}}{\partial z^3}+c_4\frac{\partial^2 W_1^{(1)}}{\partial z^2}$$

$$+c_5\frac{\partial^2 W_1^{(1)}}{\partial z^2}+c_6W_1^{(1)}-c_7(2z-1)\frac{\partial W_1^{(1)}}{\partial z}+c_8U_{\varphi,1}^{(1)}-c_9\frac{\partial^2 U_{\varphi,1}^{(1)}}{\partial z^2}+c_{10}\frac{\partial U_{z,1}^{(1)}}{\partial z}+$$

$$+c_{11}(2z-1)\frac{\partial^2 U_{z,1}^{(1)}}{\partial z^2}+c_{12}(2z-1)\frac{\partial U_{\varphi,1}^{(1)}}{\partial z}+c_{13}\frac{\partial U_{z,1}^{(1)}}{\partial z}+c_{14}U_{\varphi,1}^{(1)}-c_{15}(2z-1)U_{z,1}^{(1)}=$$

$$=\left[1-\beta_5(2z-1)\right]q_{3,1}^{(1)}(z,t)+\overset{*}{\gamma}{}^2\left[1-\beta_5(2z-1)\right]\frac{\partial^2 W_1^{(1)}}{\partial t^2}; \qquad (18)$$

$\underline{\sin k\varphi}$:

$$\left[-1+\beta_4(2z-1)^2\right]\frac{\partial^4 W_1^{(2)}}{\partial z^4}+c_1\frac{\partial^2 W_1^{(2)}}{\partial z^2}-c_2W_1^{(2)}+c_3(2z-1)\frac{\partial^3 W_1^{(2)}}{\partial z^3}+c_4\frac{\partial^2 W_1^{(2)}}{\partial z^2}+$$

$$+c_5\frac{\partial^2 W_1^{(2)}}{\partial z^2}+c_6W_1^{(2)}-c_7(2z-1)\frac{\partial W_1^{(2)}}{\partial z}-c_8U_{\varphi,1}^{(2)}+c_9\frac{\partial^2 U_{\varphi,1}^{(2)}}{\partial z^2}+c_{10}\frac{\partial U_{z,1}^{(2)}}{\partial z}+$$

$$+c_{11}(2z-1)\frac{\partial^2 U_{z,1}^{(2)}}{\partial z^2}-c_{12}(2z-1)\frac{\partial U_{\varphi,1}^{(2)}}{\partial z}+c_{13}\frac{\partial U_{z,1}^{(2)}}{\partial z}-c_{14}U_{\varphi,1}^{(2)}-c_{15}(2z-1)U_{z,1}^{(2)}=$$

$$=\left[1-\beta_5(2z-1)\right]q_{3,1}^{(2)}(z,t)+\overset{*}{\gamma}{}^2\left[1-\beta_5(2z-1)\right]\frac{\partial^2 W_1^{(2)}}{\partial t^2}, \qquad (19)$$

де $c_1=\frac{2}{(1+\zeta)^2}\cdot\frac{l^2}{R^2}$; $c_2=\frac{1}{(1+\zeta)^4}\cdot\frac{l^4}{R^4}$; $c_3=8\frac{1+3\mu}{1+\zeta}\cdot\frac{\delta}{R}$; $c_4=4\frac{(1-\nu)(3-\mu)}{(1+\zeta)^3}\cdot\frac{\delta}{R}\cdot\frac{l^2}{R^2}$;

$c_5=8\frac{(1+\nu+4\mu)}{(1+\zeta)}\cdot\frac{\delta}{R}\cdot$; $c_6=16\frac{(1-\nu)}{(1+\zeta)^3}\cdot\frac{\delta}{R}\cdot\frac{l^2}{R^2}$; $c_7=\frac{32\mu(\nu+\mu)}{(1+\zeta)^2}\cdot\frac{\delta^2}{R^2}$; $c_8=\frac{1}{(1+\zeta)^4}\cdot\frac{\delta^4}{R^4}$;

$c_9=\frac{(1-\nu)}{(1+\zeta)^2}\cdot\frac{l^2}{R^2}$; $c_{10}=\frac{\nu\mu}{(1+\zeta)^3}\cdot\frac{l^3}{R^3}$; $c_{11}=\frac{4\mu^2}{(1+\zeta)^2}\cdot\frac{\delta}{R}\cdot\frac{l}{R}$; $c_{12}=\frac{4\mu(1-\nu)(3-\mu)}{(1+\zeta)^3}\cdot\frac{\delta}{R}\cdot\frac{l^2}{R^2}$;

$c_{13}=12(\nu+\mu)\cdot\frac{\delta^3}{Rh^2}$; $c_{14}=12\frac{1+\nu\mu}{(1+\zeta)^2}\cdot\frac{l^4}{R^2h^2}$; $c_{15}=\frac{4(1+\nu\mu)}{(1+\zeta)^2}\cdot\frac{\delta}{R}\cdot\frac{12l^3}{Rh^2}$; $\beta_4=\frac{1+2\mu}{1+\zeta}\cdot\frac{\delta}{R}$;

$\beta_5=\frac{1-\mu}{1+\zeta}\cdot\frac{\delta}{R}$.

Надалі доповнимо цю групу рівнянь граничними умовами. Тоді для рівняння (12) маємо:

на краю $z=0$:

$$L_{31}U_{z,1}^{(1)}\Big|_{z=0}+L_{32}^{(k)}U_{\varphi,1}^{(1)}\Big|_{z=0}+L_{33}^{(k)}W_1^{(1)}\Big|_{z=0}=0; \qquad (20)$$

$$-L_{41}U_{z,1}^{(1)}\Big|_{z=0}-L_{42}^{(k)}U_{\varphi,1}^{(1)}\Big|_{z=0}+L_{43}^{(k)}W_1^{(1)}\Big|_{z=0}=0, \qquad (21)$$

де $L_{31} = \frac{\mu}{1+\zeta}\cdot\frac{l}{R}\cdot\frac{\partial}{\partial z}$; $L_{32}^{(k)} = \frac{\nu}{(1+\zeta)^2}\cdot\frac{l^2}{R^2}\cdot k$; $L_{33}^{(k)} = \frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{4(\nu+\mu)}{1+\zeta}\cdot\frac{\delta}{R}\cdot\frac{\partial}{\partial z}-\frac{\nu}{(1+\zeta)^2}\cdot\frac{l^2}{R^2}\cdot k^2$;

$L_{41} = \frac{\mu}{1+\zeta}\cdot\frac{l}{R}\cdot\frac{\partial^2}{\partial z^2}$; $L_{42}^{(k)} = \frac{2-\nu}{(1+\zeta)^2}\cdot\frac{l^2}{R^2}\cdot k\frac{\partial}{\partial z}$; $L_{43}^{(k)} = -\frac{\partial^3}{\partial z^3}-\frac{16\mu+4\nu}{1+\zeta}\cdot\frac{\delta}{R}\cdot\frac{\partial^2}{\partial z^2}-$

$-\left[\frac{8(\nu+\mu)}{1+\zeta}\cdot\frac{\delta}{R}+\frac{2-\nu}{(1+\zeta)^2}\cdot k^2\cdot\frac{l^2}{R^2}\right]\cdot\frac{\partial}{\partial z}-\frac{8(1-\nu)}{(1+\zeta)^2}\cdot\frac{l^2}{R^2}\cdot\frac{\delta}{R}\cdot k^2$;

на краю $z=1$:

$$N_{31}U_{z,1}^{(1)}\Big|_{z=1}+N_{32}^{(k)}U_{\varphi,1}^{(1)}\Big|_{z=1}+N_{33}^{(k)}W_1^{(1)}\Big|_{z=1}=0; \quad (22)$$

$$-N_{41}U_{z,1}^{(1)}\Big|_{z=1}-N_{42}^{(k)}U_{\varphi,1}^{(1)}\Big|_{z=1}+N_{43}^{(k)}W_1^{(1)}\Big|_{z=1}=0, \quad (23)$$

де $N_{31} = \frac{\mu}{1+\zeta}\cdot\frac{l}{R}\cdot\frac{\partial}{\partial z}$; $N_{32}^{(k)} = \frac{\nu}{(1+\zeta)^2}\cdot\frac{l^2}{R^2}\cdot k$; $N_{33}^{(k)} = \frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{4(\nu+\mu)}{1+\zeta}\cdot\frac{\delta}{R}\cdot\frac{\partial}{\partial z}-\frac{\nu}{(1+\zeta)^2}\cdot\frac{l^2}{R^2}\cdot k^2$;

$N_{41} = \frac{\mu}{1+\zeta}\cdot\frac{l}{R}\cdot\frac{\partial^2}{\partial z^2}$; $N_{42}^{(k)} = \frac{2-\nu}{(1+\zeta)^2}\cdot\frac{l^2}{R^2}\cdot k\frac{\partial}{\partial z}$; $N_{43}^{(k)} = -\frac{\partial^3}{\partial z^3}+\frac{16\mu+4\nu}{1+\zeta}\cdot\frac{\delta}{R}\cdot\frac{\partial^2}{\partial z^2}+$

$+\left[\frac{2-\nu}{(1+\zeta)^2}\cdot\frac{l^2}{R^2}\cdot k^2+\frac{8(\nu+\mu)}{1+\zeta}\cdot\frac{\delta}{R}\right]\frac{\partial}{\partial z}+\frac{8(1-\nu)}{(1+\zeta)^2}\cdot\frac{l^2}{R^2}\cdot\frac{\delta}{R}\cdot k^2$.

Для рівняння (19) маємо:

на краю $z=0$:

$$L_{31}U_{z,1}^{(2)}\Big|_{z=0}-L_{32}^{(k)}U_{\varphi,1}^{(2)}\Big|_{z=0}+L_{33}^{(k)}W_1^{(2)}\Big|_{z=0}=0; \quad (24)$$

$$-L_{41}U_{z,1}^{(2)}\Big|_{z=0}-L_{42}^{(k)}U_{\varphi,1}^{(2)}\Big|_{z=0}+L_{43}W_1^{(2)}\Big|_{z=0}=0; \quad (25)$$

на краю $z=1$

$$N_{31}U_{z,1}^{(2)}\Big|_{z=1}-N_{32}^{(k)}U_{\varphi,1}^{(2)}\Big|_{z=1}+N_{33}^{(k)}W_1^{(2)}\Big|_{z=1}=0; \quad (26)$$

$$-N_{41}U_{z,1}^{(2)}\Big|_{z=1}+N_{42}^{(k)}U_{\varphi,1}^{(2)}\Big|_{z=1}+N_{43}^{(k)}W_1^{(2)}\Big|_{z=1}=0. \quad (27)$$

Розв’язки рівнянь (3), (10) та (17) шукаємо у вигляді –

$$\begin{aligned} U_z &= U_0+U_{îá}+U_{z,1}^{(1)}(t,z)\cos\varphi+U_{z,1}^{(2)}(t,z)\sin\varphi;\\ U_\varphi &= V_0+V_{îá}+U_{\varphi,1}^{(1)}(t,z)\sin\varphi+U_{\varphi,1}^{(2)}(t,z)\cos\varphi;\\ W &= W_0+W_{îá}+W_1^{(1)}(t,z)\cos\varphi+W_1^{(2)}(t,z)\sin\varphi, \end{aligned} \quad (28)$$

де

$$U_{z,1}^{(1)} = A_1^{(1)}(t)\omega_1(z)\varphi_1^{(1)}(z); \quad (29)$$

$$U_{z,1}^{(2)} = A_1^{(2)}(t)\omega_1(z)\varphi_1^{(2)}(z); \quad (30)$$

$$U_{\varphi,1}^{(1)} = B_1^{(1)}(t)\omega_1(z)\psi_1^{(1)}(z); \quad (31)$$

$$U_{\varphi,1}^{(2)} = B_1^{(2)}(t)\omega_1(z)\psi_1^{(2)}(z); \quad (32)$$

$$W_1^{(1)} = C_1^{(1)}(t)\omega_2(z)\gamma_1^{(1)}(z); \quad (33)$$

$$W_1^{(2)} = C_1^{(2)}(t)\omega_2(z)\gamma_1^{(2)}(z); \quad (34)$$

U_0, V_0, W_0 – складові поступального руху; $U_{îá.}, V_{îá.}, W_{îá.}$ – складові обертального руху; $\omega_i(z)$ – функції Кравчука.

Для обчислення функцій $A_1^{(1)}(t)$, $A_1^{(2)}(t)$, $B_1^{(1)}(t)$, $B_1^{(2)}(t)$. $C_1^{(1)}(t)$, $C_1^{(2)}(t)$ помножимо ліву і праву частини рівнянь (3), (10) та (17) на добутки $\omega_1(z)\varphi_1^{(1)}(z)$, $\omega_1(z)\psi_1^{(1)}(z)$ та $\omega_2(z)\gamma_1^{(1)}(z)$ відповідно. Після інтегрування від $z=0$ до $z=1$ отримуємо звичайні диференціальні рівняння для знаходження необхідних $A_1^{(i)}$, $B_1^{(i)}$, $C_1^{(i)}$ ($i=\overline{1,\ 2}$):

$$a_{z1}^{(1)}\ddot{A}_1^{(1)} + a_{z2}^{(1)}A_1^{(1)} + a_{z3}^{(1)}B_1^{(1)} + a_{z4}^{(1)}C_1^{(1)} = Q_z^{(1)}(t);$$
$$a_{z1}^{(2)}\ddot{A}_1^{(2)} + a_{z2}^{(2)}A_1^{(2)} + a_{z3}^{(2)}B_1^{(2)} + a_{z4}^{(2)}C_1^{(2)} = Q_z^{(2)}(t); \quad (35)$$

$$b_{\varphi 1}^{(1)}\ddot{B}_1^{(1)} - b_{\varphi 2}^{(1)}B_1^{(1)} + b_{\varphi 3}^{(1)}A_1^{(1)} + b_{\varphi 4}^{(1)}C_1^{(1)} = Q_\varphi^{(1)}(t);$$
$$b_{\varphi 1}^{(2)}\ddot{B}_1^{(2)} - b_{\varphi 2}^{(2)}B_1^{(2)} - b_{\varphi 3}^{(2)}A_1^{(2)} + b_{\varphi 4}^{(2)}C_1^{(2)} = Q_\varphi^{(2)}(t); \quad (36)$$

$$c_{W1}^{(1)}\ddot{C}_1^{(1)} + c_{W2}^{(1)}C_1^{(1)} + c_{W3}^{(1)}B_1^{(1)} + c_{W4}^{(1)}A_1^{(1)} = Q_W^{(1)}(t);$$
$$c_{W1}^{(2)}\ddot{C}_1^{(2)} + c_{W2}^{(2)}C_1^{(2)} + c_{W3}^{(2)}B_1^{(2)} + c_{W4}^{(2)}A_1^{(2)} = Q_W^{(2)}(t). \quad (37)$$

Якщо прийняти $A_1^{(1)}(t) = a_1^{(1)} \exp i\omega_1^{(1)}t$, $A_1^{(2)}(t) = a_1^{(2)} \exp i\omega_1^{(2)}t$ і т.д., отримуємо співвідношення для визначення парціальних частот повздовжних коливань:

$$-a_{z1}^{(1)}\omega_1^{(1)^2} + a_{z2}^{(1)} = 0;$$
$$-a_{z1}^{(2)}\omega_1^{(2)^2} + a_{z2}^{(2)} = 0; \quad (38)$$

Аналогічно для колових та радіальних переміщень.

Висновки. Таким чином, можна встановити закономірність коливальних процесів поверхні підвісу гіроскопа за умови відсутності перехресних в'язів за пружними переміщеннями у двох інших напрямках.

Оцінка ступеня їх впливу має самостійний науковий інтерес і постає за умов визначення змісту конкретних натурних збурень.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Мельник В.Н., Карачун В.В.* Некоторые аспекты гироскопической стабилизации в акустических полях // Прикл. механика. – 2002. – 38. № 1. – С. 95–101.
2. *Мельник В.М.* Нелінійні коливання рухомої частини поплавкового гіроскопа внаслідок неоднорідності рідиннофазної частини підвісу // Доповіді НАН України. – 2003. – № 28. – С. 54–58.
3. *Карачун В.В., Потапова Е.Р., Мельник В.Н.* О погрешностях построения вертикали при старте носителей // Космічна наука і технологія. 1999. – Т. 5. – № 4. – С. 70–74.
4. *Карачун В.В., Потапова Е.Р., Мельник В.Н., Астапова А.Б.* О погрешности курсоуказания ракет-носителей // Космічна наука і технологія. 1999. – Т. 5. – № 5/6. – С. 77–80.
5. *Карачун В.В., Мельник В.Н., Лозовик В.Г.* Многомерные задачи упругости подвеса поплавкового гироскопа // Космічна наука і технологія. – 2001. – Т. 6. – № 2/3. – С. 92–97.
6. *Мельник В.М.* Зменшення впливу звукових полів на похибки поплавкового гіроскопа // Вісник ЖІТІ. – 2002. – № 4 / Технічні науки. – С. 111–116.
7. *Мельник В.М., Карачун В.В.* Інжекція акустичної енергії РН і її вплив на похибки гіроскопа // Вісник ЖДТУ. – 2004. – Т. 1. – № 4(31) / Технічні науки. – С. 135–138.

МЕЛЬНИК Вікторія Миколаївна – кандидат технічних наук, доцент кафедри біотехніки та інженерії Національного технічного університету України "КПІ".

Наукові інтереси:
– динаміка механічних систем приладів.

КАРАЧУН Володимир Володимирович – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри біотехніки та інженерії Національного технічного університету України "КПІ".

Наукові інтереси:
– динаміка бортової апаратури.

Подано 12.03.2006

Мельник В.М., Карачун В.В. Невісесиметричний випадок пружної деформації поплавця гіроскопа
Мельник В.Н., Карачун В.В. Неосесимметричный случай упругой деформации поплавка
Mel'nik V.N., Karachun V.V. Not axisymmetrical case of elastic deformation of a float

УДК 629.7.054
Невісесиметричний випадок пружної деформації поплавця гіроскопа / В.М. Мельник, В.В. Карачун
Проводиться аналіз пружних коливань поверхні поплавця під дією зовнішніх хвильових чинників довільної фізичної природи. Формулюються наукові засади обчислення основних частот примусових коливань без аналізу ступеня впливу перехресного пружного руху.

УДК 629.7.054
Неосесимметричный случай упругой деформации поплавка / В.Н. Мельник, В.В. Карачун
Приводится анализ упругих колебаний поверхности поплавка под действием внешних волновых факторов произвольной физической природы. Формулируются научные основы определения частот вынужденных колебаний без анализа степени влияния перекрестного упругого движения.

УДК 629.7.054
Not axisymmetrical case of elastic deformation of a float / V.N. Mel'nik, V.V. Karachun
The analysis of elastic vibrations of a surface of a float under operating of the external wave factors of the arbitrary physical nature is resulted. The scientific fundamentalses of definition of forced vibration frequencies without the analysis of a degree of influencing of cross elastic motion are stated.