

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ОБОЛОНКОВОГО ПІДВІСУ.
ТРИВИМІРНА ЗАДАЧА

Будуються диференціальні рівняння підвісу гіроскопа у вигляді оболонки обертання. Створено аналітичну забезпеченість аналізу властивостей підвісу як системи з розподіленими параметрами. Тривимірний підхід надає можливість всебічного вивчення похибок приладів інерціальної навігації з позиції їх імпедансного статусу.

Постановка проблеми. Наявні відомості стендових досліджень гіроскопічних приладів в умовах, максимально наближених до натурних, дають підстави для більш детального вивчення властивостей підвісу з метою оцінки впливу його стану на похибки гіроскопа. Йдеться про те, що під час старту ракет-носіїв мобільного базування бортова апаратура не тільки працює в умовах кінематичного і вібраційного збурень, але і підвладна дії проникного акустичного випромінювання високої інтенсивності. Таким чином, складний рух поверхні підвісу сприймається гіроскопом як «хибний» вхідний сигнал і породжує додаткові похибки.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Вивчення похибок гіроскопічних приладів має досить тривалу історію [1, 2]. Перебуваючи в діалектичній єдності, паралельно удосконалювалися і методи зменшення похибок вимірювань [3]. Цілий ряд технічних рішень дозволив, спираючись на найновіші досягнення приладобудування, значно вдосконалити інерціальні прилади [4].

Разом з тим, потужний розвиток ракетно-космічної галузі призвів до необхідності перегляду сталого уявлення щодо особливостей функціонування приладів інерціальної навігації і похибок вимірювань, що при цьому виникають [5]. Інжекція акустичних хвиль з боку рушійних установок та внаслідок дифракційних явищ під час старту і льоту літальних апаратів на знижених траєкторіях змусила розглядати механічні системи підвісу гіроскопа як системи з розподіленими параметрами, що належать до класу імпедансних [6].

Метою досліджень є побудова диференціальних рівнянь оболонкового підвісу гіроскопа як наукового підґрунтя подальшого аналізу похибок приладів, що виникають внаслідок появи ейлеревих сил інерції, і, як наслідок, виникнення «хибних» вхідних сигналів.

Викладення основного матеріалу. Наявні наукові дані дають можливість користуватися готовими диференціальними рівняннями стану оболонок. Разом з тим, кожен конкретну задачу автори спрощували з огляду на розв'язувану проблему. Отже, в остаточному вигляді вони можуть досить суттєво відрізнятися. Тому постає потреба побудови диференціальних рівнянь динаміки оболонки в найбільш узагальненому вигляді – з довільною геометрією окреслення лінії меридіана, але мати при цьому можливість отримати інші варіанти оболонки обертання – опуклі, увігнуті та ін. Це створює можливості для науково обґрунтованих висновків при порівняльному аналізі та виборі шляхів оптимізації конструкції.

Оболонка утворюється обертанням будь-якої кривої навколо обраної осі симетрії. Припустимо, що ця крива не перетинає вісь обертання (рис. 1). Опорну (інерціальну) і зв'язану системи координат зображено на схемі, де прийнято такі позначення: $r = f(z)$ – крива обертання; r – відстань від осі обертання до точки М.

Оберемо довжину оболонки за l . Тоді $z \in [0, l]$.

Нехай φ – координата, що визначає положення точки М на паралелі. Для нескінченно малої відстані між двома точками по серединній поверхні φ оболонки можна записати співвідношення:

$$dS^2 = dS_1^2 + dS_2^2,$$

де dS_1 – диференціал дуги за меридіаном; dS_2 – диференціал дуги вздовж паралелі.

Оскільки

$$dS_1^2 = [1 + f'^2(z)] dz^2; \quad dS_2^2 = r^2 d\varphi^2 = [f(z)]^2 d\varphi^2,$$

то

$$dS^2 = [1 + f'^2(z)] dz^2 + [f(z)]^2 d\varphi^2. \quad (1)$$

Звідси випливає, що за координати α_1 та α_2 доцільно обрати

$$\alpha_1 = z, \quad \alpha_2 = \varphi.$$

Тоді

$$A_1 = \sqrt{1 + f'^2(z)}; \quad A_2 = f(z). \quad (2)$$

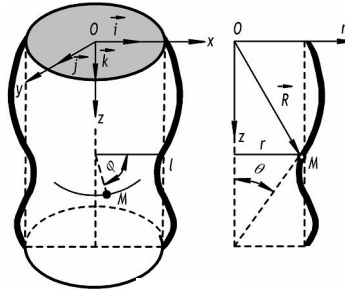


Рис. 1

Це дозволяє зробити важливий висновок: параметри Ламе A_1 та A_2 є функціями однієї координати – z . За координату α_i можна обрати також інші криволінійні координати, наприклад, $\alpha_1 = \theta$, $\alpha_2 = \varphi$.

Запишемо рівняння руху оболонки в координатах $\alpha_1 = z$ і $\alpha_2 = \varphi$. У такому разі у виразах варто зробити відповідні заміни в позначеннях:

$$U_1 \Rightarrow U_z; \quad U_2 \Rightarrow U_\varphi; \quad W \Rightarrow W; \quad \alpha_1 \Rightarrow z; \quad \alpha_2 \Rightarrow \varphi.$$

З огляду на сказане, рівняння набудуть такої форми. Рівняння по координаті z запишеться у вигляді:

$$\begin{aligned} & \frac{Eh}{1-\nu^2} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{A_2}{A_1} \frac{\partial U_z}{\partial z} + \nu \frac{\partial U_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\nu}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial z} U_z + W \left(\frac{A_2}{R_1} + \nu \frac{A_2}{R_2} \right) \right] + \\ & + \frac{Eh}{2(1+\nu)} \frac{1}{A_1} \left(A_1 \frac{\partial^2 U_\varphi}{\partial z \partial \varphi} + \frac{A_1^2}{A_2} \frac{\partial^2 U_z}{\partial \varphi^2} - \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial z} \frac{\partial U_\varphi}{\partial \varphi} \right) - \\ & - \frac{Eh}{1-\nu^2} \frac{\partial A_2}{\partial z} \left[\nu \frac{1}{A_1} \frac{\partial U_z}{\partial z} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial U_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial z} U_z + W \left(\nu \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right] + \\ & + \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{1}{R_1} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{A_2}{A_1^3} \frac{\partial A_1}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial z} - \frac{A_2}{A_1^2} \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - \frac{\nu}{A_2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} - \frac{A_2}{A_1 R_1^2} \frac{\partial R_1}{\partial z} U_z + \right. \\ & + \left. \frac{A_2}{A_1 R_1} \frac{\partial U_z}{\partial z} + \frac{\nu}{R_2} \frac{\partial U_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{\nu}{A_1^2} \frac{\partial A_2}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\nu}{A_1 R_1} \frac{\partial A_2}{\partial z} U_z \right) + \\ & + \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \frac{1}{A_1} \frac{1}{R_1} \left[-\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{A_1}{A_2} \frac{\partial^2 W}{\partial z \partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{A_1}{A_2^2} \frac{\partial A_2}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial \varphi} \right) + \right. \\ & + \left. \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{A_1^2}{A_2 R_1} \frac{\partial U_z}{\partial \varphi} \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{A_1}{A_2 R_1} \frac{\partial A_2}{\partial z} U_z \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{A_1}{R_2} \frac{\partial U_\varphi}{\partial z} \right) \right] + \\ & + \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(-\frac{1}{A_2 R_1} \frac{\partial^2 W}{\partial z \partial \varphi} + \frac{1}{A_2^2 R_1} \frac{\partial A_2}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial \varphi} + \frac{A_1}{A_2 R_1^2} \frac{\partial U_z}{\partial \varphi} - \right. \\ & - \left. \frac{1}{A_2 R_1^2} \frac{\partial A_2}{\partial z} U_z + \frac{1}{R_1 R_2} \frac{\partial U_\varphi}{\partial z} \right) - \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{1}{R_1} \frac{\partial A_2}{\partial z} \left(\frac{\nu}{A_1^3} \frac{\partial A_1}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial z} - \right. \\ & - \left. \frac{\nu}{A_1^2} \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - \frac{1}{A_2^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} - \frac{\nu}{A_1 R_1^2} \frac{\partial R_1}{\partial z} U_z + \frac{\nu}{A_1 R_1} \frac{\partial U_z}{\partial z} + \frac{1}{A_2 R_2} \frac{\partial U_z}{\partial \varphi} - \right. \\ & - \left. \frac{1}{A_1^2 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{1}{A_1 A_2 R_1} \frac{\partial A_2}{\partial z} U_z \right) = A_1 A_2 \left(-q_1 + \rho h \frac{\partial^2 U_z}{dt^2} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Рівняння по координаті φ набуде вигляду:

$$\begin{aligned} & \frac{Eh}{1-\nu^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\nu \frac{\partial U_z}{\partial z} + \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial U_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial z} U_z + W \left(\frac{\nu A_1}{R_1} + \frac{A_1}{R_2} \right) \right] + \\ & + \frac{Eh}{2(1+\nu)} \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{A_2^2}{A_1} \frac{\partial U_\varphi}{\partial z} + A_2 \frac{\partial U_z}{\partial \varphi} - \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial z} U_\varphi \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{1}{R_2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\nu}{A_1^2} \frac{\partial A_1}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial z} - \frac{\nu}{A_1} \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - \frac{A_1}{A_2^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} - \frac{\nu}{R_1^2} \frac{\partial R_1}{\partial z} U_z + \right. \\
 & \left. + \frac{\nu}{R_1} \frac{\partial U_z}{\partial z} + \frac{A_1}{A_2 R_2} \frac{\partial U_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{1}{A_2 R_1} \frac{\partial A_2}{\partial z} U_z \right) + \\
 & + \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \frac{1}{A_2} \frac{1}{R_1} \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{A_2}{A_1} \frac{\partial^2 W}{\partial z \partial \varphi} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial \varphi} + \frac{A_2}{R_1} \frac{\partial U_z}{\partial \varphi} - \frac{A_2}{A_1 R_1} \frac{\partial A_2}{\partial z} U_z + \right. \\
 & \left. + \frac{A_2^2}{A_1 R_2} \frac{\partial U_\varphi}{\partial \varphi} \right) + \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{1}{A_1 R_2} \frac{\partial^2 W}{\partial z \partial \varphi} + \frac{1}{A_1 A_2 R_2} \frac{\partial A_2}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial \varphi} + \frac{1}{R_1 R_2} \frac{\partial U_z}{\partial \varphi} - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{A_1 R_1 R_2} \frac{\partial A_2}{\partial z} U_z + \frac{A_2}{A_1 R_2^2} \frac{\partial U_\varphi}{\partial z} \right) + \\
 & + \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \frac{1}{R_1} \frac{\partial A_2}{\partial z} \left(-\frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial^2 W}{\partial z \partial \varphi} + \frac{1}{A_1 A_2^2} \frac{\partial A_2}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial \varphi} + \frac{1}{A_2 R_1} \frac{\partial U_z}{\partial \varphi} - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{A_1 A_2 R_1} U_z + \frac{1}{A_1 R_2} \frac{\partial U_\varphi}{\partial z} \right) = A_1 A_2 \left(-q_2 + \rho h \frac{\partial^2 U_\varphi}{\partial t^2} \right).
 \end{aligned}$$

Нарешті, рівняння згинного руху буде таким:

$$\begin{aligned}
 & \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{A_2}{A_1^3} \frac{\partial A_1}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial z} - \frac{A_2}{A_1^2} \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - \frac{\nu}{A_2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} - \frac{A_2}{A_1 R_1^2} \frac{\partial R_1}{\partial z} U_z + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{A_2}{A_1 R_1} \frac{\partial U_z}{\partial z} + \frac{\nu}{R_2} \frac{\partial U_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{\nu}{A_1^2} \frac{\partial A_2}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\nu}{A_1 R_1} \frac{\partial A_2}{\partial z} U_z \right) \right] + \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \frac{1}{A_1} \times \\
 & \times \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(-\frac{A_1}{A_2} \frac{\partial^2 W}{\partial z \partial \varphi} + \frac{A_1}{A_2^2} \frac{\partial A_2}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial \varphi} + \frac{A_1^2}{A_2 R_1} \frac{\partial U_z}{\partial \varphi} - \frac{A_1}{A_2 R_1} \frac{\partial A_2}{\partial z} U_z + \frac{A_1}{R_2} \frac{\partial U_\varphi}{\partial z} \right) \right] - \\
 & - \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left\{ \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial A_2}{\partial z} \left(\frac{\nu}{A_1^3} \frac{\partial A_1}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial z} - \frac{\nu}{A_1^2} \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} - \frac{\nu}{A_1 R_1^2} \frac{\partial R_1}{\partial z} U_z + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{\nu}{A_1 R_1} \frac{\partial U_z}{\partial z} + \frac{1}{A_2 R_2} \frac{\partial U_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{1}{A_1^2 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{1}{A_1 A_2 R_1} \frac{\partial A_2}{\partial z} U_z \right) \right] \right\} - \\
 & - \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{1}{A_1^2} \frac{\partial A_1}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{A_2}{A_1^3} \frac{\partial A_1}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial z} - \frac{A_2}{A_1^2} \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - \frac{\nu}{A_2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} - \frac{A_2}{A_1 R_1^2} \frac{\partial R_1}{\partial z} U_z + \right. \\
 & \left. + \frac{A_2}{A_1 R_1} \frac{\partial U_z}{\partial z} + \frac{\nu}{R_2} \frac{\partial U_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{\nu}{A_1^2} \frac{\partial A_2}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\nu}{A_1 R_1} \frac{\partial A_2}{\partial z} U_z \right) - \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \frac{1}{A_1^3} \frac{\partial A_1}{\partial z} \times \\
 & \times \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(-\frac{A_1}{A_2} \frac{\partial^2 W}{\partial z \partial \varphi} + \frac{A_1}{A_2^2} \frac{\partial A_2}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial \varphi} + \frac{A_1^2}{A_2 R_1} \frac{\partial U_z}{\partial \varphi} - \frac{A_1}{A_2 R_1} \frac{\partial A_2}{\partial z} U_z + \frac{A_1}{R_2} \frac{\partial U_\varphi}{\partial z} \right) \\
 & + \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{1}{A_1^2} \frac{\partial A_1}{\partial z} \frac{\partial A_2}{\partial z} \left(\frac{\nu}{A_1^3} \frac{\partial A_1}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial z} - \frac{\nu}{A_1^2} \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} - \right. \\
 & \left. - \frac{\nu}{A_1 R_1^2} \frac{\partial R_1}{\partial z} U_z + \frac{\nu}{A_1 R_1} \frac{\partial U_z}{\partial z} + \frac{1}{A_2 R_2} \frac{\partial U_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{1}{A_1^2 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{1}{A_1 A_2 R_1} \frac{\partial A_2}{\partial z} U_z \right) + \\
 & + \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\nu}{A_1^2} \frac{\partial A_1}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial z} - \frac{A_1}{A_2^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} - \frac{\nu}{A_1} \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - \frac{\nu}{R_1^2} \frac{\partial R_1}{\partial z} U_z + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{A_1}{A_2 R_2} \frac{\partial U_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\nu}{R_1} \frac{\partial U_z}{\partial z} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{1}{A_2 R_1} \frac{\partial A_2}{\partial z} U_z \right) \right] + \\
 & + \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{A_2}{A_1} \frac{\partial^2 W}{\partial z \partial \varphi} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial \varphi} + \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{A_2^2}{A_1 R_2} \frac{\partial U_\varphi}{\partial z} + \frac{A_2}{R_1} \frac{\partial U_z}{\partial \varphi} - \frac{A_2}{A_1 R_1} \frac{\partial A_2}{\partial z} U_z \Bigg] - \\
 & - \frac{Eh}{1-\nu^2} A_1 A_2 \left\{ \frac{1}{R_1} \left[\frac{1}{A_1} \frac{\partial U_z}{\partial z} + \nu \frac{1}{A_2} \frac{\partial U_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\nu}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial z} U_z + W \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\nu}{R_2} \right) \right] + \frac{1}{R_2} \times \right. \\
 & \left. \times \left[\frac{\nu}{A_1} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial U_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial z} U_z + W \left(\frac{\nu}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right] \right\} = -A_1 A_2 \left(q_n + \rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \right).
 \end{aligned} \tag{5}$$

Отже, рівняння оболонки значно спростилися, порівняно з оболонками довільної форми.

Як окремий випадок, з (3)–(5) походять рівняння колової циліндричної оболонки. Для цього достатньо обрати такі значення сталих Ламе:

$$A_1 = 1; \quad A_2 = R = \text{const}$$

Розглянемо оболонки обертання – опуклу (рис. 2, а) та ввігнуту відносно осі обертання (рис. 2, б). В обох випадках передбачається, що $OD = BA = R$, а крива $f(z)$, яка утворює оболонку обертання, симетрична відносно прямої CM , що перетинає вісь обертання посередині ($OB = l$; $OC = CB = \frac{l}{2}$).

Вважаємо також, що

$$f(0) = f(l) = R = \text{const} . \tag{6}$$

Розглянемо систему координат $C_1 z_1 r_1$ (рис. 2). Зв'язок між цією системою та опорною Ozr окреслюється співвідношеннями:

$$r = r_1 + R; \quad z = z_1 + \frac{l}{2}.$$

У системі відліку $C_1 z_1 r_1$ форму оболонки (лінію меридіана) задамо виразом

$$r_1 = \pm f_1(z_1), \tag{7}$$

причому знак «+» відповідає рисунку 2, а, а знак «-» – рисунку 2, б.

З'ясуємо, для якого класу кривих $f_1(z_1)$ виконуються умови:

$$f_1(-z_1) = f_1(z_1); \quad f_1\left(\pm \frac{l}{2}\right) = 0;$$

функції $[+f_1(z_1)]$ – строго опуклі, а функції $[-f_1(z_1)]$ – строго ввігнуті; точка з координатою $z_1 = 0$ є точкою екстремуму для функцій $\pm f_1(z_1)$; функція $f_1(z_1)$ – спадна, якщо $\forall z_1 \in \left(0; \frac{l}{2}\right)$ (рис. 2, а), і зростаюча, якщо $\forall z_1 \in \left(0; \frac{l}{2}\right)$ (рис. 2, б).

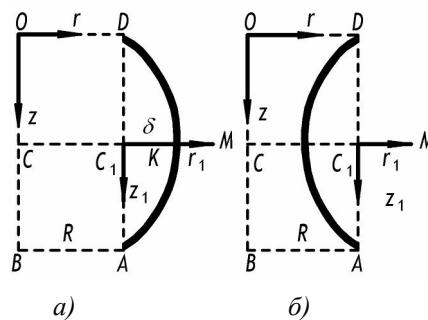


Рис. 2

Розглянемо приклад. Нехай

$$F_1(z_1) = a_2 - a_0 z_1^2; \quad a_2 > 0; \quad a_0 > 0.$$

Очевидно, що $f_1(-z_1) = f_1(z_1)$. Тоді, відповідно до рисунка 2, маємо:

$$f_1\left(\pm \frac{l}{2}\right) = 0 \Rightarrow a_2 - a_0 \frac{l^2}{4} = 0.$$

Звідси

$$a_2 = a_0 \frac{l^2}{4}.$$

З огляду на це, можна записати:

$$f_1(z_1) = a_0 \left(\frac{l^2}{4} - z_1^2 \right), \quad a_0 > 0. \quad (8)$$

Позначимо підйом параболи C_1K у точці $z_1 = 0$ через δ (рис. 2, а). Тоді

$$\delta = a_0 \frac{l^2}{4} \Rightarrow a_0 = \frac{4\delta}{l^2}.$$

Можна записати, що

$$f_1(z_1) = \delta - \frac{4\delta}{l^2} z_1^2 = \delta \left(1 - 4 \frac{z_1^2}{l^2} \right). \quad (9)$$

Рівняння лінії меридіана оболонки в опорній системі координат Ozr має вигляд:

$$r = f(z) = R + \delta \left[1 - \frac{4}{l^2} \left(z - \frac{l}{2} \right)^2 \right], \quad (10)$$

або

$$f(z) = R \left[1 + \frac{\delta}{R} - \frac{4\delta}{Rl^2} \left(z - \frac{l}{2} \right)^2 \right]; \quad (11)$$

$$f'(z) = -\frac{8\delta}{l^2} \left(z - \frac{l}{2} \right); \quad (12)$$

$$A_1 = \sqrt{1 + 64 \frac{\delta^2}{l^4} \left(z - \frac{l}{2} \right)^2}; \quad (13)$$

$$A_2 = R \left[1 + \frac{\delta}{R} - \frac{4\delta}{Rl^2} \left(z - \frac{l}{2} \right)^2 \right]. \quad (14)$$

Розглянемо інший приклад. Нехай

$$f_1(z) = A \cos \frac{\pi z_1}{l}, \quad A > 0.$$

Тоді

$$f(z) = R + A \cos \frac{\pi}{l} \left(z_1 - \frac{l}{2} \right) = R + A \cos \left(\frac{\pi}{l} z_1 - \frac{\pi}{2} \right) = R + A \sin \frac{\pi z_1}{l}.$$

Як і раніше, вважаємо, що $f_1(z_1)|_{z_1=0} = \delta$ і відповідає максимальному відхиленню лінії меридіана від вертикальної прямої $r = R$. У такому випадку

$$f(z) = R + \delta \sin \frac{\pi z}{l}. \quad (15)$$

Звідси випливає, що

$$f'(z) = \frac{\delta \pi}{l} \cos \frac{\pi z}{l},$$

і сталі Ламе визначаються співвідношеннями:

$$A_1 = \sqrt{1 + \left(\frac{\delta \pi}{l} \right)^2 \cos^2 \left(\frac{\pi z}{l} \right)}; \quad A_2 = R \left(1 + \frac{\delta}{R} \sin \frac{\pi z}{l} \right). \quad (16)$$

Залишається обчислити радіуси кривизни. Для цього використаємо співвідношення Гауса–Кодацці: – співвідношення Гауса:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \right) = -\frac{A_1 A_2}{R_1 R_2}; \quad (17)$$

– співвідношення Кодацці:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{A_2}{R_2} \right) = \frac{1}{R_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}; \quad \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{A_1}{R_1} \right) = \frac{1}{R_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}. \quad (18)$$

Величини A_1, A_2, R_1, R_2 не можуть бути задані як довільні функції точки поверхні. Вони мають задовольняти (17) і (18). У теорії поверхонь доведено, що задавання цих чотирьох величин у вигляді наведених співвідношень повністю визначає поверхню (з точністю до положення її у просторі).

У лініях кривизни правила диференціювання ортів \vec{e}_i мають вигляд:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{A_1} \frac{\partial \vec{e}_1}{\partial \alpha_1} &= -\frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha} \vec{e}_2 - \frac{1}{R_1} \vec{e}_3; \\ \frac{1}{A_1} \frac{\partial \vec{e}_2}{\partial \alpha_1} &= \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_1} \vec{e}_1; \\ \frac{1}{A_1} \frac{\partial \vec{e}_3}{\partial \alpha_1} &= \frac{1}{R_1} \vec{e}_1, \end{aligned} \right\}, \quad (19)$$

де \vec{e}_3 – орт нормалі до поверхні.

Ці вирази будуть корисними для подальших обчислень.

Перейдемо до виведення формул для обчислення кривизни координатних ліній $\left(\frac{1}{R_1} \right)$ і $\left(\frac{1}{R_2} \right)$ за недеформованого стану поверхні оболонки.

Згідно з рисунком 1 запишемо очевидне векторне рівняння для точок серединної поверхні:

$$\vec{R} = \vec{R}(z, \varphi) = \vec{i}r \cos \varphi + \vec{j}r \sin \varphi + \vec{k}z = \vec{i}f(z) \cos \varphi + \vec{j}f(z) \sin \varphi + \vec{k}z. \quad (20)$$

Тоді

$$\left. \begin{aligned} \vec{R}_z &= \frac{\partial \vec{R}}{\partial z} = \vec{i}f'(z) \cos \varphi + \vec{j}f'(z) \sin \varphi + \vec{k}; \quad \vec{e}_1 = \vec{e}_z = \frac{1}{|\vec{R}_z|}; \\ \vec{R}_\varphi &= \frac{1}{A_1} [\vec{i}f'(z) \cos \varphi + \vec{j}f'(z) \sin \varphi + \vec{k}]; \quad A_1 = \sqrt{1 + f'^2(z)}; \end{aligned} \right\}. \quad (21)$$

$$\vec{R}_\varphi = [-\vec{i}r \sin \varphi + \vec{j}r \cos \varphi]$$

$$\Rightarrow \vec{e}_2 = \vec{e}_\varphi = \frac{1}{|R_\varphi|} (-\vec{i}r \sin \varphi + \vec{j}r \cos \varphi) = \frac{1}{A_2} (-\vec{i}r \sin \varphi + \vec{j}r \cos \varphi); \quad (22)$$

$$\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \frac{1}{A_1} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ f'(z) \cos \varphi & f'(z) \sin \varphi & 1 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{A_1} [-\vec{i} \cos \varphi + \vec{j} \sin \varphi + \vec{k}f'(z)]. \quad (23)$$

З формул (19) випливає:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_1} &= \frac{1}{A_1} \vec{e}_1 \frac{\partial \vec{e}_3}{\partial z}; \\ \frac{\partial \vec{e}_3}{\partial z} &= -\frac{1}{A_1^2} \frac{\partial A_1}{\partial z} \left[-\vec{i} \cos \varphi - \vec{j} \sin \varphi + \vec{k}f'(z) + \frac{\vec{k}}{A_1} f''(z) \right] = \\ &= \vec{i} \frac{1}{A_1^2} \frac{\partial A_1}{\partial z} \cos \varphi + \vec{j} \frac{1}{A_1^2} \frac{\partial A_1}{\partial z} \sin \varphi + \vec{k} \left[-\frac{1}{A_1^2} \frac{\partial A_1}{\partial z} f'(z) + \frac{1}{A_1} f''(z) \right]. \end{aligned} \quad (24)$$

Тоді

$$\vec{e}_1 \frac{\partial \vec{e}_3}{\partial z} = \frac{1}{A_1^2} f'(z) \cos^2 \varphi + \frac{1}{A_1^2} f'(z) \sin^2 \varphi - \frac{1}{A_1^2} \frac{\partial A_1}{\partial z} f'(z) + \frac{1}{A_1^2} f''(z) = \frac{1}{A_1^2} f''(z).$$

З урахуванням отриманого можна записати відоме співвідношення:

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{A_1^3} f''(z) = \frac{f''(z)}{[1+f'^2(z)]^{\frac{3}{2}}}. \quad (25)$$

З формул (19) операцією «сиге» отримаємо:

$$\frac{1}{A_2} \frac{\partial \bar{e}_3}{\partial \alpha_2} = \frac{1}{R_2} \bar{e}_2 \Rightarrow \frac{1}{R_2} = \frac{1}{A_2} \frac{\partial \bar{e}_3}{\partial \varphi} \bar{e}_\varphi; \quad \frac{\partial \bar{e}_3}{\partial \varphi} = \frac{1}{A_1} (\bar{i} \sin \varphi - \bar{j} \cos \varphi);$$

$$\frac{\partial \bar{e}_3}{\partial \varphi} \bar{e}_\varphi = \frac{1}{A_1} (\bar{i} \sin \varphi - \bar{j} \cos \varphi) (-\bar{i} \sin \varphi + \bar{j} \cos \varphi) = -\frac{1}{A_1}.$$

Отже,

$$\frac{1}{R_2} = -\frac{1}{A_1 A_2} \quad (26)$$

або

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_2(z)} = -\frac{1}{f(z) \sqrt{1+f'^2(z)}}. \quad (27)$$

Якщо оболонка обертання є циліндричною поверхнею, тоді $f(z) = R = \text{const}$, де R – радіус оболонки.

У такому випадку:

$$\frac{1}{R_1} \Rightarrow 0; \quad \frac{1}{R_2} \Rightarrow -\frac{1}{R},$$

що й маємо в дійсності.

Тотожність Кодаці для розглянутої оболонки обертання зміниться так:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{A_2}{R_2} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left[A_2 \left(-\frac{1}{A_1 A_2} \right) \right] = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{A_1} \right) = \frac{1}{A_1^2} \frac{\partial A_1}{\partial z};$$

$$A_1 = \sqrt{1+f'^2(z)};$$

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} = \frac{1}{A_1} f''(z) f'(z).$$

Отже,

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{A_2}{R_2} \right) \Rightarrow \frac{f''(z) f'(z)}{[1+f'^2(z)]^{\frac{3}{2}}}.$$

Права частина:

$$\frac{1}{R_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \Rightarrow \frac{f''(z) f'(z)}{[1+f'^2(z)]^{\frac{3}{2}}}.$$

Друге співвідношення перетворюється на нуль.

Уточнимо співвідношення для обчислення параметрів Ламе A_1 і A_2 , а також кривизни $\frac{1}{R_1}$ та $\frac{1}{R_2}$.

Проводячи подальші дослідження, приймемо обов'язковим виконання умови $\zeta = \frac{\delta}{R} < 1$.

Параметр A_2 доцільно навести у вигляді:

$$A_2 = R + \delta - \delta \left(\frac{2z}{l} - 1 \right)^2 = (R + \delta) \left[1 - \frac{\delta}{R + \delta} \left(\frac{2z}{l} - 1 \right)^2 \right] = (R + \delta) [1 - \xi(z)], \quad (28)$$

де $\xi(z) = \frac{\delta}{R + \delta} \left(\frac{2z}{l} - 1 \right)^2$.

Легко встановити, що функція $\xi(z) \leq 1$ при $\forall z \in [0, l]$, тобто при $0 \leq \xi(z) \leq 1$.

Параметр A_1 надамо у вигляді:

$$A_1 = [1+f'^2(z)]^{\frac{1}{2}} = \left[1 + 16 \frac{\delta^2}{l^2} \left(\frac{2z}{l} - 1 \right)^2 \xi(z) \right]^{\frac{1}{2}} = [1 + 16 \zeta (1 + \zeta) \eta^2 \xi(z)]^{\frac{1}{2}},$$

де $\eta = \frac{R}{l}$.

Остаточне значення параметра:

$$A_1 = [1 + 2\mu \xi(z)]^{\frac{1}{2}}, \tag{29}$$

де $\mu = 8\zeta(1 + \zeta)\eta^2$.

Надалі вважатимемо геометрію оболонки такою, для якої виконується умова:

$$2\mu \square 1. \tag{30}$$

Особливістю цієї умови є те, що вона містить характерні геометричні параметри.

Беручи до уваги застереження (30), припускаємо, що

$$A_1 \cong 1 + \mu \xi(z) - \frac{1}{2} \mu^2 \xi^2(z). \tag{31}$$

Перетворимо (25) і (26) для обчислення величин $\frac{1}{R_1}$ та $\frac{1}{R_2}$. Маємо:

$$\frac{1}{R_1} = \frac{-\frac{8\delta}{l^2}}{\left[1 + 16\left(\frac{\delta}{l}\right)^2 \left(\frac{2z}{l} - 1\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\mu}{R + \delta} [1 + 2\mu \xi(z)]^{-\frac{3}{2}}. \tag{32}$$

З огляду на основне припущення (30), вираз (32) спрощується:

$$\frac{1}{R_1} \cong -\frac{\mu}{R + \zeta} \left[1 - \zeta \mu \xi(z) + \frac{15}{2} \mu^2 \xi^2(z)\right]. \tag{33}$$

Очевидно, що коли $\delta \rightarrow 0$, тоді й $\mu \rightarrow 0$, отже, $\frac{1}{R_1} \rightarrow 0$.

Відповідно до (27):

$$\frac{1}{R_2} = -\frac{1}{f(z) [1 + f'^2(z)]^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{A_1 A_2}.$$

Беручи до уваги (28) і (31), отримуємо:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_2} &= -\frac{1}{[1 + \mu \xi(z)](R + \delta) [1 - \xi(z)]} = -\frac{1}{R + \delta} [1 - \mu \xi(z) + \mu^2 \xi^2(z) - \dots] \times \\ &\times [1 + \xi(z) + \xi^2(z) + \dots] = -\frac{1}{R + \delta} [1 + (1 - \mu) \xi(z) + (1 - \mu + \mu^2) \xi^2(z) + \dots]. \end{aligned} \tag{34}$$

Остаточню маємо:

$$\frac{1}{R_2} \cong -\frac{1}{R(1 + \zeta)} [1 + (1 - \mu + \mu^2) \xi(z) + (1 - \mu)^2 \xi^2(z) + \dots].$$

Якщо $\delta \rightarrow 0$, $\xi \rightarrow 0$ і $\mu \rightarrow 0$, то з (34) походить:

$$\frac{1}{R_2} \Rightarrow -\frac{1}{R}.$$

Формули (28), (31), (32) і (34) слухні лише для виконання умови (30).

Проведемо чисельну оцінку можливої геометрії оболонки. Нехай $\zeta = \frac{\delta}{R} = 0,3$. Це достатня опуклість (або ввігнутість) поверхні. Тоді

$$2\mu = 16\zeta(1 + \zeta)\eta^2 = 16 \cdot 0,3 \cdot 1,3\eta^2 = 6,24\eta^2, \quad \eta = \frac{R}{l}.$$

Щоб виконувалися умови (34) і $2\mu \square 1$, потрібно за значної опуклості (або ввігнутості) брати порівняно протяжні оболонки.

Нехай $\eta = 0,1$. Тоді $2\mu = 6,24 \cdot 0,01 \cong 0,06 \Rightarrow \mu \cong 0,030$.

Якщо $\eta = 0,2$, то $\Rightarrow \eta^2 = 0,04, \Rightarrow \mu \cong 0,125$.

Останній випадок найбільш несприятливий. Проаналізуємо для нього значення коефіцієнтів у (28), (31), (32) і (34).

Насамперед

$$\xi(z) = \frac{\zeta}{1+\zeta} \left(\frac{2z}{l} - 1 \right).$$

Тоді максимальне значення $\xi(z)$, якщо $\forall z \in [0, l]$ і $\zeta = 0,3$, дорівнюватиме $\frac{0,3}{1,3} = 0,23$.

Максимальні значення інших параметрів:

$$A_1 \cong 1 + 0,125 \cdot 0,23 - \frac{1}{2} (0,125)^2 \cdot (0,23)^2 \cong 1 + 0,03; \quad A_2 = 1,3R(1 - 0,23);$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_1} &\cong \frac{-1,25}{1,3R} [1 - 3 \cdot 0,125 \cdot 0,23 + 7,5 \cdot 0,016 \cdot 0,053] \cong \\ &\cong -\frac{1,25}{1,3R} [1 - 0,375 \cdot 0,23 + \dots] \cong -\frac{1,25}{1,3R} (1 - 0,086) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_2} &= -\frac{1}{1,3R} [1 + (1 - 0,125 + 0,0156) \cdot 0,23 + (1 - 0,25 + 0,0156) \cdot 0,053] = \\ &= -\frac{1}{1,3R} (1 + 0,205 + 0,04) \end{aligned}$$

Отже, наведені чисельні розрахунки дають підстави стверджувати, що можна задати такі геометричні розміри оболонки, за яких у параметрах $A_1, A_2, \frac{1}{R_1}$ і $\frac{1}{R_2}$ доцільно нехтувати доданками, які стоять після третього.

Розглянемо оболонки обертання, в яких лінія меридіана задана рівнянням (9). Припустимо, що

$$\frac{4\delta}{l} < 1; \quad R \square l. \tag{35}$$

Тоді, відповідно до (28), (29), (31), розглядатимемо випадок, коли сталі Ламе визначаються співвідношеннями:

$$A_1 = 1 + \mu \xi(z) - \frac{1}{2} \mu^2 \xi^2(z) = [1 + 2\mu \xi(z)]^{\frac{1}{2}}; \tag{36}$$

$$A_2 = (R + \delta)[1 - \xi(z)] = R(1 + \zeta)[1 - \xi(z)]. \tag{37}$$

Спростимо рівняння руху оболонки (3)–(5). Для цього скористаємося припущеннями, сформульованими вище. Крім того, у рівняннях після обчислень з'являться доданки, що містять множники:

$$\frac{\delta}{l}; \quad \frac{\delta}{R}; \quad \left(\frac{\delta}{l} \right)^2; \quad \left(\frac{\delta}{R} \right)^2.$$

Наявність двох останніх множників дає змогу відкинути відповідні доданки через їх малі значення, тому що

$$\frac{\delta}{l} \square 1 \quad \text{та} \quad \frac{\delta}{R} \square 1.$$

Отже, все рівняння можна звести до такої структури:

$$[\dots] + \frac{\delta}{l} [\dots] + \frac{\delta}{R} [\dots] = \text{зовнішнє збурення} + \text{сили інерції}.$$

Для зручності обчислень надалі можна перейти до безрозмірних параметрів.

Висновки. Побудовано розрахункові моделі й аналітичний опис природи явища дозволять усвідомити динаміку механічних систем приладів інерціальної навігації і на майбутнє врахувати особливості підвищу за натурних умов.

Підготовлено наукове підгрунття для аналізу похибок приладів за одночасної дії кінематичного і просторового акустичного збурень. Створено засади для інженерно-технічних рішень боротьби з негативним впливом проникаючого акустичного випромінювання.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Ишлинский А.Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация / *А.Ю. Ишлинский.* – М. : Наука, 1967. – 671 с.
2. *Блохин Л.Н.* Экспериментальное изучение динамических свойств гироскопов / *Л.Н. Блохин* // Прикладна механіка. – 1970. – Т. 6. – № 1. – С. 35–39.
3. *Павловський М.А.* Об автокомпенсации погрешностей гиротаксометров при угловой вибрации основания / *М.А. Павловский, В.Е. Петренко* // Доклады АН УССР. Сер. А. – 1977. – № 8. – С. 81–84.
4. *Назаров Б.И.* О погрешностях двухстепенного интегрирующего гироскопа, вызванных колебаниями основания / *Б.И. Назаров* // Известия ВУЗов. Приборостроение. – 1960. –Т. 3. – № 6. – С. 17–24.
5. *Карачун В.В.* Волновые процессы в механических системах космического аппарата под влиянием акустического излучения / *В.В. Карачун, Н.В. Гнатейко* // Космічна наука і технологія. – 1966. – Т. 2. – № 3–4. – С. 55–57.
6. *Мельник В.М.* Нелінійні коливання рухомої частини поплавкового гіроскопа внаслідок неоднорідності рідиннофазної частини підвісу / *В.М. Мельник* // Доповіді НАН України. – 2003. – № 8. – С. 54–58.

ГНАТЕЙКО Нонна Валентинівна – кандидат технічних наук, доцент кафедри теоретичної механіки Національного технічного університету України «КПІ».

Наукові інтереси:

– динаміка приладів керування.

Подано 06.05.2010

Гнатейко Н.В. Диференціальні рівняння оболонкового підвісу. Тривимірна задача
Гнатейко Н.В. Дифференциальные уравнения оболочечного подвеса. Трехмерная задача
Gnateiko N.V. Differential equations of the shell suspension. Three-dimensional problem

УДК 629.7.054

Дифференциальные уравнения оболочечного подвеса. Трехмерная задача / Н.В. Гнатейко

Строятся дифференциальные уравнения подвеса гироскопа в виде оболочки вращения. Создана аналитическая обеспеченность анализа свойств подвеса как системы с разделенными параметрами. Трехмерный подход предоставляет возможность для всестороннего изучения погрешностей приборов инерциальной навигации с позиции их импедансного статуса.

УДК 629.7.054

Differential equations of the shell suspension. Three-dimensional problem / N.V. Gnateiko

Differential equations of suspension of gyroscope are constructed as a shell of rotation. Analytical material well-being of analysis of properties of suspension as a system with part parameters is created. Three-dimensional approach gives possibility for the comprehensive study of errors of devices of inertial navigation from position impedance status.