УДК 51:330.115

І.В. Гаращенко, к.т.н., доц.
Житомирський державний технологічний університет

ПРО ЗАДАЧУ ОПТИМІЗАЦІЇ НА ГРАФАХ

Описано задачу оптимізації комунікаційних мереж на прикладі транспортної мережі, що представлена графом зі зваженими ребрами і вершинами. Запропоновано процедуру виділення постійної складової розв'язку.

Вступ. Оптимізаційні задачі на графах зі зваженими ребрами й ваговими характеристиками вершин утворюють клас, що включає узагальнення класичної задачі знаходження кістяка мінімальної ваги (КМВ). Простором розв'язків кожної задачі класу є множина кістяків $\{I_v\}$ графа $H = (V, U)$ з певними властивостями. Один із них представлений обмеженням на кількість висячих вершин у припустимому розв'язку I_v. При цьому вершина $i \in V$, яка виявилася висячою в кістяку I_v набуває вагу, що відрізняється від її числового параметра в графі $H = (V, U)$. У цьому випадку вартість припустимого розв'язку задачі залежить від суми двох доданків: суми ваг ребер і суми ваг висячих вершин.

До розглянутого класу задач відноситься задача побудови КМВ графа H з мінімальним числом висячих вершин.

Умови задачі побудови в графі $H = (V, U)$ кістяка мінімальної вартості описуються, наприклад, транспортною мережею, де кожному пункту зпівставлена вершина $i \in V$ із двома числовими параметрами d_i і d_i', $|V| = n$, а кожному ребру $\{i, j\} \in U$ відповідає відрізок дорожнього полотна між парою сусідніх пунктів i, j та вартість його реконструкції d_{ij}.

Обґрунтування та опис алгоритму. Назвемо пункт i транспортної мережі тупиковим, якщо відповідна йому вершина i в графі H має ступінь $\delta_i = 1$, і транзитним у протилежному випадку. Кожний пункт представимо як термінал, що підлягає реконструкції. Вартість реконструкції i-го терміналу $d(i)$, $i = \overline{1, n}$, залежить від того, яким є пункт i: тупиковим або транзитним:

$$d(i) = \begin{cases} d_i, \text{ якщо } \delta_i > 1, \\ d_i' \text{ інакше,} \end{cases}$$

причому, як правило, $d_i' > d_i$. Для реконструкції транспортної мережі, включаючи всі її термінали, потрібні інвестиції в обсязі, рівному константі

$$\sum_{\{i,j\} \in U} d_{ij} + \sum_{\delta_i > 1} d_i + \sum_{\delta_i = 1} d_i' .$$

Зазвичай заплановані капіталовкладення на розвиток транспортної інфраструктури істотно менші зазначеного обсягу.

Прикладний характер побудованої моделі стає очевидним з формулювання наступної задачі оптимального планування: необхідно знайти таку частину транспортної мережі $H = (V, U)$, що зв'язує всі її пункти, реконструкція якої вимагає мінімуму витрат на дорожнє полотно і термінали.

У загальному випадку шуканий розв'язок поставленої задачі належить множині всіх кістяків графа $H = (V, U)$. При припущенні про співвідношення вартостей реконструкції кожної пари $\{i, j\} \in U$ $d_i' - d_i \le \min\limits_{i,j} d_{ij}$, очевидно, шукана частина є кістяком графа H, а простір розв'язків задачі – множиною всіх кістяків $\{I_v\}$ графа $H = (V, U)$, зпівставленого транспортній мережі.

Припустимо, що мережа складається тільки з транзитних пунктів, і, отже, граф H, що відповідає їй, не містить висячих вершин. Кістяк I_v графа H характеризується числом висячих вершин $n(I_v)$ і вартістю

$$D(I_v) = \sum_{\{i,j\} \in I_v} d_{ij} + \sum_{i=1}^{n} d(i), \tag{1}$$

де кожна величина $d(i)$ набуває одне із двох значення: d_i або d_i'. У цьому випадку задача оптимального планування реконструкції транспортної мережі полягає в знаходженні кістяка I^* вартістю

$$D(I^*) = \min_{\{I_v\}} D(I_v).$$

Очевидно, якщо $d_i' - d_i = const$, $i = \overline{1, n}$, то задача зводиться до знаходження в графі $H = (V, U)$ КМВ I^* із мінімальним числом висячих вершин $n(I^*)$.

У загальному випадку транспортна мережа містить як транзитні, так і тупикові пункти, тобто моделюється графом $H = (V, U)$, що включає вершини одиничного ступеня. Покажемо, що при такій умові поставлена задача полягає в мінімізації функціонала (1) на деякому підграфі графа H, який не містить висячих вершин.

У будь-якому розв’язку задачі, представленому кістяком графа H, кожна висяча вершина j одержує вагу $d(j) = d_j'$. У графі H множина всіх висячих вершин утворює підграф H' у вигляді лісу. Кожному дереву лісу однозначно відповідає коренева вершина, що зв'язує його із частиною графа H, що не є лісом. Оскільки всі ребра H' містяться в будь-якому кістяку графа H, то ступені кореневих вершин у припустимому розв’язку більше 1, а ступені інших вершин лісу не міняють своїх значень.

Позначимо V' множину всіх вершин лісу, K – множину його кореневих вершин. Для підмножини вершин $S = V - V' \cup K$ розглянемо породжений підграф $\langle S \rangle$ графа H і множину його кістяків $\{I_\xi\}$ [1]. Вартість будь-якого розв’язку задачі містить константу $D(H')$, рівну сумі ваг всіх вершин і всіх ребер лісу H', і залежить від величини

$$D(I_\xi) = \sum_{\{i,j\} \in I_\xi} d_{ij} + \sum_{i \in V - V'} d(i).$$

Поклавши в $\langle S \rangle$ для кожної кореневої вершини $k \in K,\ d(k) = 0$, одержимо функціонал, що мінімізується, який збігається з точністю до позначень із функціоналом (1):

$$D(I_\xi) = \sum_{\{i,j\} \in I_\xi} d_{ij} + \sum_{i \in V - V' \cup K} d(i).$$

Постійну складову вартості будь-якого розв’язку задачі, включаючи оптимальний, можна визначити після виконання наступної процедури знаходження в графі H лісу H'.

S0. У графі $H = (V, U)$ кожна вершина $k \in V$ характеризується ступенем $deg(k)$, $k = \overline{1, n}$, а кожне ребро – парою $\{k, l\} \in U;\ H' = \varnothing$.

S1. $i = 1$.

S2. Якщо $deg(i) > 1$, то $i = i + 1$; перейти до кроку S4.

S3. $H' = H' \cup \{i, j\}$; $deg(j) = deg(j) - 1$; $V = V \setminus \{i\}$; $n = n - 1$; перейти до кроку S1.

S4. Якщо $i > n$, то кінець: ліс H' містить підмножину кореневих вершин K, інакше перейти до кроку S2.

Вартість лісу H' визначається як

$$D(H') = \sum_{i \in V''} d_i' + \sum_{i \in V' - V''} d_i + \sum_{\{i,j\} \in H'} d_{ij},$$

де V'' – множина висячих вершин графа $H = (V, U)$.

У процедурі побудови лісу H' домінуючий час витрачається на послідовний пошук кожного ребра $\{i, j\}$, для якого поточне значення ступеня вершини i дорівнює 1. Тому часова складність знаходження H' обмежена величиною $O(n^2)$.

Доречно відзначити, що процедура може бути використана як проміжна при розв’язку задач з різних застосувань. Наприклад, вона визначає, чи є вихідний граф $H = (V, U)$ деревом.

Задача мінімізації (1) NP-трудна при будь-яких значеннях d_{ij}, d_i, $d_i' \in R_0^+$, $i, j = \overline{1, n}$, $i \neq j$.

Дійсно, розглянемо окремий випадок задачі мінімізації (1).

У зв'язному графі $A = (Y, W)$, де Y – множина вершин, $W \subset Y \times Y$ – множина ребер, потрібно побудувати кістяк F з мінімальним числом висячих вершин $n(F)$.

Задача побудови дерева F *NP*-трудна, тому що при $n(F)=2$ вона є класичною задачею знаходження в графі гамильтонового ланцюга.

До класу графових задач знаходження кістяка, що задовольняє певні умови, відноситься відома задача, для розвя'зку якої в [2] Габов побудував ефективний алгоритм. Вона формулюється в такий спосіб.

Задано зважений граф $H = (V, U)$, де $V = \{1, 2,..., n\}$ – множина пронумерованих вершин, $U \subseteq V \times V$ – множина ребер. Кожному ребру $\{i, j\}$ зпівставлене дійсне невід'ємне число d_{ij}, яке називається вагою.

Задача Габова полягає у побудові в графі H кістяка найменшої вартості (*SST*-дерева) з обмеженням на ступінь однієї з вершин.

Очевидно, не для кожної вершини графа H задача Габова розв'язна. Якщо граф H містить вершини одиничного ступеня, то задача не має розв'язку для будь-якої вершини підмножини $V' - K$ лісу H'. Вона не має розв'язку для кожної вершини з підмножини K з обмеженням $t = 1$. Отже, якщо побудовано *SST*-дерево з обмеженням $t > 1$ на ступінь вершини r, то ця вершина належить підмножині $V - V' \bigcup K$.

Алгоритм Габова не містить дій із розпізнавання вершин підмножини $V' - K$. Разом з тим у моделях оптимізації комунікаційних мереж основна увага приділяється підмножині тих вершин з V, для яких поставлена задача має розв'язок. Ця підмножина містить вершини множини $V - V' \bigcup K$, яка встановлюється процедурою побудови лісу H'. Якщо в результаті виконання алгоритму Габова для графа $H = (V, U)$ побудоване *SST*-дерево з обмеженням t на ступінь вершини $r \in S = V - V' \bigcup K$, то в його вартість входить постійна складова

$$D(H') = \sum_{\{i,j\} \in H'} d_{ij}$$

і вартість

$$D(I(r,t)) = \sum_{\{i,j\} \in I(r,\, t)} d_{ij} \qquad (2)$$

SST-дерева $I(r, t)$, побудованого на породженому підграфі $\langle S \rangle$ графа H. Для графа H, що не містить висячих вершин, задача Габова полягає у знаходженні (2) у результаті побудови дерева $I(r, t)$ поліноміальним алгоритмом, викладеним у [2].

Варіант задачі Габова, в якому потрібно побудувати *SST*-дерево з обмеженням на ступені всіх вершин, є *NP*-трудним. *NP*-трудність випливає з розгляду зваженого графа $H = (V, U)$, де ступінь кожної вершини не менший 2. Якщо обмежити ступінь фіксованих вершин i і j значенням $t = 1$, а ступені інших вершин значенням $p = 2$, то одержимо відому *NP*-трудну задачу побудови в графі H гамильтонового ланцюга мінімальної вартості між двома вершинами [3].

Розв'язок кожної із сформульованих тут задач належить множині кістяків зв'язного графа, вершини якого позначені числами 1, 2,…, n. Визначимо потужність цієї множини для графа $H = (V, U)$, що містить вершини одиничного ступеня.

Очевидно, число всіх кістяків графа H дорівнює числу кістяків у породженому підграфі $\langle S \rangle$. Це число визначається в результаті застосування матричної теореми про дерева в такий спосіб [7]. Формуються $\left[a_{ij}\right]_{|S|}$ – матриця суміжності породженого під графа $\langle S \rangle$ $|S| = |V - V' \bigcup K|$ і матриця M шляхом заміни в $\left[-a_{ij}\right]_{|S|}$ i-го елемента головної діагоналі на ступінь i-ї вершини в $\langle S \rangle$. Потужність множини всіх кістяків графа H дорівнює будь-якому алгебраїчному доповненню матриці M.

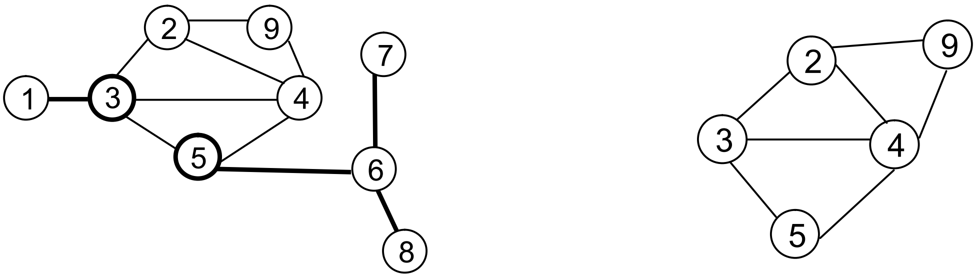
Відзначимо, по-перше, що широко відома задача знаходження в графі КМВ породжує клас задач, тісно пов'язаних з практикою проектування і оптимізації комунікаційних мереж. Параметрами, що варіюються, таких задач можуть бути ваги комунікацій, ваги і ступені вершин, що відповідають вузлам мережі, а припустимими розв'язками – кістякові підграфи, які містяться в ній. Якщо в якості кістякового підграфа фігурує його окремий випадок – цикл або ланцюг, то задача відноситься до класу задач типу комівояжера [4].

По-друге, у своїй більшості задачі оптимізації на мережах комунікацій мають статус NP-повних. Тому комбінаторні труднощі виділеного класу задач порівнянні з тими, з якими зіштовхуються при дослідженні проблеми комівояжера. Відзначимо, що оптимізаційні задачі побудови у зв'язному графі H кістяків завжди розв'язні. Звідси випливає можливість знаходження їх наближених, прийнятних по точності розв'язків за допомогою ефективних розумних евристик. Для побудови мінімальних кістяків застосовні генетичні алгоритми в комбінації з методом гілок та меж [5].

По-третє, у деяких випадках розмірності задач цього класу можна понизити, виконавши ефективні процедури знаходження тих компонентів мережі, які утворять постійну складову вартості розв'язку.

Приклад. Для графа $H = (V, U)$, представленого на рис. 1, *а*, визначимо H' – породжений підграф $\langle s\rangle$. Розглянемо в довільному порядку ступені його вершин: $deg(5) = 3$, $deg(4) = 4$, $deg(8) = 1$, $deg(6) = 3$, $deg(2) = 3$, $deg(3) = 4$, $deg(9) = 2$, $deg(7) = 1$, $deg(1) = 1$.

Виконавши процедуру знаходження в графі H лісу H', одержимо $H' = \{\{1, 3\}, \{7, 6\}, \{8, 6\}, \{6,5\}\}$, $V' = \{1, 3, 5, 6, 7, 8\}$ і підмножина V' кореневих вершин $K = \{3, 5\}$. Множиною вершин породженого підграфа $\langle S\rangle$ є $S = V - V' \cup K = \{2, 4, 3, 5, 9\}$. Породжений підграф $\langle S\rangle$ зображений на рис. 1, *б*.



а) *б)*

Рис. 1. Побудова лісу H' для прикладу: а) ребра й кореневі вершини лісу H' графа H виділені потовщеними лініями; б) породжений підграф $\langle S\rangle$ графа H

Щоб визначити число всіх кістяків графа H, утворимо для породженого підграфа $\langle S\rangle$ матрицю M і обчислимо алгебраїчне доповнення будь-якого її елемента, наприклад, Δ_{22}.

$M =$

	2	3	4	5	9
2	3	–1	–1	0	–1
3	–1	3	–1	–1	0
4	–1	–1	4	–1	–1
5	0	–1	–1	2	0
9	–1	0	–1	0	2

,

$\Delta_{22} =$

	3	4	5	9
3	3	–1	–1	0
4	–1	4	–1	–1
5	–1	–1	2	0
9	0	–1	0	2

.

Кожне кістякове дерево графа H містить ліс H' (рис. 2).

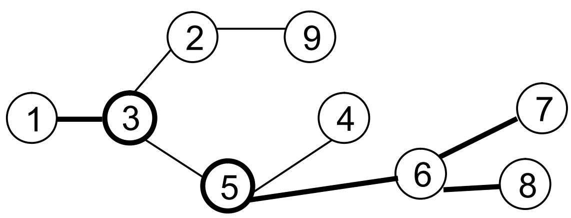


Рис. 2. Кістяк графа H з обмеженням t = 3 на ступінь вершини 3

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Харари Ф.* Теория графов. – М.: Мир, 1973. – 300 с.
2. *Hopcroft J.E.* Algorithm 447: Efficient Algorithms for Graph Manipulation // Comm. ACM. – 1973. – 16. – P. 372–378.
3. *Гэри М., Джонсон Д.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. – М.: Мир, 1982. –

416 с.
4. *Пападимитриу Х., Стайглиц К.* Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. – М.: Мир, 1985. – 510 с.
5. Генетические алгоритмы в комбинации с методом ветвей и границ для решения задач о перестановках / А.М. Данильченко, С.А. Ибрагим, А.В. Панишев // Материалы междунар. науч. конф. «Интеллектуальные системы принятия решений и прикладные аспекты информационных технологий». – Евпатория, 2006. – Т. 2. – С. 34–37.

ГАРАЩЕНКО Ірина Володимирівна – кандидат технічних наук, доцент Житомирського державного технологічного університету.

Наукові інтереси:
- комп'ютерно-інформаційні технології;
- комбінаторна оптимізація.

Подано 17.08.2009

Гаращенко І.В. Про задачу оптимізації на графах
Гаращенко И.В. Про задачу оптимизации на графах
Garashchenko I.V. About task of optimization on graphs

УДК 51:330.115
О задаче оптимизации на графах / И.В. Гаращенко
Описана задача оптимизации коммуникационных сетей на примере транспортной сети, представленой графом со взвешенными ребрами и вершинами. Предложена процедура выделения постоянной составляющей решения.

УДК 51:330.115
About task of optimization on graphs / I.V. Garashchenko
The optimization problem of communication networks on the example of a transport network that is represented graph with weighted edges and vertices there is described. A selection constant component solution procedure is proposed