

**РОЗРАХУНОК КАСКАДНОГО ПЕРЕНЕСЕННЯ ЕНЕРГІЇ
В ТУРБУЛЕНТНОМУ ПРИКОРДОННОМУ ШАРІ НА ОСНОВІ k - ε МОДЕЛІ.
АНАЛОГІЇ З КОГЕРЕНТНИМИ СТРУКТУРАМИ, ЩО ВИНИКАЮТЬ
В РОЗРАХУНКАХ**

В даній роботі на основі моделі турбулентності розроблені методики розрахунку каскадного перенесення енергії. Показано, що результати розрахунків за даною моделлю відповідають експериментальним даним після когерентних структур в турбулентних прикордонних шарах.

Вступ. В роботі [1] автором було запропоновано враховувати дію стінки на турбулентне перенесення за допомогою введення в модель особливої функції загасання f_0 . Рівняння k - ε моделі при цьому записується таким чином:

$$\frac{Dk}{D\tau} = f_0 \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial y} + f_0 \nu_t \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - \varepsilon; \quad (1)$$

$$\nu_t = C_v F_v \frac{k^2}{\varepsilon}.$$

Як функції f_0 і F_v використовувалися наступні вирази:

$$f_0 = \left(1 - \exp \left(-\frac{Re_y}{5.5} \right) \right) \left(1 - \exp \left(-\frac{1}{0.416} \frac{L_\varepsilon}{y} \right) \right);$$

$$F_v = \left(1 - \exp \left(-\frac{Re_y}{45} \right) \right) \left(1 - \exp \left(-\frac{1}{0.416} \frac{L_\varepsilon}{y} \right) \right).$$

Тут $L_\varepsilon \equiv k^{3/2}/\varepsilon$ – дисипативний масштаб турбулентності, $C_v = 0,09$.

Результати розрахунків за моделлю (1) показують наступне. По-перше. Основна частина енергії турбулентності створюється “крупними вихорами” (не плутати з терміном “великі вихори”, що використовується в LES, VLES і т.д. методах розрахунків), тобто вихорами з розмірами, сумірними з товщиною зсувного шару. По-друге. Як можливо бачити з рівняння (1), на виробництво крупних вихорів витрачається не вся енергія, що відводиться від середньої течії в пульсацію. Згідно з гіпотезою автора, енергія, що відводиться від середньої течії в пульсацію і не використовується на виробництво крупних вихорів, тобто енергія, описується виразом $(1 - f_0)P$, створює другу вихрову систему, надалі названу “середніми вихорами”.

В даній роботі модель (1) використовується для оцінних розрахунків розвитку середніх вихорів, що мають відповідність з експериментальними даними по когерентних структурах, і каскадного процесу в турбулентному прикордонному шарі. Треба сказати, що теорія каскадного процесу була розроблена Колмогоровим ще в 40-х роках, але жодного розрахунку каскадного процесу в реальній зсувній турбулентній течії не проводилося. В той же час остаточного визначення, що ж таке когерентні структури, не існує. Відомі численні розрахунки різних варіантів цих структур на основі LES та DNS методів (див. наприклад [2], [3], [4]), але які-небудь розрахунки на основі k - ε моделей знайти в літературі не вдалося.

Представлення в рамках даної моделі повної турбулентної енергії течії. Головна ідея моделі – поправку треба вводити в рівняння перенесення не як додатковий доданок, а у вигляді поправочного множника до генераційного члена. В той же час з рівнянь Рейнольдса виходить, що повна енергія, яка передавалась з усередненої течії в прикордонному шарі в турбулентність, описується виразом

$$P = \nu_t \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 = -\overline{u'v'} \frac{\partial U}{\partial y}.$$

Спосіб введення поправки пропонує використовувати на підтримку k тільки частину переданої енергії, а саме $f_0 P$. Оскільки незатребувана частина P теж повинна кудись використовуватися, то можна припустити, що незатребувана частина енергії, а саме $(1 - f_0)P$, йде на створення в шарі ще однієї «турбулентності». Іншими словами, враховуючи методику введення поправок, можна сказати, що дана модель розбиває рівняння перенесення k на два окремі рівняння (коректність цього розбиття буде показана пізніше), тобто замінює його системою вигляду:

$$\begin{cases} \frac{Dk}{D\tau} = f_0 \frac{\partial}{\partial y} \left(v + v_t \frac{\partial k}{\partial y} \right) + f_0 P - \varepsilon, \\ \frac{Dk_1}{D\tau} = f_{0-1} \frac{\partial}{\partial y} \left(v + v_{t1} \frac{\partial k_1}{\partial y} \right) + (1 - f_0) f_{0-1} P - \varepsilon_1. \end{cases}$$

Природно, що два рівняння перенесення енергії турбулентності вимагають двох рівнянь перенесення швидкості дисипації.

Іншими словами, описуваний підхід передбачає наявність в прикордонному шарі як мінімум двох видів турбулентної енергії або, що те ж саме, двох видів турбулентності, які можна назвати «первинною» і «вторинною». Називатимемо рішення первинної системи «крупними вихорами», на відміну від «великих вихорів» – терміну, що використовується в LES, VLES і т.п. методах. Рішення вторинної системи називатимемо «середніми вихорами».

Для перевірки цієї гіпотези були проведені відповідні розрахунки. Проводилися вони за наступним двокроковим процесом. Спочатку розв'язувалися рівняння k - ε моделі, що описує первинну турбулентність. За наслідками розрахунків знаходився розподіл параметра $P_M = (1 - f_0) v_t (\partial U / \partial y)^2$, тобто розподіл енергії, незатребуваної на першому кроці. На другому кроці знову розв'язувалися ті ж рівняння, але замість P використовувалися значення P_M . Значення функції f_{0-1} і v_{t1} для розрахунку другого кроку обчислювалися за тими ж виразами, що і f_0 і v_t , але за значеннями k_1 і ε_1 , знайденими на другому кроці.

$$f_{0-1} = \left(1 - \exp \left(- \frac{Re_{y1}}{5.5} \right) \right) \left(1 - \exp \left(- 2.4 \frac{y}{L_{\varepsilon 1}} \right) \right),$$

де $Re_{y1} = \frac{\sqrt{k_1} y}{\nu}$, $L_{\varepsilon 1} = \frac{k_1^{3/2}}{\varepsilon_1}$ і $F_v = \left(1 - \exp \left(- \frac{Re_{y1}}{45} \right) \right) \left(1 - \exp \left(- 2.4 \frac{y}{L_{\varepsilon 1}} \right) \right)$.

На рис. 1 окрім енергії середніх вихорів наведено розподіл енергії крупних вихорів, одержаний на першому кроці процесу, а також сума енергій середніх і крупних вихорів.

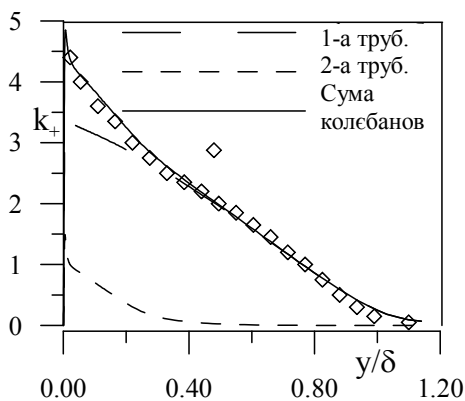


Рис. 1. Енергія первинної та вторинної турбулентностей

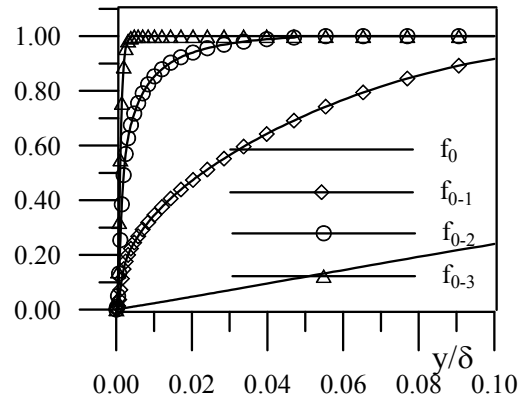


Рис. 2. Розрахунок функції f_0 чотирьох турбулентностей

Як видно з рис. 1, сумарна енергія практично точно співпадає з розподілом енергії в турбулентному прикордонному шарі, одержаному в експериментах Клебанова, тоді як розрахунки тільки крупних вихорів фактично “з’їдають” пристінний пік k . Дані Клебанова узяті з роботи Хінце [5]. Відзначимо істотну деталь. При проведенні розрахунків середніх вихорів з’ясувалося, що одержувані результати дуже помітно залежать від відношення C_1/C_2 . Так, зокрема, для відповідності експерименту (див. рис. 1) для розрахунків енергії вторинної турбулентності використовувалася константа $C_1 = 0.985 C_{\varepsilon 2}$.

Відзначимо, що значення функції f_{0-1} в розрахунках вторинної турбулентності не рівні одиниці тожотоно, хоча і область, в якій $f_{0-1} \neq 1$, вельми мала. Іншими словами, вторинна турбулентність також використовує не всю енергію, відведену від середньої течії і незапитану первинною турбулентністю. Те ж саме можна сказати і про функцію f_{0-2} і т.д. (див. рис. 2). Звідси слідує теоретична можливість існування в прикордонному шарі не однієї, а нескінченної кількості вихрових систем. Розрахунки функції f_0 для чотирьох турбулентностей наведені на рис. 2.

Цю ж гіпотезу можна сформулювати таким чином. Очевидно, що турбулентність існує за рахунок енергії усередненої течії. Основну частину цієї енергії сприймають вихори з розмірами, сумірними з

товщиною прикордонного шару. Але тоді можна сказати, що у зв'язку з наявністю стінок їх структура виявляється такою, що вони не можуть сприйняти всю передавану з усередненої течії енергію і, в результаті, в течії виникає система вторинних вихорів. Розвиваючи цю гіпотезу, можна припустити, що і вторинні вихори в результаті контакту із стінкою сприймають не всю енергію, що дісталася їм, і в потоці можуть виникати третинні, четвертні і т.д. вихори. Теоретично цей процес може продовжуватися до безкінечності.

Слід зазначити, що факт виникнення в результаті контакту вихору із стінкою вторинних третинних і т.д. вихорів, добре відомий у вихорих пристінних ламінарних течіях. Як приклад наведемо течії у прямих і зворотних ступенів, течії в кавернах і т.д.

Результати розрахунків дисипативних масштабів і масштабів часу первинної і вторинної турбулентностей показують, що ці масштаби дуже помітно убувають від кроку до кроку. З різниці масштабів можна припустити, що кожна наступна турбулентність існує в основному як обурення на фоні попередньої, тобто іншими словами, практично з нею не взаємодіє.

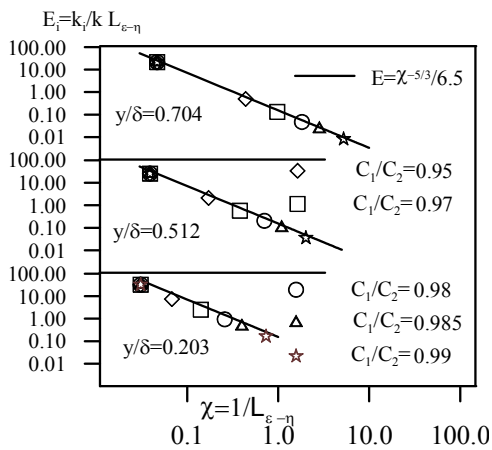


Рис. 3. Розрахунок спектра в трьох перетинах прикордонного шару

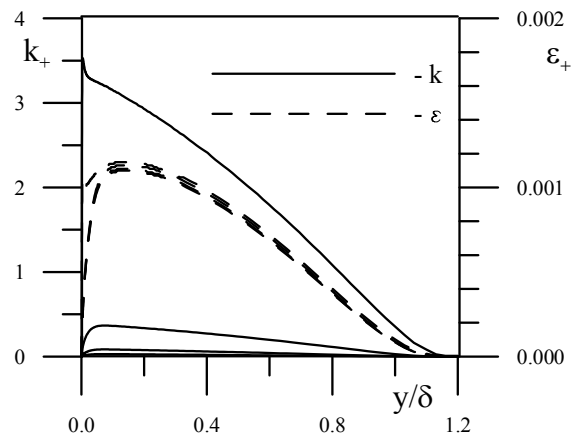


Рис. 4. Зміна енергії турбулентності та дисипації на трьох кроках каскадного процесу

Моделювання каскадного процесу. Передбачається, що ϵ означає передачу енергії в каскадний процес, а не в'язку дисипацію. Моделювання каскадного процесу проводилося з урахуванням цього припущення. Для цього на першому кроці розв'язувалася система k - ϵ типу (1). На другому кроці розв'язувалася та ж система, але замість генераційного члена використовувалося значення дисипації, одержане на першому кроці. Функція f_0 розраховувалася за значеннями k і ϵ , знайденими на цьому кроці. Очевидно, що крок розрахунку імітує крок каскадного процесу. У зв'язку з відсутністю яких-небудь експериментальних даних, окрім результатів вимірювання спектра, єдиним критерієм відповідності розрахунків природі може служити відтворення відомого закону “ $-5/3$ ”. Перевірка розрахунків на відповідність цьому закону може бути проведена двома способами.

По-перше. Випробування моделі показують, що одержувані значення дисипативних масштабів і турбулентна енергія обернено пропорційні відношенню C_1/C_2 . В той же час відомо, що в каскадному процесі і розміри вихорів та їх енергія безперервно убувають. Але тоді, оскільки розрахунок дискретний у принципі, то не ясно, в який зріз дискретного процесу потрапляє крок розрахунку з конкретним відношенням C_1/C_2 . У зв'язку з цим було проведено декілька розрахунків одного кроку каскадного процесу з різними значеннями відношення C_1/C_2 . Результати розрахунків у трьох точках прикордонного шару наведені на рис. 3. Збіг із законом “ $-5/3$ ” очевидний.

Розрахунки показують, що при C_1/C_2 прагнучому до 1 розміри вихорів стають сумірними з колмогоровським масштабом.

По-друге. Можна провести декілька кроків розрахунку каскадного процесу, тобто дисипація, одержана з розрахунку k , використовується як генерація 1-го кроку, дисипація 1-го кроку – як генерація 2-го і т.д., причому відношення C_1/C_2 від кроку до кроку може мінятися. Результати таких розрахунків (тут не наводяться) також показують відмінний збіг із законом “ $-5/3$ ”. Згідно з Колмогоровим в інерціальній підобласті спектра $E(\chi, t) = C\epsilon^{2/3}\chi^{-5/3}$. Тут E – спектральна функція, χ – хвильове число. В той же час з експериментів виходить, що в цій області $E(\chi, t) \propto \chi^{-5/3}$. Звідси маємо, що в цій області $\epsilon = \text{const}$. На рис. 4 наведені результати розрахунків зміни дисипації в багатокроковому каскадному процесі. Видно, що дисипація від кроку до кроку залишається практично незмінною, тоді як енергія міняється дуже помітно. На думку автора, на основі цих розрахунків можна припустити, що в даній

моделі ε відтворює саме швидкість передачі енергії в каскадний процес. Іншими словами, тепер ε придбало цілком конкретну фізичну наповненість.

Аналогії з когерентними структурами, що виникають в розрахунках за запропонованою моделлю. Аналіз проведених розрахунків показує, що вторинні вихори добре відповідають деяким теоретичним та експериментальним даним про когерентні структури. Наприклад. В роботі Жанга і Ліллі [6] була запропонована модель для розрахунку розвитку обурень в прикордонному шарі. В цій моделі на турбулентну течію накладалися періодичні обурення. В результаті в потоці виникали вторинні обурення у вигляді утворень, що поволі обертаються. Ці вторинні обурення ідентифікувалися авторами як когерентні структури. На рис. 5 представлено зіставлення розрахунків обурення середньої течії, одержаної авторами [6], з енергією вторинної турбулентності. Відповідність дуже хороша.

Таким чином, можна сказати, що даний розрахунок знаходить деяку відповідність з даними по когерентних структурах. Слід зазначити, що ця відповідність не єдина.

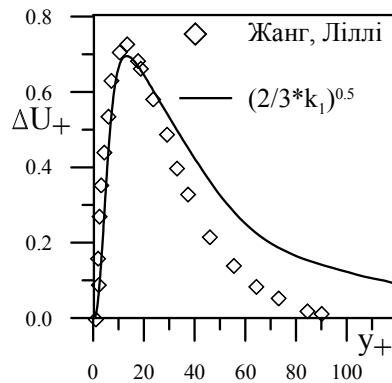


Рис. 5. Когерентна структура за Жангом і Ліллі та енергія вторинної турбулентності

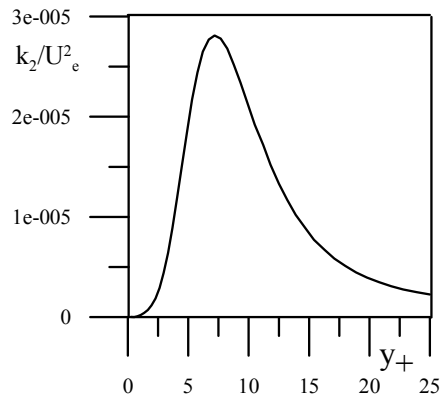


Рис. 6. Розподіл енергії третинної турбулентності

В огляді Кантуелла [7] наголошується, що в пристінній області в турбулентному прикордонному шарі важливу роль відіграють когерентні вихори двох типів. По-перше, стінка покрита системою поздовжніх вихорів з типовим діаметром $\lambda_y \approx (20 \div 30)v/u^*$. На рис. 6 показаний розподіл енергії третинної турбулентності. З рисунка виразно видно, що розподіл третинної турбулентності добре відповідає розмірам цих вихорів. По-друге, над ними розташовуються вихори з типовим діаметром $l_y \approx (20 \div 40)v/u^*$. Якщо припустити, що ці вихори торкаються стінки, то тоді вони повинні бути розташовані в області $l_y \approx (50 \div 70)v/u^*$ (розміри виходять підсумовуванням типових розмірів двох вихорових систем). Рис. 5 цілком відповідає цим вимогам.

Дуже цікаву картину дає розрахунок каскадного процесу, що відбувається з вторинною турбулентністю. Розрахунки показують, що в цьому випадку енергія практично не міняється від кроку до кроку. В той же час розрахунки масштабу часу k/ε в первинній і вторинній турбулентностях показують, що масштаб часу вторинної турбулентності у декілька разів нижче, ніж масштаб часу первинної турбулентності. Звідси витікає, що на відміну від крупного вихору середній вихор розпадається насправді вельми швидко. Новий вихор, що в той же час з'являється на його місці, практично співпадає з початковим, що створює враження дуже великого життєвого циклу середнього вихору. Можна припустити, що саме цей факт робить когерентні структури спостережуваними.

Заключення. В роботі показано, що запропонована раніше автором модель значно розширює діапазон доступних k - ε моделюванню задач, залишаючись, в той же час, однією з найпростіших моделей турбулентності. Так, зокрема, в літературі невідомі які-небудь розрахунки каскадного процесу. Когерентні структури в даний час розраховуються тільки на основі дуже складних і вимагаючих великих витрат машинного часу DNS і LES методів. Очевидний подальший розвиток досліджень. Необхідно перевіряти підхід на розрахунках течій в трубах і каналах, розрахунках вільних турбулентних течій і т.д.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Головня Б.П. К вопросу о введении пристенных поправок в модель турбулентности k - ε типа для расчета течений в пограничном слое // Теплофизика высоких температур. – 2000. – Т. 30. – № 2. – С. 257–261.
2. Gurka R., Liberzon, A. Hetsroni, G. Detecting coherent patterns in a flume by using PIV and IR imaging techniques", Experiments in Fluids. – 2004. – V. 37, № 2. – P. 230–236.

3. *Imamoto, K., Suzuki, Y., Kasagi, N.*, Nonlinear Interaction of Coherent Structures in Wall Turbulence at Low-to-moderate Reynolds Numbers, IUTAM Symposium on Reynolds Number Scaling in Turbulent Flow, Princeton, Sep. 2002.
4. Proc. International Symposium on Dynamics and Statistics of Coherent Structure in Turbulence: Roles of Elementary Vortices 2002, Tokyo.
5. *Хинце И.О.* Турбулентность. – М.: ГИФМЛ. – 1963. – С. 680.
6. *Zhang Z., Lilley G.M.* A Theoretical Model of the Coherent Structure of the Turbulent Boundary Layer in Zero Pressure Gradient // В кн.: Turbulent Shear Flows 3, Springer-Verlag. – 1982. – Р. 60–72.
7. *Кантуэлл Б.Дж.* Организованные движения в турбулентных потоках / В кн.: Вихри и волны. – М.: Мир, 1984. – С. 9–79.

ГОЛОВНЯ Борис Петрович – кандидат технічних наук, доцент кафедри прикладної математики Черкаського національного університету.

Наукові інтереси:

– розв’язання рівнянь Нав’є–Стокса;

– моделювання турбулентності.

Тел.: (0472)378022 – роб.;

(0472)361355 – роб.;

(0472)452390 – дом.

E-mail: Golovnya@list.ru

Подано 22.05.2005

Головня Б.П. Розрахунок каскадного перенесення енергії в турбулентному прикордонному шарі на основі $k-\epsilon$ моделі. Аналогії з когерентними структурами, що виникають в розрахунках

Головня Б.П. Расчет каскадного переноса энергии в турбулентном пограничном слое на основе $k-\epsilon$ модели. Аналогии с когерентными структурами, возникающие в расчетах

Golovnya B.P. Simulation cascade energy transfer in turbulent boundary layer on base $k-\epsilon$ model. Analogy with coherent structures, arising in simulations

УДК 523.536

Розрахунок каскадного перенесення енергії в турбулентному прикордонному шарі на основі $k-\epsilon$ моделі. Аналогії з когерентними структурами, що виникають в розрахунках / Б.П. Головня

В попередніх роботах автора запропонована нова модель турбулентності. В даній роботі на основі цієї моделі розроблені методики розрахунку каскадного перенесення енергії. Показано, що результати розрахунків по даній моделі відповідають експериментальним даним після когерентних структур в турбулентних прикордонних шарах.

УДК 523.536

Расчет каскадного переноса энергии в турбулентном пограничном слое на основе $k-\epsilon$ модели. Аналогии с когерентными структурами, возникающие в расчетах / Б.П. Головня

В предыдущих работах автора предложена новая модель турбулентности. В данной работе на основе этой модели разработаны методики расчета каскадного перенесения энергии. Показано, что результаты расчетов по данной модели отвечают экспериментальным данным по когерентным структурам в турбулентных пограничных слоях

УДК 523.536

Simulation cascade energy transfer in turbulent boundary layer on base $k-\epsilon$ model. Analogy with coherent structures, arising in simulations / B.P. Golovnya

In previous works author a new model turbulence is offered. In given work on basis this model methods simulation cascade transfer energy are developed. It is shown, that results simulations on given model answer experimental data on coherent structures in turbulent boundary layers