# ПРИЛАДИ

УДК 621.396.969

**Л.Б. Каневський, к.т.н.**
*Житомирський військовий інститут імені С.П. Корольова*

## ОРГАНІЗАЦІЯ ОПТИМАЛЬНИХ НАВКОЛОЗЕМНИХ КОСМІЧНИХ МАНЕВРІВ В УМОВАХ ЩІЛЬНОЇ ЗАСЕЛЕНОСТІ КОСМІЧНОГО ПРОСТОРУ

*Актуальність питання, що розглядається в статті, обумовлена стрімким зростанням дисбалансу між кількістю космічних апаратів, що запускаються й функціонують на навколоземних орбітах, та тією кількістю космічних апаратів і блоків запуску, що звідти виводяться. Тому потреба забезпечення безпеки польотів космічних апаратів вимагає пошуку нових та ефективних методів маневрування в космічному просторі. У статті було проаналізовано систему показників для зміни руху космічного апарату при переході з однієї орбіти на іншу у задану точку з мінімальними енергетичними затратами. Запропоновані підходи щодо організації космічних маневрів навколо Землі з урахуванням щільної заселеності космічного простору. При цьому основний акцент робився не на видову характеристику орбіт, а на оптимізацію імпульсного орбітального перельоту, де більшою мірою досліджено компланарне розташування орбіт та основних принципів щодо покращення ймовірнісної задачі визначення небезпечного зближення між космічними об'єктами в навколоземному просторі. Розглянута методологія оптимізації параметрів переходу космічного апарату між компланарними орбітами може бути застосована і для некомпланарного розміщення орбіт за умови врахування поправок на кут між площинами орбіт.*

***Ключові слова:*** *навколоземний простір; орбітальний рух космічних об'єктів; маневр космічного апарату; оптимальні переходи; ймовірність небезпечного зближення.*

**Вступ.** Освоєння та вивчення людством навколоземного (космічного) простору дало змогу створити та впровадити велику кількість високотехнологічних систем (зв'язок, супутникове телебачення, навігація та інші геоінформаційні системи), життя без яких важко собі уявити. В результаті ракетокосмічної діяльності людини виникла низка проблем, однією з яких є засмічення космічного простору і ризик зіткнення космічних об'єктів (КО).

Актуальність організації космічних маневрів зумовлена щорічним збільшенням співвідношення кількості космічних апаратів (КА), що запускаються на навколоземні орбіти, до кількості КО, що звідти виводяться. До них належать нефункціонуючі КА, відпрацьовані ступені ракетоносіїв та фрагменти руйнувань, утворених через найрізноманітніші обставини. При вирішенні завдання побудова найбільш прийнятних траєкторій руху КА, що досягають заздалегідь поставленої мети при мінімальних витратах палива на кожному етапі (тобто енергетично оптимальних орбіт), в даний час є однією з найбільш значущих проблем, що потребують постійного коригування на етапі отримання рішення.

**Постановка проблеми.** Відповідно до першого закону Кеплера, орбіта являє собою криву другого порядку, в одному з фокусів якої знаходиться центр тяжіння. Форма і розміри орбіти, що визначають її тип, залежать від початкових умов руху. Для знаходження оптимальної траєкторії потрібно визначити безліч допустимих рішень для переходу між орбітами різного типу (як закритого – еліптичного, так і відкритого – гіперболічного і параболічного) з урахуванням можливих обмежень, а потім обрати найбільш зручний маршрут для послідовного обслуговування заданого КА. Розглядають задачі оптимального керування, коли потрібно [1]:

– здійснити корекцію початкової орбіти або перехід між заданими граничними орбітами;

– здійснити розворот, тобто змінити розташування лінії апсид площини орбіти;

– потрапити в потрібну точку простору в той момент, коли там або як завгодно близько перебуватиме потрібний об'єкт (жорстка зустріч);

– потрапити в потрібну точку простору в той момент, коли там або як завгодно близько перебуватиме потрібний об'єкт і додатковим включенням двигунів можна вирівняти швидкості (м'яка зустріч);

– опинитися у процесі руху по перехідній траєкторії в деякій області, гранично наближеній до потрібного об'єкта, з малою відносною швидкістю для його обстеження (інспекція) або обслуговування (заправка, ремонт) [2].

У загальному вигляді критерії оптимальності можна визначити як:

– енергетичні, тобто такі, що спроможні забезпечити мінімальну витрату палива;

– тимчасові, тобто такі, що реалізують перехід за найменший або заданий час;

– кутові, тобто такі, що можуть забезпечити перехід з мінімальною або заданою кутовою дальністю;

– кінцеві, тобто такі, що дають змогу отримати потрібні значення абсолютних або відносних параметрів руху в кінцевій точці маневру для зустрічі;

– об'єктні, тобто такі, що спроможні забезпечити найбільшу кількість проінспектованих об'єктів.

Енергетично оптимальні вирішення завдань з вільним часом дають глобально оптимальні рішення, проте вони, як правило, вимагають дуже великих проміжків часу очікування настання моментів, сприятливих для старту і виходу на ці оптимальні орбіти переходу для зустрічі з іншим об'єктом. Енергетично оптимальні переходи з урахуванням обмежень часу руху по орбітах дають лише локально оптимальні (щодо часу старту) рішення. Як правило, чим більша можлива відстрочка старту, тим більш оптимальне рішення ми отримуємо, тобто при вільному виборі часу очікування реалізується абсолютно оптимальне вирішення відповідного завдання. Зазначимо, що завдання з урахуванням часу руху по орбітах є істотно більш складними для дослідження. Обмеження в завданнях оптимізації часто відіграють вирішальну роль, а значення параметрів знаходяться на межі допустимої області. Типологія орбіт також у деяких випадках є як граничною умовою оптимізації управління КА.

**Метою статті** є аналіз тенденцій розвитку методології контролю і управління КА для утримування його на необхідній орбіті з подальшою розробкою шляхів удосконалення багаторівневого розподіленого оцінювання показників та критеріїв КА в реальному масштабі часу для максимально ефективного переходу в іншу точку простору з урахуванням щільної заселеності космічного простору.

**Огляд останніх досліджень і публікацій.** Аналіз наукових робіт за даною проблематикою вказує на велику кількість публікацій, в яких вивчено різні аспекти і розглянуто окремі випадки маневрування: міжорбітальні перельоти в околиці Землі і польоти до Місяця, міжпланетні перельоти і польоти до інших об'єктів, але здебільшого в таких роботах взагалі не враховується факт щільного, на сьогодні, заселення навколоземних орбіт як діючими, так і нефункціонуючими КА.

З'явилися роботи узагальнюючого характеру для оптимального управління рухом КА для знаходження енергетично оптимальних маневрів у гравітаційному полі і завдань швидкодії [1, 3, 4], у тому числі з урахуванням впливу багатьох фізичних факторів і обмежень, які призводять до ускладнення в постановках завдань та отриманих рівняннях. У багатьох реальних завданнях як початкові наближення застосовуються рішення завдань в спрощених постановках, коли дію збурень вважають малою, якою можна знехтувати, а активні ділянки польоту при роботі двигуна апроксимують миттєвою зміною вектора швидкості, і лише потім використовують методи послідовного уточнення.

Як правило, на перший план виходять питання дослідження властивостей рівнянь і рішень, кількість імпульсів для реалізації маневру, можливі розгалуження, отримання зручних початкових наближень і алгоритмів подальшого уточнення [1, 5].

Проведені дослідження в роботах [6, 7] дають змогу зробити наступні висновки:

– найоптимальніший режим маневрування для обслуговування або інспекції – це відсутність маневрів (включень двигунів), якщо всі поставлені завдання можна вирішити, продовжуючи рух за початковою (вдало обраною) орбітою, що саме вже є складним завданням;

– можливе існування оптимальних маршрутів, коли окремі етапи і переходи між двома орбітами не є оптимальними;

– можливе існування оптимального маршруту часткового обслуговування вибірки із загальної множини об'єктів, якщо інші етапи можуть виявитися нездійсненними;

– можливе існування додаткових критеріїв (крім завдань швидкодії або по витраті), коли потрібне обслуговування деяких об'єктів у першочерговому порядку.

**Викладення основного матеріалу.** Для організації переходу КА з однієї орбіти на іншу необхідно вирішити одне з основних завдань механіки космічного польоту, а саме – провести розрахунок маневрів КА. Маневром є цілеспрямована зміна параметрів руху КА, в результаті якого первісна траєкторія вільного польоту (початкова орбіта) змінюється на деяку іншу (кінцева орбіта). А з метою гарантування безпеки переходу КА з однієї орбіти на іншу необхідно вирішити завдання визначення небезпечного зближення між цільовим КА та оточуючими його КО навколоземного простору.

Зазвичай маневр здійснюється за допомогою рухової установки, а орбіту, що зв'язує початкову та кінцеву орбіти, називають орбітою (або траєкторією) перельоту.

Для оптимізації маневру необхідно провести розрахунки з метою визначення таких умов його проведення (тривалість роботи, напрямок вектора тяги та кількість включень двигуна), за яких витрата палива або час перельоту виявляться мінімальними.

Слід зазначити, що для деяких маневрів замість рухової установки можливим є використаня аеродинамічних сил, що виникають при русі КА в атмосфері планети.

До основних перехідних моментів належать компланарні, пов'язані з міжорбітальними перельотами в одній площині, та просторові маневри, що вимагають зміни площини руху.

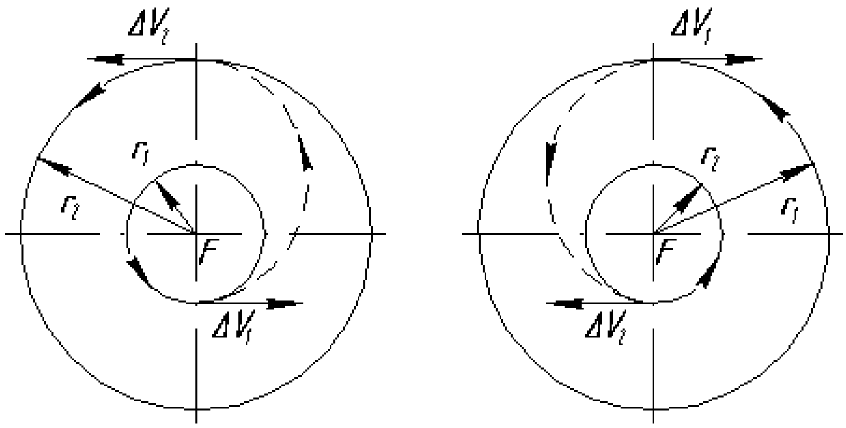
Таким чином, для організації оптимальних космічних маневрів необхідно обрати конкретні моменти часу включення і виключення двигуна, кількість включень (або активних ділянок), розмір і орієнтацію вектора тяги при кожному включенні. Тобто, розрахунок такого маневру зводиться до визначення кількості імпульсів швидкості $\Delta V, i = 1, 2, \ldots, n,$ їх орієнтації та точок прикладання.

Отримане рішення може використовуватися для оцінки потрібних витрат палива, а також як гарне початкове наближення при вирішенні завдання в точній постановці з урахуванням обмеженої величини тяги двигуна.

Дві кругові орбіти з незбіжними радіусами не мають точок перетину, тому для перельоту між ними потрібно докласти не менше двох імпульсів швидкості. За допомогою першого імпульсу швидкості КА переміщується з початкової кругової орбіти на орбіту перельоту, яка перетинає кінцеву кругову орбіту або доторкається до неї. У момент досягнення кінцевої орбіти КА повідомляється другий імпульс швидкості для переведення його на цю орбіту.

Оптимальну схему двоімпульсного перельоту між компланарними круговими орбітами вперше запропонував Гоманн [8]. Траєкторія перельоту типу Гоманна розташовується в площині початкової та кінцевої кругових орбіт і стосується їх. Отже, імпульси швидкості прикладаються в апсидальних точках траєкторії польоту, яка являє собою напівеліпс, що стосується меншою кругової орбіти в перицентрі, а більшою кругової орбіти в апоцентрі. Таку траєкторію перельоту часто називають полуеліпсом Гоманна (рис. 1).

Пізніше Лоуден довів оптимальність такого маневру [3]. Розглянемо іншу методу доведення, засновану на прямому дослідженні мінімуму залежності сумарних витрат характеристичної швидкості (що в цілому призведе до енергетичної оптимізації траєкторії) на двоімпульсний маневр від параметрів, які визначають цей маневр.




*а)* *б)*

*Рис. 1. Компланарний двоімпульсний переліт типу Гоманна:*
*а) з меншої орбіти на більшу; б) з більшої орбіти на меншу*

Будемо вважати, що радіус початкової кругової орбіти $r_1$ менший за радіус кінцевої кругової орбіти $r_2$, тобто $r_1 < r_2$. Маневр повністю визначається початковим імпульсом швидкості $\Delta V_1$. Дійсно, нехай задані величина першого імпульсу $V_1$ і кут $\varphi$ між напрямком цього імпульсу і вектором кругової швидкості $V_{кр1}$ в точці $M_1$ початку маневру (рис. 2).

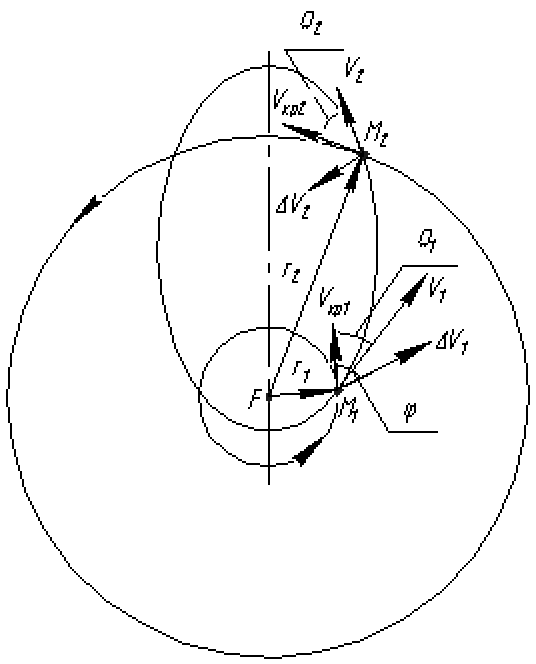



*Рис. 2. Схема компланарного перельоту між круговими орбітами*

При виконанні умов $\varphi = 0$ та $\cos\Omega_2 = 1$ (або $\Omega_2 = 0$) реалізується траєкторія перельоту типу напівеліпса Гоманна, що стосується початкової та кінцевої кругових орбіт. Відповідні імпульси швидкості обчислюються наступним чином [9]:

$$\Delta V_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot \tilde{r}}{1+\tilde{r}}} - 1;$$

$$\Delta V_2 = \frac{1}{\sqrt{\tilde{r}}} \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{\tilde{r}}{1+\tilde{r}}}\right),$$

де $\tilde{r}$ – відносний радіус (тобто $r_2/r_1$).

Зауважимо, що між першим і другим імпульсами швидкості при такому маневрі може розташовуватися будь-яка непарна кількість півобертів орбіти перельоту, що має радіус перицентра $r_п = r_1$ та радіус апоцентра $r_п = r_2$.

У розглянутій постановці довжина орбіти (траєкторії) перельоту, що містить непарну кількість півеліпсів Гоманна, не впливає на величину сумарного приросту швидкості при маневрі, тобто є енергетично оптимальною.

Наведений приклад оптимальності траєкторії типу полуеліпса Гоманна відповідає перельоту з кругової орбіти меншого радіуса на кругову орбіту більшого радіуса.

Через оборотність завдання така траєкторія є оптимальною і в разі перельоту з кругової орбіти більшого радіуса на кругову орбіту меншого радіуса.

Розглянемо у декілька більш загальній постановці триімпульсний переліт між круговими орбітами, подібний до запропонованого Штернфельдом.

Для визначеності будемо вважати, що переліт відбувається з кругової орбіти меншого радіуса $r_1$ на кругову орбіту більшого радіуса $r_2$.

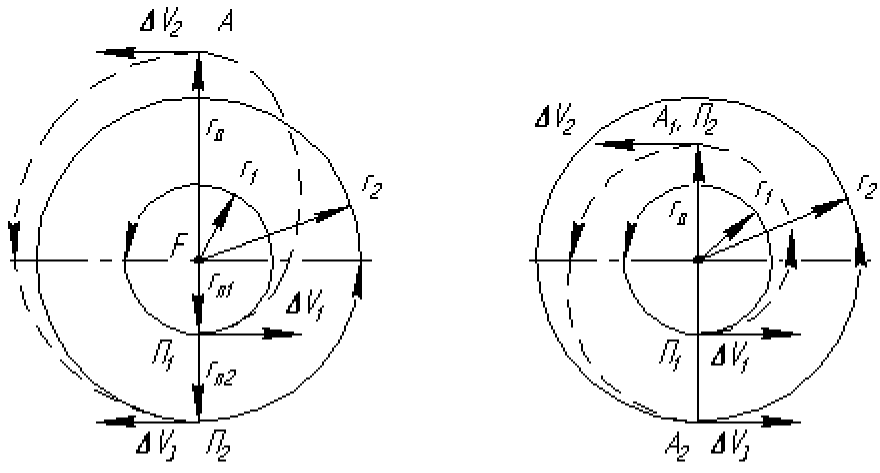
За допомогою першого, розгінного імпульсу швидкості $\Delta V_1$ КА переміщається на еліптичну орбіту, радіус перицентра якої дорівнює радіусу початкової кругової орбіти ($r_{п1} = r_1$).

З метою спільності аналізу приймемо, що величина радіуса апоцентра траєкторії перельоту може бути як більше за радіус кінцевої орбіти ($r_a > r_2$), так і меншою за неї ($r_a > r_2$).

У апоцентрі траєкторії перельоту прикладається другий, теж розгонний імпульс швидкості $\Delta V_2$ для збільшення радіуса перицентра (або нового апоцентра, якщо $r_a < r_2$) до величини, що дорівнює радіусу кінцевої орбіти $r_{п2} = r_2$ (або $r_{a2} = r_2$).

При досягненні перицентра (апоцентра) прикладається третій імпульс, гальмівний (якщо $r_a < r_2$) або розгінний (якщо $r_a < r_2$), для вирівнювання швидкості до кругової, відповідної орбіті радіуса $r_2$.

Обидві можливі схеми триімпульсного маневру наведено на рисунку 3.




а) б)

*Рис. 3. Схема триімпульсного перельоту між круговими орбітами:*
*а) з перетином заданої орбіти; б) без перетину заданої орбіти*

Такий маневр часто називають подвійним еліптичним або біелиптичним.

Виходячи з відомих досліджень, можна зробити ряд висновків.

При $1 < \tilde{r} < 11{,}94$ вигідніше використовувати двоімпульсну траєкторію перельоту типу Гоманна. У діапазоні $11{,}94 < \tilde{r} < 15{,}58$ можна обрати таку величину радіуса апоцентра траєкторії переміщення $\tilde{r} < r_a < \infty$, за якої тримпульсний біеліптичний переліт виявляється економічнішим, ніж двоімпульсний переліт типу Гоманна. Для значень $\tilde{r} > 15{,}58$ триімпульсний переліт з будь-яким радіусом апоцентра ($\tilde{r} < r_a$) економічніший, ніж двоімпульсний.

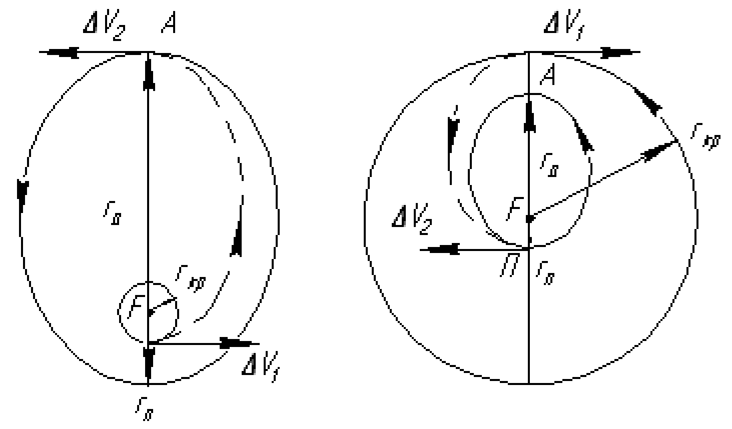
Зазначимо, що виграш, що отримується при використанні триімпульсного перельоту замість гоманновского, в найкращому випадку, не перевищує величину $0{,}04 \cdot V_{кр1}$, тобто 8 % від сумарного приросту швидкості для двоімпульсного перельоту.

Позначимо через $\tilde{r}_{a\,\min}$ величину радіуса апоцентра, за якого триімпульсний біеліптичний переліт і двоімпульсний переліт типу Гоманна вимагають однакового сумарного приросту швидкості для будь-якого значення параметра $\tilde{r}$ з діапазону.

Тоді триімпульсний біеліптичний переліт економічніший за двоімпульсний, якщо $\tilde{r}_{a\,\min} < r_a$. Необхідно зазначити, що час на триімпульсний маневр у кілька разів більший, ніж час на двоімпульсний.

Розглянемо задачу перельоту КА з початкової кругової орбіти радіуса $r_{кр}$ на еліптичну орбіту, яка задана величинами радіусів перицентра $r_{п2}$ і апоцентра $r_{а2}$ (або значень ексцентриситету $e_2$ і параметра $p_2$). Якщо ці орбіти не перетинаються, то для виконання маневру потрібно не менше двох імпульсів швидкості. У разі перетину орбіт можливий також одноімпульсний маневр.

При дослідженні завдання оптимізації двоімпульсного маневру перельоту між непересічними круговою та еліптичною орбітами було показано, що мінімальне сумарне збільшення швидкості має місце на траєкторії типу Гоманна [6].




а) б)

*Рис. 4. Оптимальний переліт між непересічними круговою та еліптичною орбітами:*
*а) з внутрішньої кругової орбіти; б) з зовнішньої кругової орбіти*

Перицентр оптимальної «енергетичної» траєкторії знаходиться на початковій круговій орбіті, а апоцентр збігається з апоцентром кінцевої еліптичної орбіти. Якщо оптимальний переліт здійснюється з зовнішньої кругової орбіти на внутрішню еліптичну, то апоцентр траєкторії перельоту повинен знаходитися на початковій круговій орбіті, а перицентр – збігатися з перицентром кінцевої еліптичної орбіти. Сумарний приріст швидкості для виконання маневру, віднесений до кругової швидкості $\Delta V_{кр} = \sqrt{\mu / r_{кр}}$ обчислюється за формулою:

$$\Delta V_{\Sigma} = \sqrt{\frac{2\cdot\tilde{r}_а}{1+\tilde{r}_а}} - 1 + \frac{1}{\sqrt{\tilde{r}_а}}\cdot\left(\sqrt{\frac{2\cdot\tilde{r}_п}{\tilde{r}_п+\tilde{r}_а}} - \sqrt{\frac{2}{1+\tilde{r}_а}}\right),$$

а в разі перельоту з внутрішньої кругової орбіти на зовнішню еліптичну і за формулою:

$$\Delta V_{\Sigma} = 1 - \sqrt{\frac{2\cdot\tilde{r}_а}{1+\tilde{r}_а}} - 1 + \frac{1}{\sqrt{\tilde{r}_а}}\cdot\left(\sqrt{\frac{2\cdot\tilde{r}_п}{\tilde{r}_п+\tilde{r}_а}} - \sqrt{\frac{2}{1+\tilde{r}_а}}\right).$$

Якщо кругова й еліптична орбіти перетинаються, то поряд з двоімпульсним можливий також одноімпульсний маневр. Порівняння потрібного збільшення швидкості для обох видів маневру показало, що двоімпульсний маневр типу Гоманна економічніший за одноімпульсний. При цьому перицентр траєкторії перельоту знаходиться на початковій круговій орбіті, а апоцентр збігається з апоцентром еліптичної орбіти. За допомогою першого розгінного імпульсу $\Delta V_1$ швидкість збільшується від кругової до еліптичної, а за допомогою другого гальмівного імпульсу $\Delta V_2$ швидкість в апоцентрі зменшується до такої величини, щоб радіус перицентра зменшився з *rкр* до необхідної величини *rп*.

За рахунок єдиного імпульсу $\Delta V$ вектор кругової швидкості $V_{кр}$ змінюється до вектора еліптичної швидкості $V_{ел}$, що забезпечує рух по заданій орбіті.

Лише в тих випадках, коли кругова орбіта торкається апсидальних точок еліптичної орбіти, оптимальний двоімпульсний маневр вироджується в одноімпульсний. Якщо кругова орбіта торкається еліптичної в апоцентрі, то імпульс повинен бути гальмівним, а якщо в періцентрі – розгінним.

Через оборотність розглянутих питань оптимальні траєкторії перельоту з еліптичної орбіти на кругову будуть такими самими, як для перельоту з кругової орбіти на еліптичну. При цьому величини імпульсів швидкості зберігаються, а їх напрямок змінюється на протилежний.

При вирішенні загального завдання перельоту КА між компланарними еліптичними орбітами необхідно визначити кількість імпульсів швидкості для виконання маневру, початкову та кінцеву точки траєкторії перельоту (якщо вони не задані), взаємну орієнтацію орбіт (коли напрями великих півосей не фіксовані).

Було доведено, що якщо задане положення точки відльоту з вихідної еліптичної орбіти, а точка прильоту на кінцеву еліптичну орбіту може бути обрана з умови найменшої величини сумарного приросту швидкості при двоімпульсном маневрі, то оптимальна «енергетична» траєкторія перельоту повинна закінчуватися в апоцентрі зовнішньої орбіти (або в перицентрі внутрішньої орбіти, коли переліт здійснюється з більшою орбіти на меншу) [10]. Якщо задане положення кінцевої точки, а точка відльоту може бути обрана з тієї самої умови, то оптимальна траєкторія повинна починатися в перицентрі внутрішньої орбіти (або апоцентрі зовнішньої при перельоті з більшою орбіти на меншу).

Величина сумарного приросту швидкості на двоімпульсний переліт зменшується, якщо великі осі орбіт розташовуються уздовж однієї прямої. Такі орбіти часто називають коаксіальними. Коаксіальні орбіти можуть бути спрямовані в один бік, коли різниця їх аргументів перицентра дорівнює нулю, або в протилежні боки, коли ця різниця дорівнює $\pi$.

Для перельоту між коаксіальними орбітами доведено наступне загальне правило [3]: якщо коаксіальні орбіти перетинаються, або спрямовані в один бік, то абсолютна оптимальна траєкторія перельоту повинна стосуватися обох орбіт в апсидальних точках і проходити через апоцентр з найбільшою величиною радіус-вектора. Якщо осі коаксіальних орбіт спрямовані в протилежні боки і ці орбіти не перетинаються, то оптимальною може виявитися будь-яка з двох траєкторій, що стосуються обох орбіт в апсидальних точках. Вибір тієї чи іншої траєкторії перельоту визначається відносними розмірами вихідної і кінцевої орбіт. Потрібні збільшення швидкості на оптимальний двоімпульсний маневр легко обчислити для обраної схеми перельоту і заданих величин радіус-векторів апсидальних точок орбіт.

Розглянемо переліт з кругової орбіти на компланарну гіперболічну. Таке завдання виникає, наприклад, при розгоні з навколоземної кругової орбіти на міжпланетну траєкторію. Знайдене оптимальне рішення можна буде використовувати і для оберненого завдання, тобто перельоту з гіперболічної орбіти на кругову.

Припустимо, що задана лише енергія гіперболічної орбіти (або гіперболічний надлишок швидкості $V_\infty$), а перицентрична відстань і орієнтація осей гіперболічної орбіти залишаються довільними. Необхідно визначити оптимальний маневр, який задовольняє вимогам завдання з найменшим сумарним приростом швидкості. Такий маневр можна виконати за допомогою одного (рис. 5), двох, трьох і більшої кількості імпульсів.

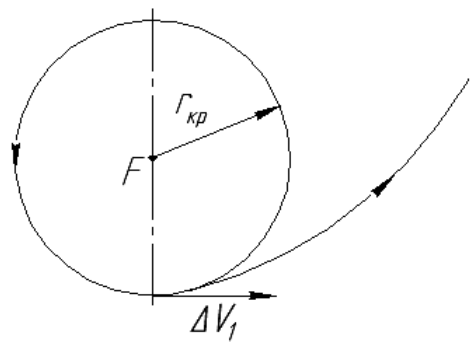



*Рис. 5. Одноімпульсний переліт з кругової орбіти на гіперболічну*

Обмежимося трьома імпульсами, щоб не дуже ускладнювати завдання.

У разі двоімпульсного маневру оптимальна траєкторія повинна торкатися вихідної кругової орбіти і кінцевої гіперболічної орбіти, тобто імпульси швидкості прикладаються по дотичній. Залежно від співвідношень радіуса кругової орбіти, радіуса перицентра і радіальної відстані до асимптоти гіперболічній орбіти (прицільної дальності) оптимальна точка виходу на гіперболічну орбіту буде збігатися або з її перицентром, або з нескінченно віддаленою точкою [5]. У першому випадку траєкторія перельоту є еліптичною, а в другому – гіперболічною з нескінченно великим часом руху. Найбільший практичний інтерес становить еліптична траєкторія перельоту, яка, по суті, є модифікованою траєкторією Гоманна.

Тобто, якщо радіус перицентра може бути обраний яким завгодно малим, то маневр повинен здійснюватися наступним чином. Кругова швидкість апарату на вихідній орбіті гаситься майже до нуля, і апарат «падає» на притягальний центр майже по вертикальній траєкторії, яка після проходження повз цього центру змінює свій напрямок руху майже на протилежний. В точці мінімальної відстані від центру (в перицентрі перехідної орбіти) швидкість руху $V_п$ дуже велика, і навіть невелике збільшення швидкості руху $\Delta V_2$ дозволяє отримати значне прирощення енергії $\Delta \mathring{A} \approx V_n \cdot \Delta V_2$. Внаслідок цього еліптична перехідна орбіта апарату може бути перетворена в гіперболічну з великим надлишком швидкості $V_\infty$. Якщо заданий гіперболічний надлишок швидкості менший за параболічну швидкість на відстані $r_{кр}$ від центру, тобто $V_\infty < V_{пар}$ (або $n < 1$), одноімпульсний маневр виявляється економічнішим за двоімпульсний. Єдиний імпульс має прикладатися по дотичній в деякій точці кругової орбіти, що обирається з урахуванням необхідної орієнтації гіперболічної орбіти. Цей випадок являє найбільший практичний інтерес, оскільки гіперболічний надлишок швидкості зазвичай істотно менший за параболічну швидкість на відстані вихідної кругової орбіти. Якщо $V_\infty > V_{пар}$ (або $n > 1$), більш економічним виявляється двоімпульсний маневр. Перший імпульс швидкості прикладається до кругової орбіти проти напрямку руху для переміщення КА на еліптичну орбіту, радіус перицентра якої дорівнює радіусу перицентра гіперболічної орбіти *rп*. При цьому величина *rп* повинна обиратися мінімально допустимою, щоб знизити сумарний приріст швидкості на маневр $\Delta V_{\Sigma}$. У перицентрі траєкторії перельоту додається другий імпульс по дотичній для переміщення КА на гіперболічну траєкторію.

Подібно біеліптичному перельоту між круговими орбітами можливий триімпульсний біеліптичний переліт з кругової орбіти на гіперболічну [3]. За допомогою першого імпульсу швидкості КА переміщується на еліптичну орбіту з радіусом апоцентра $ra > rкр$. За рахунок другого імпульсу швидкості, що прикладається в апоцентрі, відбувається зменшення радіуса перицентра з $r_{кр}$ до $r_п$. Нарешті, в перицентрі прикладається третій імпульс швидкості, щоб забезпечити перехід на гіперболічну орбіту з заданим гіперболічним надлишком швидкості $V_\infty$. Сумарний приріст швидкості на триімпульсний маневр, віднесений до $V_{кр}$, обчислюється за формулою:

$$\Delta V_{\Sigma} = \frac{\Delta V_{\Sigma}}{V_{кр}} = \sqrt{\frac{2\cdot\tilde{r}_a}{1+\tilde{r}_a}} - 1 + \frac{1}{\sqrt{\tilde{r}_a}}\cdot\left(\sqrt{\frac{2\cdot\tilde{r}_п}{\tilde{r}_п+\tilde{r}_a}} - \sqrt{\frac{2}{1+\tilde{r}_a}}\right) +$$

$$+\sqrt{\frac{2}{\tilde{r}_п} + V_\infty^2} - \frac{1}{\sqrt{\tilde{r}_a}}\cdot\sqrt{\frac{2\cdot\tilde{r}_п}{\tilde{r}_п+\tilde{r}_a}},$$

де $\tilde{r}_a = \frac{r_a}{r_{кр}}, \tilde{r}_n = \frac{r_n}{r_{кр}}, \tilde{V}_\infty = \frac{V_\infty}{V_{кр}}$

У разі кінцевих значень $\tilde{r}_a$ триімпульсний маневр економічніший за одноімпульсний лише в області великих величин $V_\infty$, а при малих $V_\infty$ вигіднішим є одноімпульсний маневр, який, до того ж, потребує нескінченно малого часу на реалізацію. Таким чином, для розглянутого завдання перельоту з кругової орбіти на гіперболічну при заданій величині $V_\infty$ найбільший інтерес щодо економічності і часу реалізації викликає одноімпульсний маневр.

Якщо площини початкової і кінцевої орбіт не збігаються, то в процесі перельоту між ними необхідно змінити площину руху. Сумарне прирощення швидкості на просторовий маневр істотно більше, ніж на переліт між такими самими компланарними орбітами. Простим завданням перельоту між некомпланарними орбітами є поворот площини руху без зміни форми і розмірів орбіти. Можливі різноманітні способи повороту площини руху. Найпростіший маневр – одноімпульсний. Єдиний імпульс прикладається на лінії перетину площини початкової і кінцевої орбіт [11].

Розглянута методологія оптимізації параметрів переходу КА з орбіти на орбіту більшою мірою зачіпає компланарне розташування орбіт. При некомпланарному розміщенні орбіт використовуються ті самі передумови з поправкою на кут між площинами орбіт.

При вирішенні завдання визначення небезпечного зближення між двома КО центральне місце займає задача прогнозування параметрів руху КА, основними вимогами якої є високі точність та оперативність її розв'язку. Оскільки прогнозування просторових параметрів руху КО на деякий момент часу є завданням визначення ймовірнісної області, то по суті визначення ризику зіткнення між двома КО у космосі являє собою завдання знаходження перетину двох імовірнісних областей, які характеризуються кореляційними матрицями похибок прогнозованих параметрів КО. Відповідно, при нормальному розподілі випадкових величин визначення ймовірності ризику небезпечних зближень в обраний момент часу буде розраховуватись за таким виразом [12]:

$$P_{ç} = \frac{1}{2(\sqrt{\pi})^3\sqrt{det(K_1)}}\iiint\limits_{(S_k)} exp\left[-\frac{1}{2}\left(X_1\, K_1^{-1}\, X_1\right)\right]dxdydz,$$

де $S_k$ – рівняння еліпсоїда рівних імовірностей (розсіяння) другого КО відносно першого з просторовими координатами обраної системи координат, що описується за виразом:

$$\left(X - X_{21}\right)K_2^{-1}\left(X - X_{21}\right)^T = k^2,$$

де $X_{21} = X_2 - X_1$ – положення другого КО відносно першого; $X_1, X_2$ – координати відповідних КО в геоцентричній абсолютній системі координат; $K_1, K_2$ – коваріаційні матриці першого та другого КО, що характеризують їх положення; $k$ – кратність головних осей еліпсоїда розсіяння до середньоквадратичного відхилення.

Аналіз виразу визначення ймовірності ризику небезпечних зближень вказує на те, що підвищення ефективності вирішення завдання щодо своєчасного та достовірного визначення ризику зіткнення КО прямо залежить від підвищення точності оцінок параметрів, отриманих у результаті прогнозування їх руху в навколоземному просторі. По суті прогнозування описується диференціальними рівняннями, тоді з формалізованої точки зору розрахунок імовірності буде зводитись до розрахунку імовірнісних характеристик просторових параметрів динамічних об'єктів за стохастичним диференціальним рівнянням [13].

З метою зменшення похибок екстраполяції пропонується додатково врахувати нелінійні параметри – другі похідні від прогнозованих параметрів за початковими умовами. З проведеного аналізу [14, 15] встановлено, що для цього потрібно розраховувати другі частинні похідні, ефективне визначення яких числовими методами неможливе внаслідок труднощів, що виникають при заміні матриці частинних похідних її кінцево-різницевою апроксимацією і не можливістю проведення розрахунку частинних похідних вищого порядку. Позбавитись цієї проблеми можливо за рахунок застосування операційного методу диференціальних перетворень.

**Висновки.** В умовах обмеженості викладення матеріалу в роботі представлені дослідження лише компланарних переходів, де існує більш ніж 16 варіантів можливого переміщення КА з однієї орбіти на іншу. Однак ця цифра не остаточна, оскільки для кожного варіанта існує дві можливості: перехід з меншою орбіти на більшу і навпаки. Для некомпланарних орбіт кількість можливих для розгляду варіантів переходу на порядок більша, оскільки для таких траєкторій зростає кількість показників переходу. Не можна також забувати і про положення КА на орбіті, що також є окремим випадком орбітального переміщення космічного апарату. Тому основний акцент робився не на видову характеристику орбіт, а на оптимізацію імпульсного орбітального перельоту та основних принципів щодо покращення ймовірнісної задачі визначення небезпечного зближення між КО.

Таким чином, постановка завдання оптимального маневрування полягає в наступному:

– необхідно обрати маршрут переміщення, тобто порядок виконання всієї послідовності переходів для КА, який здійснює рух по своїй орбіті при заданих початкових даних;
– при виборі основного критерію оптимальності щодо витрат палива необхідно додатково враховувати обмеження;
– розглядається в початковому наближенні імпульсна постановка реалізації окремих переходів.

При цьому найкраще маневрування КА може бути досягнуто за умови реалізації одного з варіантів:

– синтез двигунів різного типу;
– наявність обмеженої по потужності, але досить великої тяги, що дає можливість ігнорувати зміну положення за час роботи двигуна;
– наявність малої тяги, що має майже необмежений ресурс часу роботи.

**Список використаної літератури:**


1. *Ильин В.А.* Оптимальные перелеты космических аппаратов / *В.А. Ильин, Г.Е.Кузмак.* – М. : Наука, 1976. – 744 с.
2. *Королев В.С.* О построении оптимальной траектории встречи на компланарной круговой орбите при наличии сильных ограничений на время движения / *В.С. Королев, Е.Ф. Олехова* // Математические методы решения инженерных задач. – М. : МинОбороны, 2005. – С. 98–104.
3. *Лоуден Д.Ф.* Оптимальные траектории для космической навигации / *Д.Ф. Лоуден.* –М. : Мир, 1966. – 152 с.
4. *Мирер С.А.* Механика космического полета. Орбитальное движение / *С.А. Мирер.* – М. : Ин-т прикладной математики им. М.В. Келдыша, 2013. – 106 с.
5. *Королев В.С.* Задачи оптимального инспектирования астероидов космическим аппаратом / *В.С. Королев* // Избр. труды Междунар. научной конф. по механике. – М. : Балабанов, 2012. – С. 123–126.
6. *Коваленко А.Н.* Задача оптимизации траекторий для перехвата и отклонения опасных для Земли астероидов с учетом ограничений на время или импульс / *А.Н. Коваленко* // Вопросы механики и процессов управления. – Вып. 19. – СПб. : СПбГУ, 2003. –С. 242–247.
7. *Ивашкин В.В.* Оптимизация космических маневров при ограничениях на расстояния до планет / *В.В. Ивашкин.* – М. : Наука, 1977.
8. *Hohmann W.* Die Erreichbarkeit der Himmelskorper / *W.Hohmann.* – Minich : R. Oldenbourg, 1925.
9. *Новоселов В.С.* Аналитическая механика управляемой системы / *В.С. Новоселов, В.С. Королев.* – СПб. : СПбГУ, 2005. – 298 с.
10. *Gobetz F.W.* A survey of impulsiv trajectories / *F.W. Gobetz, J.R. Doll* // AIAA Journal. – 1969. – V. 7, No. 5.
11. *Копнин Ю.М.* К задаче поворота плоскости орбиты спутника / *Ю.М. Копнин* // Космические исследования. – 1965. – Т. 3, Вып. 4.

12. Справочник по вероятностным расчетам / *Г.Г. Абезгауз, А.П. Тронь, Ю.Н. Копенкин* и др. – М. : Воениздат, 1966. – 408 с.
13. *Чернецкий В.И.* Анализ точности нелинейных систем управления / *В.И. Чернецкий.* – М. : Машиностроение, 1968. – 246 с.
14. *Самарский А.А.* Численные методы : учеб. пособ. для вузов / *А.А. Самарский, А.В. Гулин.* – М. : Наука, Глав. ред. физ-мат. лит., 1989. – 432 с.
15. *Иванов В.В.* Методы вычислений на ЭВМ : справ. пособие / *В.В. Иванов.* – К. : Наукова думка, 1986. – 584 с.


КАНЕВСЬКИЙ Леонід Броніславович – старший науковий співробітник науково-дослідної лабораторії наукового центру Житомирського військового інституту імені С.П. Корольова.

Наукові інтереси:

– розвиток та застосування космічних та геоінформаційних систем.

Стаття надійшла до редакції 21.08.2015