УДК 519.83

М.В. Козлов, к.т.н., доц.
Житомирський державний технологічний університет

ВИБІР РАЦІОНАЛЬНИХ ПРОЦЕДУР ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В УМОВАХ КОНФЛІКТУ

У статті розглянуто пошук зручного інструменту прийняття рішень в умовах конфлікту. Розроблено на орієнтованій на матричну обробку мові MATLAB програми скорочення розмірності платіжної матриці шляхом виключення свідомо гірших та дубльованих стратегій і програма знаходження оптимальних змішаних стратегій гри.

Вступ. У теорії прийняття рішень (ТПР) розглядаються ситуації, в яких дві протиборчі сторони мають конфліктні цілі [1]. Аналіз реальної конфліктної ситуації вимагає, як правило, її суттєвого спрощення – обліку лише найбільш суттєвих для конфлікту факторів. У зв'язку з цим, можна розглядати гру як спрощену математичну модель конфліктної ситуації.

Досить часто як модель конфліктної ситуації розглядається скінчена гра двох гравців з нульовою сумою, в якій задається виграш гравця 1 у вигляді матриці, яка має ще назву матричної гри. Рядок матриці відповідає номеру вживаної стратегії гравця 1, стовпець – номера вживаної стратегії гравця 2; на перетині рядка і стовпця матриці знаходиться виграш гравця 1, відповідний вживаним стратегіям. Для матричних ігор доведено, що будь-яка з них має рішення і воно може бути знайдене шляхом зведення гри до задачі лінійного програмування.

Враховуючи потребу в простих вирішеннях матричних ігор, пошуку інструментів, рішенню цих завдань присвячена справжня робота.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Розглянемо загальні положення, властиві рішенню матричних ігор.

Матрична гра може розглядатися як абстрактна гра двох гравців, у якій множина стратегій обох сторін скінчена: $M = \{X_i, i = 1,\dots n\}$; $N = \{Y_j, j = 1,\dots m\}$ [2].

Перший гравець має n, а другий – m стратегій. Кожній парі стратегій (i, j) поставлено у відповідність число a_{ij}, що виражає виграш гравця 1 за рахунок гравця 2, якщо перший гравець прийме свою i-ту стратегію, а 2-ий – свою j-ту стратегію. Кожен з гравців робить один хід: гравець 1 обирає свою i-ту стратегію, 2-ий – свою j-ту стратегію, після чого гравець 1 отримує виграш a_{ij}. На цьому гра закінчується.

Кожна стратегія гравця $i = \overline{1,n}$; $j = \overline{1,m}$ називається чистою стратегією, якщо розглянути матрицю:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1j} & \dots & \alpha_{1m} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i1} & \dots & \alpha_{ij} & \dots & \alpha_{im} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nj} & \dots & \alpha_{nm} \end{bmatrix}, \qquad (1)$$

то проведення кожної партії матричної гри зводиться до вибору гравцем 1 i-го рядка, а гравцем 2 j-го стовпця і отримання гравцем 1 виграшу a_{ij}.

Головним у дослідженні ігор є поняття оптимальних стратегій гравців, виконання яких забезпечує ним найбільший гарантований виграш при всіляких стратегіях іншої сторони. При цьому звично використовується критерій максиміну-мінімаксу [3]. Виходячи з цього, гравець 1 досліджує матрицю А так, що для кожного значення i визначається мінімальне значення виграшу, залежно від вживаних стратегій гравця 2, $\min\limits_{j} a_{ij}$, потім з цих мінімальних виграшів відшукується стратегія $i = i_o$, при якій цей мінімальний виграш буде максимальним, тобто знаходиться $\max\limits_{i} \min\limits_{j} a_{ij} = a_{i_o j_o} = \underline{\alpha}$.

Число $\underline{\alpha}$ називається нижньою чистою ціною гри і показує, який мінімальний виграш може гарантувати собі гравець 1, застосовуючи свої чисті стратегії при всіляких діях гравця 2.

Гравець 2 прагне за рахунок своїх стратегій максимально зменшити виграш гравця 1. Тому для гравця 2 відшукується $\max\limits_{i} a_{ij}$, а потім гравець 2 відшукує таку свою $j = j_1$ стратегію, при якій гравець 1 отримає мінімальний виграш, тобто знаходить $\min\limits_{j} \max\limits_{i} a_{ij} = a_{i_1 j_1} = \overline{\alpha}$.

Число $\overline{\alpha}$ називається чистою верхньою ціною гри і показує, який максимальний виграш за рахунок своїх стратегій може собі гарантувати гравець 1.

Таким чином, застосовуючи свої чисті стратегії гравець 1 може забезпечити собі виграш не менше $\underline{\alpha}$, а гравець 2 за рахунок застосування своїх чистих стратегій може не допустити виграш гравця 1 більше, ніж $\overline{\alpha}$.

При $\underline{\alpha} = \overline{\alpha}$ гра має сідлову точку в чистих стратегіях і чисту ціну гри $\upsilon = \underline{\alpha} = \overline{\alpha}$. Якщо один з гравців дотримується стратегії, відповідній сідловій точці, то інший гравець не зможе вчинити краще, ніж дотримуватися стратегії, відповідній сідловій точці. Пара чистих стратегій (i_o, j_o) гравців 1 і 2, що відповідає сідловій точці і сідловому елементу $a_{i_o j_o}$, називається вирішенням гри. При цьому i_o та j_o називаються оптимальними чистими стратегіями відповідно до гравців 1 і 2.

Дослідження в матричних іграх починається із знаходження її сідлової точки в чистих стратегіях. Якщо матрична гра має сідлову точку, то знаходженням сідлової точки закінчується дослідження гри. Якщо ж у грі немає сідлової точки в чистих стратегіях, то можна знайти нижню і верхню чисті ціни гри. Поліпшення вирішень матричних ігор слід шукати у використанні секретності застосування чистих стратегій і можливості багатократного повторення ігор у вигляді партії. Цей результат досягається шляхом застосування чистих стратегій випадково, з певною ймовірністю, що дозволяє поліпшити максимінний виграш. Змішаною стратегією гравця є повний набір вірогідності застосування його чистих стратегій. Оптимальне вирішення гри в змішаних стратегіях, так само як і рішення в чистих стратегіях, характеризується тим, що кожен із гравців не зацікавлений у відході від своєї оптимальної змішаної стратегії, якщо його супротивник застосовує оптимальну змішану стратегію, оскільки це йому невигідно [2].

Рішення матричних ігор у змішаних стратегіях можливе, використовуючи графічний метод або методи лінійного програмування [3, 4]. Оскільки графічне рішення можливо для матриць розмірів $2\times n$ або $m\times 2$, то далі розглядатимемо рішення на основі більш універсальних методах лінійного програмування.

Одна з основних теорем теорії ігор стверджує, що будь-яка матрична гра має, принаймні, одне рішення, можливо, в змішаних стратегіях.

Позначимо змішану стратегію першого гравця $P = \{p_i\}$, $i = \overline{1,n}$, де p_i – ймовірність застосування i-ої стратегії, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, $p_i \geq 0$.

Нехай змішана стратегія другого гравця $Q = \{q_j\}$, $j = \overline{1,m}$, q_j – ймовірність застосування j-их стратегій, $\sum_{j=1}^{m} q_j = 1$, $q_j \geq 0$.

У теорії ігор доводиться теорема, що вказує на еквівалентність вирішення матричної гри в змішаних стратегіях і подвійної задачі лінійного програмування. Нехай P^o і Q^o оптимальні змішані стратегії, ν – ціна гри, тоді, використовуючи цю теорему, можна записати таке:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} p_i^0 \geq \nu \quad j = 1,...,m; \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} q_i^0 \leq \nu \quad i = 1,...,n; \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} p_i^0 q_j^0 = \nu \ . \tag{4}$$

Позначимо:

$$x_i = \frac{p_i^0}{\nu}. \tag{5}$$

Поділивши (2) на ν, отримаємо таку задачу лінійного програмування:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \geq 1, \quad j = 1,...,m, \quad x_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{\nu} \to \min \cdot \tag{6}$$

З цієї задачі можна отримати оптимальні стратегії першого гравця (оперуючої сторони).

Аналогічно, якщо:

$$y_j = \frac{q_j^0}{\nu}, \qquad (7)$$

то розв'язується задача лінійного програмування для отримання оптимальних стратегій другого гравця:

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j \le 1,\ \ \mathrm{i}=1,...,\mathrm{n},\ \ \mathrm{y_j} \ge 0,\ \ \sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{m}} \mathrm{y_j} = \frac{1}{\nu} \to \max. \qquad (8)$$

Стратегії гравців, що входять в їх оптимальні змішані стратегії, називаються активними.

Складність вирішення матричної гри зростає із збільшенням розмірів матриці А. Проте у ряді випадків при аналізі платіжної матриці можна побачити, що деякі чисті стратегії не входять до множини доцільних до використання стратегій. Тоді допустима заміна початкової матриці на платіжну матрицю меншої розмірності [2, 5].

Порядок платіжної матриці може бути зменшений за рахунок виключення домінуючих і дубльованих стратегій.

Стратегія Х** суворо домінує над стратегію Х*, якщо при будь-якому варіанті поведінки протидіючого гравця виконується співвідношення:

$$A_{x^*} < A_{x^{**}}, \qquad (9)$$

де A_{x^*} і $A_{x^{**}}$ – значення виграшів при виборі гравцем відповідно стратегій Х* і Х**.

У випадку, якщо виконується співвідношення:

$$A_{x^*} = A_{x^{**}}, \qquad (10)$$

стратегія Х* називається дубльованою по відношенню до стратегії Х**.

Множину недомінуючих стратегій, отриманих після зменшення розмірності платіжної матриці, іноді називають множиною Парето.

Таким чином при дослідженні матричної гри за наявності домінуючих стратегій першого гравця і домінуючих другого гравця, можуть бути послідовно видалені шляхом виключення з платіжної матриці домінуючих рядків та домінуючих стовпців. Також віддаляються дубльовані стратегії. Звуження стратегій гри дозволяє раціонально переписати матрицю початкової гри.

У загальному вигляді вирішення матричної гри можна представити у такому порядку:

1. Спрощення платіжної матриці шляхом виключення свідомо гірших та дубльованих стратегій.

2. Визначення сідлової точки в чистих стратегіях. Якщо матрична гра має сідлову точку, то рішення в чистих стратегіях знайдено і гра вирішена.

3. За відсутності сідлової точки в чистих стратегіях проводиться перевірка умов застосовності змішаних стратегій (повторюваності гри і відсутності інформації гравців один про одного). При виконанні цих умов застосовується рішення в змішаних стратегіях. При невиконанні хоча б однієї з умов, рішення гри є знайденим, при спробі знаходження в п. 2 сідлової точки, нижні й верхні чисті ціни гри, як гарантовані виграш і програш гравців.

Основною **метою** даної роботи є розробка достатньо простого і зручного в застосуванні інструменту пошуку оптимальних рішень для конфліктної ситуації, модельованою у вигляді кінцевої гри двох гравців з нульовою сумою, згідно з розглянутим вище порядком вирішення матричної гри.

Викладення основного матеріалу. Керуючись представленим вище порядком вирішення матричної гри розглянемо зручні для користувача процедури його реалізації. Враховуючи те, що рішення пов'язано в основному з обробкою матриць, то для створення програм їх вирішення була вибрана система комп'ютерної математики MATLAB [6]. Застосування системи MATLAB, мова програмування якої орієнтована на матричну обробку, дозволяє значно спростити і полегшити реалізацію даних процедур, порівняно з традиційними мовами програмування високого рівня [7].

Нижче наведено розроблені програми вирішення матричних ігор на мові MATLAB, використовуючи як ілюстрації їх застосування два приклади.

Напочатку розглянемо процедуру скорочення розмірності платіжної матриці шляхом використання послідовного видалення свідомо гірших та дубльованих стратегій.

Для можливості скорочення розмірності платіжної матриці для першого гравця була розроблена на мові MATLAB така програма dsagame з використанням в ній програми paretov, наведеною в [8].

```
%Видалення домінуючих стратегій гравця А в матричній грі
%© Author Kozlov M.V., 18.05.2011.
type dsagame
script
clc
A=input ('Задання платіжної матриці A=');
disp('виведення матриці недомінуючих стратегій для гравця А')
Ad=paretov(A)
```

Оскільки для другого гравця при скороченні розмірності віддаляються домінуючі стовпці платіжної матриці, то для другого гравця була розроблена така програма dsbgame.

```
%Видалення домінуючих стратегій гравця B в матричній грі
%© Author Kozlov M.V., 18.05.2011.
type dsbgame
script
clc
A=input ('Задання платіжної матриці A=');
disp('виведення матриці недомінуючих стратегій для гравця B')
B=-A';
Ad=(-paretov(B))'
```

Приклад 1. У матричній грі, представленою матрицею А, необхідно видалити при їх наявності дубльовані стратегії і виділити раціональні стратегії, тобто стратегії, що залишаються після видалення домінуючих стратегій.

$$A=\begin{bmatrix}0&3&1&9&3&2\\5&3&4&6&3&3\\1&1&0&1&1&0\\2&1&1&2&1&1\\4&2&3&5&2&2\\3&2&2&4&2&3\end{bmatrix}\qquad(11)$$

У грі (11) у першого і другого гравців по шість стратегій. Застосовуючи програму dsagame, отримаємо матрицю вигляду:

$$A_1=\begin{bmatrix}0&3&1&9&3&2\\5&3&4&6&3&3\end{bmatrix}.$$

Як видно з матриці A_1 в даній грі стратегії 1 і 2 першого гравця домінують над стратегіями 3–6.

Застосовуючи до матриці A_1 програму dsbgame, використовувану для другого гравця при видаленні домінуючих стовпців платіжної матриці, отримаємо матрицю вигляду:

$$A_2=\begin{bmatrix}0&1&2\\5&4&3\end{bmatrix}.$$

У цій матриці стратегія 5 другого гравця дублює стратегію 2 і вона віддаляється. У свою чергу стратегія 2 домінує стратегію 6 і стратегія 4 домінує над стратегією 1. Стратегії 2 і 4 також видаляються.

Далі застосуємо процедуру послідовного видалення домінуючих стратегій до матриці A_2, використовуючи програму dsagame і отримаємо матрицю вигляду:

$$A_3=\begin{bmatrix}5&4&3\end{bmatrix}.$$

Після видалення домінуючих стратегій гравця 2, у кожного гравця залишилося по одній стратегії, ситуація a_{26}, у якій гравці отримають виграші 3 й -3 відповідно і ціна гри буде $\upsilon = 3$.

Зрозуміло, що розглянутий приклад представляє собою окремий випадок, коли застосуванням послідовного видалення суворо домінуючих стратегій до початкової матриці можна редукувати гру до такого вигляду. Навіть якщо відбудеться невелике скорочення розмірності платіжної матриці, це дає позитивний результат при її аналізі.

Далі розглянемо процедуру рішення в змішаних стратегіях на основі такого прикладу.

Приклад 2. Платіжна матриця задана в деяких умовних одиницях.

$$A=\begin{bmatrix}2&5&7\\8&3&1\\6&4&3\end{bmatrix}.\qquad(12)$$

Ця матрична гра не має сідлової точки. Якщо ігрова ситуація зустрічається тільки один раз і гравцю 1 треба вирішувати питання про вибір стратегії та є підстави не ризикувати, то потрібно використовувати максимінну стратегію i = 3 (тоді гравець 1 виграє не менше 3). Аналогічно гравець 2 вибирає мінімаксну стратегію j = 2 (він програє не більше 5 в цьому випадку). Якщо ж ситуація повторюється багато разів і відсутня інформація гравців один про одного, то має сенс застосовувати змішані стратегії.

Для знаходження оптимальних змішаних стратегій гри розв'яжемо задачу лінійного програмування. Використовуючи (6) і правила написання програм на мові MATLAB, запишемо цільову функцію і обмеження для гравця 1 у вигляді:

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1+x_2+x_3\to\min,$$

$$-2x_1 - 8x_2 - 6x_3 \le -1,$$
$$-5x_1 - 3x_2 - 4x_3 \le -1,$$
$$-7x_1 - x_2 - 3x_3 \le -1,$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0.$$

Представимо обмеження в матричному вигляді:

$$-A^T x \quad b_x,$$

де A^T – транспонована матриця платіжної матриці (12).

$$-A^T = \begin{bmatrix} -2 & -8 & -6 \\ -5 & -3 & -4 \\ -7 & -1 & -3 \end{bmatrix}; \qquad b_x = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Обмеження знизу запишемо у векторній формі:

$$lb_x = 0.$$

Вирішуючи подвійну задачу лінійного програмування і використовуючи (8), запишемо цільову функцію для гравця 2 у вигляді:

$$f(y_1, y_2, y_3) = y_1 + y_2 + y_3 \to \max .$$

Оскільки у мові MATLAB використовується мінімізація цільової функції, то для задоволення цієї вимоги поміняємо знак функції:

$$f(y_1, y_2, y_3) = -y_1 - y_2 - y_3 \to \min .$$

Обмеження для другого гравця на основі (8) матимуть вигляд:

$$2y_1 + 5y_2 + 7y_3 \le 1,$$
$$8y_1 + 3y_2 + 1y_3 \le 1,$$
$$6y_1 + 4y_2 + 3y_3 \le 1,$$
$$y_1 \ge 0, \quad y_2 \ge 0, \quad y_3 \ge 0.$$

Запишемо обмеження у матричному вигляді:

$$Ay \quad b_y,$$

де $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 8 & 3 & 1 \\ 6 & 4 & 3 \end{bmatrix}; \quad b_y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$

Обмеження знизу запишемо у векторній формі:

$$lb_y = 0.$$

Для знаходження оптимальних змішаних стратегій гри була розроблена програма misgame.

```
%Вирішення матричних ігор в змішаних стратегіях
%© Author Kozlov M.V., 6.08.2010.
type misgame
script
clc
A=input ('Задання платіжної матриці A=');
m=size(A);
k=m(1);
n=m(2);
disp('Знаходження змішаної стратегії першого гравця')
fx=ones(k,1);
At=-A';
bx=-ones(n,1);
lbx=zeros(k,1);
[x,fval]=linprog(fx, At, bx, [ ], [ ], lbx);
vx=abs(1/fval);
disp(sprintf('ціна гри vx=%15.3f',vx))
disp('ймовірність застосування чистих стратегій першого гравця')
p=(x.*vx);
for i=1:k
   disp(sprintf('ймовірність стратегії i=%0.f',i))
   disp(sprintf('p=%0.3f',p(i)))
end
```

```
disp('Знаходження змішаної стратегії другого гравця')
fy=-ones(n,1);
by=ones(k,1);
lby=zeros(n,1);
[y,fval]=linprog(fy, A, by, [ ], [ ], lby);
vy=abs(1/fval);
disp(sprintf('ціна гри vy=%15.3f',vy))
disp('ймовірність застосування чистих стратегій другого гравця')
q=(y.*vy);
for j=1:n
   disp(sprintf('ймовірність стратегії j=%0.f',j))
   disp(sprintf('q=%0.3f',q(j)))
end
```

Програма misgame вимагає введення тільки платіжної матриці. Дані по цільовій функції і обмеженням формуються всередині програми.

Нижче представлено результат використання файл-програми misgame для **Прикладу 2**:

```
Знаходження змішаної стратегії першого гравця
ціна гри vx=4.400
ймовірність застосування чистих стратегій першого гравця:
ймовірність стратегії i=1  p=0.400
ймовірність стратегії i=2  p=0.000
ймовірність стратегії i=3  p=0.600
Знаходження змішаної стратегії другого гравця
ціна гри vy=4.400
ймовірність застосування чистих стратегій другого гравця:
ймовірність стратегії  j=1  q=0.200
ймовірність стратегії  j=2  q=0.800
ймовірність стратегії  j=3  q=0.000
```

Таким чином, гравець 1 вибирає стратегію $i = 1$ з ймовірністю 0,4 і стратегію $i = 3$ з ймовірністю 0,6, стратегія $i = 2$ їм відкидається. Гравець 2 повинен обрати стратегії $j = 1$ з ймовірністю 0,2 і стратегію $j = 2$ з ймовірністю 0,8. Стратегія $j = 3$ їм відкидається.

З отриманих результатів видно, що стратегії 1 і 3 для гравця 1 є активними, а 2 стратегія – пасивною. Для гравця 2 активні стратегії 1 і 2.

Оскільки ціна гри тут виявилася позитивною, то дана ситуація сприятливіша для першого гравця, якщо він застосовуватиме свою оптимальну змішану стратегію. Якщо він відхилиться від своєї оптимальної стратегії, то ситуація може виявитися сприятливішою для другого гравця.

Висновки. Розроблені на орієнтованій на матричну обробку мові MATLAB програми скорочення розмірності платіжної матриці шляхом виключення свідомо гірших та дубльованих стратегій і програма знаходження оптимальних змішаних стратегій гри, є достатньо зручним інструментом прийняття оптимальних рішень в умовах конфлікту, що був продемонстрований представленими в статті прикладами.

Список використаної літератури:

1. *Черноруцкий И.Г.* Методы принятия решений / *И.Г. Черноруцкий*. – СПб. : БХВ-Петербург, 2005.
2. *Петросян Л.А.* Теория игр / *Л.А. Петросян, Н.А. Зенкевич, Е.А. Семина*. – М. : Высшая школа, 1998.
3. *Конюховский П.В.* Математические методы исследования операций в экономике / *П.В. Конюховский*. – СПб. : Питер, 2000.
4. *Таха Хэмди А.* Введение в исследование операций / *Хэмди А. Таха*. – изд. 7-ое. – М. : Издательский дом “Вильямс”, 2007.
5. *Матвеев В.А.* Конечные бескоалиционные игры и равновесия / *В.А. Матвеев*. – Псков, 2005.
6. *Дьяконов В.П.* MATLAB. Полное руководство / *В.П. Дьяконов*. – М. : ДМК Пресс, 2010.
7. *Солонина А.И.* Цифровая обработка сигналов. Моделирование в MATLAB / *А.И. Солонина, С.М. Арбузов*. – СПб. : БХВ-Петербург, 2008.
8. *Козлов М.В.* Пошук оптимальних вирішень багатокритерійних завдань / *М.В. Козлов* // Вісник ЖДТУ/ Технічні науки. – 2011. – № 4 (59). – С. 59–65.

КОЗЛОВ Михайло Венедиктович – кандидат технічних наук, доцент кафедри автоматики і управління в технічних системах Житомирського державного технологічного університету.

Наукові інтереси:
– прилади та методи вимірювання електричних величин;
– прийняття оптимальних рішень.
Тел.: (0412)44–59–26.
E-mail: mike21k@rambler.ru

Стаття надійшла до редакції 20.01.2012

Козлов М.В. Вибір раціональних процедур прийняття рішень в умовах конфлікту
Козлов М.В. Выбор рациональных процедур принятия решений в условиях конфликта
Kozlov M.B. Choice of rational procedures of making a decision in the conditions of conflict

УДК 519.83

Выбор рациональных процедур принятия решений в условиях конфликта / М.В. Козлов
В статье рассмотрен поиск удобного инструмента принятия решения в условиях конфликта. Разработаны на ориентированном на матричную обработку языке MATLAB программы сокращения размерности платежной матрицы путем исключения заведомо худших и дублирующих стратегий и программа нахождения смешанных стратегий игры.

УДК 519.83

Choice of rational procedures of making a decision in the conditions of conflict / M.B. Kozlov
In the article the search of comfortable instrument of decision-making is considered in the conditions of conflict. Developed in language of MATLAB, oriented to matrix treatment, of the programs of reduction of dimension of pay matrix by an exception scienter of worst and dublicate strategies and program of finding of the mixed strategies of game.