УДК 539

І.О. Шупікова, ст.викл.
Житомирський державний технологічний університет

АЛГОРИТМ ДЕКОМПОЗИЦІЇ НЕОПУКЛОГО 3-D БАГАТОГРАННИКА В ЗАДАЧАХ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Розглянутий спосіб представлення 3-вимірної неопуклої багатогранної області за допомогою об'єднання набору опуклих багатогранних областей.

Вступ.

Існує багато задач, для вирішення яких потрібно виконати декомпозицію неопуклого багатогранника за допомогою набору опуклих багатогранників. Це – ряд задач геометричного проектування (задачі розміщення тривимірних багатогранних об'єктів), задачі виявлення зіткнень (collision detection), або перетину об'єктів у комп'ютерному моделюванні. Також ця проблема має самостійне значення як задача обчислювальної геометрії. В залежності від вимог, які пред'являються до багатогранників, що беруть участь у формуванні вихідного неопуклого багатогранника, використовують два основних способи розв'язання проблеми:

1. Представлення за допомогою об'єднання опуклих багатогранників, які не перетинаються, тобто розбиття вихідного багатогранника.
2. Формування вихідного багатогранника набором опуклих багатогранників, які можуть перетинатися, тобто створення покриття вихідного багатогранника.

Аналіз досліджень та публікацій.

Проблемі декомпозиції неопуклих багатогранників присвячена достатня кількість наукових робіт.

Автори [1] розглядають алгоритм декомпозиції неопуклого багатогранника за допомогою опуклих таким чином, що не утворюється додаткова кількість вершин. Необхідно зауважити, що через складність задачі мінімізації кількості опуклих компонент лише порівняно мала кількість досліджень вийшла за межі теоретичного розгляду проблеми [2]. В [3] розглянуті останні досягнення у вирішенні проблеми декомпозиції багатогранників, в [6] запропоновано метод та алгоритм декомпозиції багатогранника з мінімізацією кількості граней, що беруть участь у формуванні вихідного об'єкта.

Мета роботи.

Для розв'язання задачі оптимального розміщення неопуклих багатогранних об'єктів критичною є складність множини допустимих розв'язків. Ця складність виникає завдяки необхідності враховувати як умови знаходження об'єкта всередині області розміщення, так і умови взаємного неперетину об'єктів.

Множина допустимих розв'язків є об'єднанням та перетином скінченної кількості областей, які задаються умовами знаходження багатогранників, які розміщуються усередині області розміщення, та умовами взаємного попарного неперетину багатогранників, які розміщуються. Умови знаходження багатогранника в області розміщення визначають деяку багатогранну область у тривимірному просторі.

Для забезпечення умови взаємного неперетину неопуклих багатогранників необхідно спочатку провести їх декомпозицію і представити кожний за допомогою набору опуклих багатогранників. Виконання умови взаємного неперетину кожної з опуклих компонент одного багатогранника з кожною з опуклих компонент другого багатогранника забезпечить виконання умови взаємного неперетину двох загальних багатогранників.

Умови взаємного неперетину двох опуклих 3-вимірних багатогранників задають деяку необмежену багатогранну область у 6-вимірному просторі. Якщо зафіксувати параметри розташування одного з об'єктів, то умови взаємного неперетину об'єктів задають багатогранну область у тривимірному просторі. Границя області може бути створена за допомогою апарата Ф-функцій і є поверхнею 0-рівня Ф-функції [4].

Таким чином, множина допустимих розв'язків може бути представлена набором систем лінійних нерівностей, які пов'язані співвідношеннями "АБО".

Для зменшення складності задачі необхідно:

а) мінімізувати кількість систем нерівностей, які задають множину допустимих розв'язків задачі;

б) мінімізувати кількість нерівностей, які входять в системи лінійних нерівностей.

Для виконання першої умови необхідно мінімізувати кількість опуклих компонент, які потрібні для опису кожного з розміщуваних багатогранників. Друга умова потребує того, щоб у процесі пошуку опуклих компонент неопуклого багатогранника кожна з них створювалась перетином напівпросторів, які задаються гіперплощинами, що включають грані похідного багатогранника. Тобто для створення опуклої підмножини неопуклого багатогранника повинні використовуватися тількі ті площини, які включають грані похідного багатогранника.

Метою даної роботи є створення для будь-якого неопуклого багатогранника набору опуклих багатогранників таких, що:

а) їх об'єднаня співпадає з множиною точок, які формують цей багатогранник;

б) кожний опуклий багатогранник створюється перетином напівпросторів, які задаються гіперплощинами, що включають грані похідного неопуклого багатогранника.

Постановка задачі.

У тривимірному просторі задана неопукла багатогранна область D^*. Границя Γ області D^* складається зі скінченної кількості компонент лінійної зв'язності, кожна з яких будується з кінцевої кількості кусочно-лінійних компонент (граней), що створюють замкнуту багатогранну поверхню. Необхідно побудувати кінцевий набір систем лінійних нерівностей, які визначають відповідні опуклі області D_k (k = 1, 2,…), такі, що

$$\bigcup_k D_k = D^*.$$

Виклад основного матеріалу.

Вважатимемо, що багатогранна область задається множиною граней g_i (I = 1, 2, …, n), які створюють її границю Γ. Кожна грань g_i у загальному випадку є багатозв'язною та задана послідовністю номерів вершин V_{ij} (I = 1, 2, …, n, j = 1, 2, …, k_i) зовнішньої компоненти лінійної зв'язності із цілковито визначеним напрямком обходу.

Вершини V_{ij} завдані своїми координатами (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}) відносно деякої системи координат, яка пов'язана з областю D^*.

Грань g, а також відповідну їй площину h ($h \subset g$), будемо називати орієнтованою гранню (площиною), якщо для неї заданий напрям нормалі $\overline{n}$, який однозначно визначається напрямком обходу вершин цієї грані. Виберемо орієнтацію площини h (грані g) таким чином, щоб вектор нормалі $\overline{n}$, відновлений в будь-якій точці грані g, був спрямований усередину області D^*. При цьому будемо вважати, що рівняння площини h вибрано таким, що відхилення кінця вектора нормалі відносно площини h має позитивне значення, а напрямок обходу вершин грані g – проти годинникової стрілки, якщо спостерігач знаходиться на кінці вектора $\overline{n}$. Таким чином, для однієї і тієї ж границі Γ, в залежності від напрямку обходу вершин її граней, розглядається або сама область D^*, або її доповнення до всього простору R^3.

Нехай $G = \{g_1, g_2, ..., g_n\}$ – множина орієнтованих граней, які створюють границю вихідної області D^*, і $H = \{h_1, h_2, …, h_n\}$ – множина орієнтованих площин, які містять відповідні грані множини G. $P = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$ – множина «позитивних» напівпросторів, які обмежені відповідними площинами множини H. «Позитивним» будемо вважати такий напівпростір p_i, внутрішні точки якого мають позитивні відхилення відносно відповідної площини h_i, яка описувана рівнянням:

$$a_o(чб\ нб\ я) \equiv ф_шч + и_шн + c_шя = 0.$$

Шукані опуклі області D_k (k = 1, 2,…) представимо як перетин визначених напівпросторів з множини P.

Для того, щоб об'єднання шуканих опуклих областей співпадало з вихідним багатогранником, потрібне виконання наступних вимог:

1. Множина напівпросторів, які визначають опуклу область D_k, формується таким чином, щоб для кожної пари напівпросторів p_i та p_j цієї підмножини виконувались наступні вимоги: для відповідних граней $g_i\langle V_{i1}, V_{i2}, …, V_{ir}\rangle$ та $g_j\langle V_{j1}, V_{j2}, …, V_{jl}\rangle$ повинні виконуватися умови:

$$f_j(x_{jp}, y_{jp}, z_{jp}) > 0, \quad p \in [1, l], \tag{1}$$

$$f_j(x_{is}, y_{is}, z_{is}) > 0, \quad s \in [1, r], \tag{2}$$

де x_{jp}, y_{jp}, z_{jp} та x_{is}, y_{is}, z_{is} – це координати вершин V_{ip} та V_{is} граней g_j та g_i відповідно.

Якщо умови (1) та (2) виконуються, то при формуванні опуклої області її границя має непустий перетин з кожною із граней g_i та g_j.

2. Перетин внутрішніх точок області D_k з границею вихідного багатогранника є пустою множиною:

$$D_k \bigcap \Gamma = \varnothing, \quad s \in [1, r]. \tag{3}$$

Далі наведений алгоритм побудови набору опуклих областей, які формують неопуклий багатогранник.

Структура даних:

G – масив граней вихідного неопуклого багатогранника;

s – кількість граней;

g_i – i-та грань, яка представлена масивом вершин V_i, перерахованих у відповідному порядку ;

v_j – j-та вершина, яка задана своїми координатами (x_j, y_j, z_j);

F – масив рівнянь, що задають площини, яким належать грані вихідного багатогранника;

f_i – рівняння, яке визначає площину, що містить точки грані g_i;

P – масив опуклих багатогранних областей, що формують вихідний багатогранник;

p_i – i-та опукла багатогранна область, яка представлена масивом граней вихідного багатогранника, що визначають цю область;

p_{jk} – j-та опукла область, яка містить грань g_k.

Function ConvexPolyhedraList(G)

Begin

1. P = ∅; /*множина опуклих областей є пустою*/

2. i=0; /*i – індекс елементів масиву G*/

3. While(i<s)

4. begin /*початок циклу визначення опуклих областей, які містять грань g_i */

5. p_t = ∅; /*множина граней поточної опуклої областы є пустою*/

6. For(j=0,j<s,j++**)**

7. begin

8. Якщо серед елементів масиву граней g_j не належить жодній з областей $p_k \in$ P і виконуються наступні умови:

а) серед вершин грані g_j є така v_l, що $f_i(x_{jl}, y_{jl}, z_{jl}) > 0$;

в) серед вершин грані g_i є така v_m, що $f_j(x_{im}, y_{im}, z_{im}) > 0$,

то $з_е = з_е + п_ш + п_{ою}$.

9. end /* кінець пошуку грані, яка задовольняє вимогам a, b*/

10. Якщо p_t = ∅, перехід на крок (16)

11. For($j = 0, j < s, j$++**)**

12. begin

13. Якщо для грані $g_j \in$ G виконуються наступні умови:

а) g_j не визначає жодну з областей $p_k \in$ P;

в) для грані g_j і кожної з граней g_i, які визначають область p_t, виконуються наступні вимоги:

1) Серед вершин грані g_j є така v_l, що $f_i(x_{jl}, y_{jl}, z_{jl}) > 0$.

2) Серед вершин грані g_i є така v_m, що $f_j(x_{im}, y_{im}, z_{im}) > 0$,

то $p_t = p_t + g_j$.

14. end /* кінець пошуку грані, яка задовольняє вимогам a, b*/

15. Якщо множина внутрішніх точок області p_t і множина точок границі вихідного багатогранника мають пустий перетин і серед областей $p_k \in$ P жодна не співпадає з p_t, то p_t включається до множини P.

16. Якщо p_t = ∅, $i = i + 1$ /* перехід до наступної грані*/

17. End /* кінець циклу визначення опуклих областей, які містять грань g_i*/

18. End./* кінець функції ConvexPolyhedraList(G)*/

Результатом виконання функції є список областей p_k, кожна з яких визначена масивом орієнтованих граней вихідного багатогранника. Область є перетином позитивних на-півпросторів, кожен з яких визначається відповідною площиною h_i, яка задана рівнянням f_i.

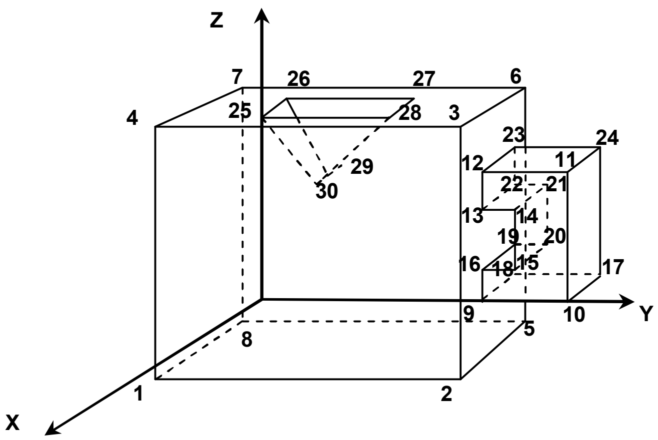

Рис. 1. Вихідна багатогранна область D

Нехай маємо неопуклий багатогранник D (рис. 1). Визначимо порядок обходу кожної з граней таким чином, щоб вектор нормалі до кожної з них був спрямований назовні. Таким чином буде розглянута неопукла багатогранна область $D^* = R^3/D$, яка має бути представлена у вигляді набору опуклих багатогранних областей, кожна з котрих задається системою лінійних нерівностей.

Границя D* задана множиною граней g_i, кожна з котрих представлена впорядкованим списком своїх вершин:

1. $g_1\langle V1, V2, V3, V4\rangle$
2. $g_2\langle V2, V5, V6, V3\rangle$
3. $g_3\langle V6, V5, V8, V7\rangle$
4. $g_4\langle V1, V4, V7, V8\rangle$
5. $g_5\langle V1, V8, V10, V2\rangle$
6. $g_6\langle V4, V3, V6, V7\rangle$
7. $g_7\langle V25, V30, V29, V26\rangle$
8. $g_8\langle V28, V27, V29, V30\rangle$
9. $g_9\langle V29, V27, V26\rangle$
10. $g_{10}\langle V25, V28, V30\rangle$
11. $g_{11}\langle V9, V10, V11, V12, V13, V14, V15, V16\rangle$
12. $g_{12}\langle V17, V18, V19, V20, V21, V22, V23, V24\rangle$
13. $g_{13}\langle V12, V11, V24, V23\rangle$
14. $g_{14}\langle V10, V17, V24, V11\rangle$
15. $g_{15}\langle V10, V9, V18, V17\rangle$
16. $g_{16}\langle V16, V15, V20, V19\rangle$
17. $g_{17}\langle V15, V14, V21, V20\rangle$
18. $g_{18}\langle V13, V22, V21, V14\rangle$

В результаті виконання декомпозиції вихідна багатогранна область представлена наступним набором опуклих багатогранних областей p_k, таких, що $\bigcup_k p_k = D^*$:

1. $p_1\langle g_1\rangle$
2. $p_2\langle g_3\rangle$
3. $p_3\langle g_4\rangle$
4. $p_4\langle g_5\rangle$
5. $p_5\langle g_6\rangle$
6. $p_6\langle g_7,g_8,g_9,g_{10}\rangle$
7. $p_7\langle g_2,g_{13}\rangle$
8. $p_8\langle g_2,g_{12}\rangle$
9. $p_9\langle g_2,g_{11}\rangle$
10. $p_{10}\langle g_2,g_{15}\rangle$
11. $p_{11}\langle g_2,g_{16}, g_{17}, g_{18}\rangle$
12. $p_{12}\langle g_{14}\rangle$

Висновки та перспективи подальшого розвитку.

Викладений метод декомпозиції неопуклої багатогранної області в деяких випадках (наприклад, якщо багатогранник має зіркоподібну структуру) формує надлишкову кількість опуклих компонент, тому наступною є задача мінімізації кількості опуклих компонент.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *LIU Wen-Yu, LI Hua, WANG Fei, ZHU Guang-Xi,* Polyhedral Objects Metamorphosis Using Convex Decomposition and Morphology. – Virtual Reality, Springer – Verlag, 2003,6. – C. 196–204;
2. *B. Chazelle, D. P. Dobkin, N. Shouraboura, and A. Tal*. Strategies for polyhedral surface decomposition: An experimental study. – In Proc. 11th Annu. ACM Sympos. Comput. Geom. 1995. – C. 297–305.
3. *J.-M. Lien and N. M. Amato*. Approximate convex decomposition. – Texas A&M University, Parasol Lab, Dept. of Computer Science: Technical Report TR05-001, 2005, 01.
4. *Стоян Ю.Г., Гиль Н.И.*, Условия взаимного непересечения многогранных тел, – Доп. НАН Украины, 1999, 2. – С. 112–117.

5. *B.Chazelle and D. P. Dobkin.* Optimal convex decompositions. –Computational Geometry 1985, pages 63–133.
6. *Гиль Н.И., Шупикова И.А.,* Способ описания трехмерного многогранного множества набором систем линейных неравенств // Доповіді Національної академії наук України, 2000, 11. – С. 126–130.

ШУПІКОВА Ірина Олександрівна – старший викладач Житомирського державного технологічного університету.

Наукові інтереси:

– обчислювальна геометрія;

– телекомунікаційні технології;

– проектування прикладних програмних систем.

Подано 12.03.2005

Шупікова І.О. Алгоритм декомпозиції неопуклого 3-D багатогранника в задачах обчислювальної геометрії.

Шупикова И.А. Алгоритм декомпозиции невыпуклого 3-D многогранника в задачах вычислительной геометрии.

Shupikova I.A. The algorithm for 3-D non-convex polyhedron decomposition in computational geometry problems.

УДК 539

Алгоритм декомпозиції неопуклого 3-D багатогранника в задачах обчислювальної геометрії /І.О. Шупікова.

У статті розглянутий спосіб представлення 3-вимірної неопуклої багатогранної області за допомогою об’єднання набору опуклих багатогранних областей.

УДК 539

Алгоритм декомпозиции невыпуклого 3-D многогранника в задачах вычислительной геометрии /И.А. Шупикова.

В статье рассмотрен способ представления 3-мерной невыпуклой многогранной области при помощи объединения набора выпуклых многогранных областей.

УДК 539

The algorithm for 3-D non-convex polyhedron decomposition in computational geometry problems /I.A.Shupikova.

The article discusses the method for presentation of 3-D non-convex polyhedral area by union of its convex polyhedral subsets.