УДК 519.67

О.М. Данильченко, к.т.н., доц.
О.М. Моргалюк, магістр
С.І. Яремчук, к.ф.-м.н., доц.
Житомирський державний технологічний університет

ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДУ ШТРАФНИХ ФУНКЦІЙ ПРИ РОЗВ'ЯЗАННІ МІНІМАКСНОЇ ЗАДАЧІ РОЗМІЩЕННЯ ДЖЕРЕЛ

Розроблено схему застосування методу штрафних функцій з використанням теорії годографа до розв'язання мінімаксної задачі розміщення джерел у випадку, коли джерела і множина мають форму опуклих багатокутників.

Вступ. На практиці зустрічаються задачі, в яких необхідно розмістити об'єкти певної форми таким чином, щоб обраний критерій якості досяг свого екстремуму. Універсальних методів для розміщення об'єктів довільної просторової форми не існує, тому актуальною є проблема розробки спеціальних методів, які враховують особливості класу задач, що розглядаються. Зокрема, виникає необхідність у більш поглибленому дослідженні особливостей математичної моделі задач розміщення геометричних об'єктів багатокутної форми та розробці нових ефективних методів розв'язання задач розміщення. За своїм характером, математичною постановкою і методами розв'язання задачі розміщення геометричних об'єктів багато в чому подібні до задач раціонального розміщення джерел фізичних полів, що виникають при проектуванні технічних систем, якість функціонування яких залежить від фізичних процесів, що відбуваються в них.

Аналіз джерел дослідження. Проблемі розміщення геометричних об'єктів присвячено багато робіт. Задача щільного пакування опуклих тривимірних многогранників розглядається в [1]. Математична модель і метод розв'язання задачі розміщення взаємно орієнтованих багатокутників у багатокутній області описано в роботі [2]. Моделюванню розміщення навантажень, які забезпечують граничний поздовжній вигинаючий момент у будівельних спорудах, присвячена стаття [3]. Деякі результати досліджень в області оптимального розміщення дискретних джерел фізичних полів підсумовані в монографіях Ю.Г. Стояна та В.П. Путятіна [4]. Авторами С.І. Яремчук, Д.О. Жовновським розглядається застосування методу штрафних функцій, які будуються з використанням апарату R-функції Рвачева, для розв'язання задач оптимального розміщення джерел фізичних полів для випадку, коли джерела фізичного поля мають форму прямокутника або круга [5]. У роботі [6] застосовується метод штрафних функцій до задачі розміщення джерел, що мають форму опуклих багатокутників, функція штрафу будується з використанням площі перетину фігур, реалізовано можливість здійснення повороту джерел. Роботи [5] та [6] є найближчими аналогами даної.

Постановка проблеми. Розглянемо наступну задачу оптимізації. Нехай в двовимірному евклідовому просторі R^2 є обмежена замкнена область Ω, що містить джерела фізичного поля $D_1, D_2, \ldots, D_m$, які представляють собою замкнені обмежені об'єкти. Область і джерела мають форму опуклих багатокутників. Введемо вектор $Z = \left(Z^1, Z^2, \ldots, Z^i, \ldots, Z^m\right)$, що описує розміщення джерел, де $Z^i\left(\xi_1^i, \xi_2^i\right)$, $i \in [1:m]$ визначає розміщення D_i в області Ω, яке повністю визначається координатами його полюсу. Полюсом об'єкта називається деяка фіксована точка, яка належить цьому об'єкту [7]. Основними характеристиками джерела у таких задачах є інтенсивність, геометрична форма й положення в просторі. Потрібно знайти таке розміщення джерел, при якому задана функція максимуму досягає свого мінімуму:

$$\chi(Z) = \max_{i\in[1:n]} y_i(Z) \to \min, \tag{1}$$

де $y_i(Z), i \in [1:n]$ – задані функції. На розміщення джерел накладаються обмеження:

1) джерела не можуть виходити за межі області:

$$\Omega \cap D_j = D_j, \forall j \in [1:m]; \tag{2}$$

2) джерела не можуть перетинатися між собою:

$$D_i \cap D_j = \varnothing, \forall i, j \in [1:m], i \neq j. \tag{3}$$

Ціль статті. Розв'язати мінімаксну задачу розміщення джерел фізичного поля у випадку, коли об'єкти і множина мають форму опуклих багатокутників, з використанням методу штрафних функцій, годографа та апарата R-функцій. Розробити алгоритм зміни параметра штрафу.

Виклад основного матеріалу. Побудуємо множину припустимих розв'язків задачі. У загальному вигляді вона може бути описана наступним чином:

1) умови, які накладаються на невихід джерел за межі області:

$$\varphi_i^{\Omega}\left(Z^i\right) \geq 0,\ i \in \left[1:m\right], Z_i \in \Omega\,; \tag{4}$$

2) умови, які накладаються на неперетин джерел між собою:

$$\varphi_{ij}\left(Z^i, Z^j\right) \geq 0, \forall i, j \in \left[1:m\right], i \neq j, Z_i \cup Z_j \neq 0\,. \tag{5}$$

Визначимо зазначені вище функції $\varphi_i^{\Omega}\left(Z^i\right)$ та $\varphi_{ij}\left(Z^i, Z^j\right)$, $i \in \left[1:m\right]$, $j \in \left[1:m\right]$, $i \neq j$.

Розглянемо процес побудови функцій в умовах (4). Спочатку для кожного *i*-ого джерела і області припустимого розміщення будується годограф [7]. Він представляється як упорядкований за годинниковою стрілкою набір вершин d_k^i, де $i \in \left[1:m\right]$, $k \in \left[1:K\right]$, K – кількість вершин годографа. Годограф визначає область, яка має форму опуклого багатокутника. У випадку, коли полюс *i*-ого джерела лежить в цій області, умова невиходу об'єкта за межі області розміщення виконується. Для перевірки такої умови необхідно задати годограф у аналітичному вигляді, який відповідає функціям в умовах (4). Для цього представимо множину точок, яка обмежується годографом, у вигляді системи лінійних нерівностей:

$$\psi_k^i(Z^i) \geq 0\,,\ k \in \left[1:K\right],\ i \in \left[1:m\right], \tag{6}$$

де $\psi_k^i(z) = 0$ – рівняння прямих, які проходять через дві точки d_{k+1}^i та d_k^i та визначаються за формулою:

$$\left(y_{k+1} - y_k\right)x + \left(x_k - x_{k+1}\right)y + \left(x_{k+1}y_k - x_k y_{k+1}\right) = 0\,,\ k \in \left[1:K\right], \tag{7}$$

де $\left(x_k; y_k\right)$ – координати точки d_k^i; $\left(x_{k+1}; y_{k+1}\right)$ – координати точки d_{k+1}^i.

Таким чином, перетин всіх напівплощин, кожна з яких задається однією нерівністю з системи (6), визаначає область, обмежену годографом. Кожній нерівності з (4) відповідає система лінійних нерівностей (6). Представимо систему (6) в єдиному аналітичному вигляді. Для цього скористаємося апаратом R -функцій Рвачева [8].

R -функції дозволяють представити систему лінійних обмежень:

$$f_i\ (x) \geq 0\,,\ \ i \in \left[1:r\right], \tag{8}$$

у формі єдиного обмеження

$$f\ (x) \geq 0\,, \tag{9}$$

де x – точка з простору R^n.

Для знаходження аналітичного виразу для $f(x)$ існує багато формул. Для побудови диференційованої R-функції можна використовувати наступну групову R-функцію:

$$f\left(x\right) \equiv (-1)^l \sum_{i=1}^{i=q}\left(f_i\left(x\right)\right)^l\left(f_i\left(x\right) - \left|f_i\left(x\right)\right|\right) + \prod_{i=1}^{i=q}\left(f_i\left(x\right)\right)^l\left(f_i\left(x\right) + \left|f_i\left(x\right)\right|\right), \tag{10}$$

де l – порядок диференційованості R-функції.

Область, обмежена годографом, задається системою (6), що відповідає одній з нерівностей (4). Тому, використовуючи побудови (8)–(10), отримаємо наступну формулу:

$$\begin{gathered}\varphi_i^{\Omega}\left(Z^i\right) \equiv \left(-1\right)^l \sum_{k=1}^{k=K}\left(\psi_k(Z^i)\right)^l\left(\psi_k(Z^i) - \left|\psi_k(Z^i)\right|\right) + \\ + \prod_{k=1}^{k=K}\left(\psi_k(Z^i)\right)^l\left(\psi_k(Z^i) + \left|\psi_k(Z^i)\right|\right)\end{gathered} \tag{11}$$

Розглянемо процес побудови функцій в умовах (5).

Для кожної пари джерел *i* та *j* з використанням теорії [7] будується годограф, який задається як упорядкований за годинниковою стрілкою набір вершин d_k^i, де $i \in \left[1:m\right]$, $k \in \left[1:K\right]$, K – кількість вершин годографа. Для його побудови полюс *i*-го джерела суміщається з початком координат. За полюс годографа обирається полюс *i*-го джерела. Побудова годографа здійснюється лише один раз для кожної пари об'єктів. Годограф рухається одночасно з об'єктом. Тому його фактичні координати вершин $d_k^{i\prime}$, де $i \in [1:m]$, $k \in [1:K]$ залежать від розміщення *i*-го об'єкта:

$$d_k^{i\prime} = d_k^i + Z^i,\ \forall k \in [1:K],\ \forall i \in [1:m]. \qquad (12)$$

Годограф задає область, яка має форму опуклого багатокутника і в якій не може знаходитись полюс *j*-ого джерела по відношенню до *i*-ого джерела так, щоб не порушувалась умова неперетину джерел *i* та *j*. На кожному кроці потрібно визначати чи джерела *i* та *j* не перетинаються між собою. Для здійснення такої перевірки необхідно годограф задати в аналітичному вигляді. Представимо множину точок області, обмежену годографом, як систему лінійних нерівностей:

$$\psi_k^i(Z^i, Z^j) \ge 0,\ k \in [1:K],\ i \in [1:m], \qquad (13)$$

де $\psi_k^i(Z^i, z) = 0$ – рівняння прямих, що проходять через дві точки $d_{k+1}^{i}{}'$ та $d_k^{i\prime}$ (7), z – поточна точка цього рівняння. Таким чином, перетин всіх напівплощин, кожна з яких задається однією нерівністю з системи (13), визначає область, обмежену годографом. Представимо систему нерівностей (13) в єдиному аналітичному вигляді. Для цього можна скористатися апаратом R -функцій Рвачева [8].

Використовуючи властивості (8)–(9), побудуємо множину точок, яка не задовольняє систему лінійних обмежень (8) у формі єдиного обмеження:

$$f\ (x) < 0, \qquad (14)$$

де x – точка з простору R^n. Оскільки точки можуть належати межі множини точок (об'єкти дотикаються між собою), яка задовольняє системі лінійних обмежень (8), то (14) розглядається як нестрога нерівність. Перетворимо (14) до нерівності типу "≥":

$$-f\ (x) \ge 0. \qquad (15)$$

Аналогічно до побудови функцій з умови (4), враховуючи (15), знайдемо загальну формулу для визначення $\varphi_{ij}\left(Z^i, Z^j\right)$:

$$\begin{aligned}\varphi_{ij}\left(Z^i, Z^j\right) \equiv (-1)^{l+1} \sum_{k=1}^{k=K} \left(\psi_k(Z^j, Z^i)\right)^l \left(\psi_k(Z^j, Z^i) - \left|\psi_k(Z^j, Z^i)\right|\right) - \\ -\prod_{k=1}^{k=K} \left(\psi_k(Z^j, Z^i)\right)^l \left(\psi_k(Z^j, Z^i) + \left|\psi_k(Z^j, Z^i)\right|\right)\end{aligned}. \qquad (16)$$

Використовуючи формули (4), (5), (11), (16), запишемо множину припустимих розв'язків наступним чином:

$$\begin{cases} (-1)^{l+1} \sum_{k=1}^{k=K} \left(\psi_k(Z^j, Z^i)\right)^l \left(\psi_k(Z^j, Z^i) - \left|\psi_k(Z^j, Z^i)\right|\right) - \\ -\prod_{k=1}^{k=K} \left(\psi_k(Z^j, Z^i)\right)^l \left(\psi_k(Z^j, Z^i) + \left|\psi_k(Z^j, Z^i)\right|\right) \ge 0 \\ (-1)^{l} \sum_{k=1}^{k=K} \left(\psi_k(Z^i)\right)^l \left(\psi_k(Z^i) - \left|\psi_k(Z^i)\right|\right) + \\ +\prod_{k=1}^{k=K} \left(\psi_k(Z^i)\right)^l \left(\psi_k(Z^i) + \left|\psi_k(Z^i)\right|\right) \ge 0 \end{cases}. \qquad (17)$$

Після того, як визначили множину припустимих розв'язків, переходимо до розв'язання поставленої задачі.

Задача, що розглядається, має неопуклу множину припустимих розв'язків. Безпосереднє застосування класичних методів оптимізації для розв'язання поставленої задачі є неможливим. Одним із підходів до розв'язання заданої задачі є застосування методу штрафних функцій. У результаті цього отримується послідовність задач безумовної оптимізації, які можна розв'язувати класичними методами математичного програмування. Функція штрафу вводиться як функція $g(x, C)$, що залежить від штрафного параметра C, і має властивості:

– на множині припустимих розв'язків *X* вона близька до нуля;
– досить швидко зростає при виході з множини припустимих розв'язків *X*;

– ступінь близькості штрафу до нуля і швидкість його зростання залежать від значення штрафного параметра і збільшуються з ростом параметра.

Штрафні функції можна вибирати різними способами. При необхідності їх можна підібрати так, щоб вони мали різні корисні властивості, такі як, наприклад, неперервність, опуклість, диференційованість, простота обчислень значень функції і похідних тощо.

Якщо при великому C почати процес мінімізації функції, яка складається з суми штрафної і вихідної функцій, з точки x^0, що досить віддалена від точки мінімуму, то доведеться витратити занадто багато часу для відшукання мінімуму, і збільшиться ймовірність переривання процесу в зв'язку з втратою точності при обчисленнях.

Тому в практичних алгоритмах використовується ідея поступового збільшення параметра C одночасно зі збереженням точності розв'язку допоміжних задач.

Побудуємо функцію штрафу для даної задачі.

Як видно із постановки задачі, обмеження накладаються на перетин джерел та на вихід їх за межі області. Тому зручно розглядати функцію штрафу як суму штрафів, що накладаються на попарний перетин джерел та вихід джерел за межі області. Нехай $P_{ij}\left(Z^i,Z^j,C\right), \forall i,j\in\left[1:m\right]$, $i\neq j$ – функція штрафу, який накладається на перетин двох джерел D_i та D_j та $P_i^{\Omega}\left(Z^i,C\right)$, $i\in\left[1:m\right]$ – функція штрафу, який накладається на невихід джерела за межі області розміщення, тоді загальна функція штрафу має вид:

$$P\left(Z,C\right)=\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{m}P_{ij}\left(Z^i,Z^j,C\right)+\sum_{i=1}^{m}P_i^{\Omega}\left(Z^i,C\right). \tag{18}$$

Функція штрафу повинна задовольняти наступні вимоги:

1) функція штрафу повинна бути зовнішньою. Ця вимога пояснюється тим, щоб починати розв'язок з будь-якої точки, навіть такої, яка не належить множині припустимих розв'язків;
2) функція штрафу має кількісно задавати перетин джерел, тобто збільшуватися при збільшенні площі перетину. Коли ж джерела не перетинаються, функція штрафу має бути рівною нулю;
3) функція штрафу повинна бути диференційованою за параметрами розміщення.

Побудуємо функції $P_{ij}\left(Z^i,Z^j,C\right)$ та $P_i^{\Omega}\left(Z^i,C\right)$ таким чином, щоб вони мали вище наведені властивості.

$$P_i^{\Omega}\left(Z^i,C\right)=e^{C\cdot\varphi_i^{\Omega}(Z_i)}, \tag{19}$$

де $\varphi_i^{\Omega}\left(Z^i\right)$, $i\in\left[1:m\right]$ – функція з умови (4), C – штрафний параметр.

Представимо $P_{ij}\left(Z^i,Z^j,C\right)$ у вигляді:

$$P_{ij}\left(Z^i,Z^j,C\right)=e^{C\cdot\varphi_{ij}\left(Z_i,Z_j\right)}, \tag{20}$$

де $\varphi_{ij}\left(Z^i,Z^j\right)$, $i,j\in\left[1:m\right]$ – функція з умови (5), C – штрафний параметр.

На підставі (11), (16), (18)–(20) штрафна функція для поставленої задачі має наступний вигляд:

$$\begin{aligned}P\left(Z,C\right)=&\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{m}\exp\Bigg(C\cdot\Bigg(\left(-1\right)^{l+1}\sum_{k=1}^{k=K}\left(\psi_k(Z^j,Z^i)\right)^l\left(\psi_k(Z^j,Z^i)-\left|\psi_k(Z^j,Z^i)\right|\right)+\\&+\prod_{k=1}^{k=K}\left(\psi_k(Z^j,Z^i)\right)^l\left(\psi_k(Z^j,Z^i)-\left|\psi_k(Z^j,Z^i)\right|\right)\Bigg)\Bigg)+\\&+\sum_{i=1}^{m}\exp\Bigg(C\cdot\Bigg(\left(-1\right)^l\sum_{k=1}^{k=K}\left(\psi_k(Z^i)\right)^l\left(\psi_k(Z^i)-\left|\psi_k(Z^i)\right|\right)+\\&+\prod_{k=1}^{k=K}\left(\psi_k(Z^i)\right)^l\left(\psi_k(Z^i)-\left|\psi_k(Z^i)\right|\right)\Bigg)\Bigg)\end{aligned} \tag{21}$$

Загальна задача оптимізації (1)–(3) в результаті застосування методу штрафних функцій перетворюється на сім'ю задач безумовної оптимізації:

$$\tilde{\chi}(Z,C) = \max_{i\in[1:n]}\left(y_i(Z) + P(Z,C)\right) \to \min, \tag{22}$$

де $P(Z,C)$ – штрафна функція, яка визначається за формулою (21).

Кожну мінімаксну задачу безумовної оптимізації з сім'ї задач (22) можна розв'язувати, використовуючи методи послідовних наближень [9], так як $y_i(Z)$ є неперервно диференційованими, і при побудові функції штрафу були використані такі правила і формули, завдяки яким функція штрафу також є неперервно диференційованою.

Таким чином, метод штрафних функцій вимагає розв'язання послідовності задач з поступовим збільшенням параметру C, від якого в значній мірі залежить здатність «штрафувати» неприпустимий розв'язок задачі.

Поставлена задача розв'язується з використанням другого методу послідовних наближень декілька разів при різному значенні параметру штрафної функції. Наведемо алгоритм даного методу.

1. Обирається точність обрахунку ε .
2. Нехай $\overline{Z}^k$ – деяке k -те наближення до розв'язку задачі.
3. Знаходиться вектор ε -найшвидшого спуску. Для цього необхідно здійснити наступне.
   3.1. Будується індексна множина $R_\varepsilon(Z^k) = \left\{ i \middle| \chi(Z^k) - f_i(Z^k) \le \varepsilon \right\}$.
   3.2. Знаходиться точка $x^k \in L_e(Z)$ така, що $\|x\| \to \min$, де $L_e(Z^k) = \left\{ \sum_{i\in R_\varepsilon(Z^k)} \alpha_i \nabla y_i(Z^k) \middle| \sum_{i\in R_\varepsilon(Z^k)} \alpha_i = 1, \alpha_i \ge 0 \right\}$.
   3.3. Перевіряється, чи точка $x^k = \overline{0}$, якщо так, тоді точка Z^k – стаціонарна точка функції цілі, кінець роботи алгоритму. Інакше перехід до пункту 3.4.
   3.4. Визначається вектор найшвидшого спуску $g^k = -\dfrac{x^k}{\|x^k\|}$.
   3.5. Перевіряється, чи довжина радіус-вектора точки x^k, менша ε , тобто $\|x^k\| \le \varepsilon'$, якщо так, тоді за розв'язок обираємо $Z^* = \overline{Z}^k$.
4. Здійснюється спуск у напрямку вектора g^k і знаходиться наступна точка $\overline{Z}^{k+1}$. Обирається вона методом найшвидшого спуску $\overline{Z}^{k+1} = \overline{Z}^k + \beta_k \cdot g^k$, де β_k задовольняє умові $\chi\left(\overline{Z}^k + \beta_k \cdot g^k\right) = \min_{\beta>0} \chi\left(\overline{Z}^k + \beta \cdot g^k\right)$, присвоюємо k=k+1 і переходимо до п. 2.

Загального правила для знаходження параметрів штрафу не існує. Для випадку поставленої задачі запропоновано наступну схему визначення параметра штрафу.

1. Нехай $\overline{Z}^k$ – деяке k -те наближення до розв'язку задачі.
2. Обирається штрафний параметр $C_{\min}$ досить малим.

Наведемо загальну схему розв'язання поставленої мінімаксної задачі.

1. Нехай маємо обмежену замкнену область розміщення – Ω, яка задається своїми геометричними характеристиками, і m об'єктів $D_1, D_2, \ldots, D_m$, що задаються фізичними та геометричними характеристиками.
2. Будується годограф для кожної пари об'єктів та годограф для кожного об'єкта і області. Визначається початкове розміщення джерел випадковим чином.
3. Нехай $\overline{Z}^k$ – деяке k -те наближення до розв'язку задачі.
4. Визначається значення параметра штрафу. Для цього необхідно здійснюється наступне.
   4.1 Обирається штрафний параметр $C_{\min}$ досить малим (наприклад, 0.001).
   4.2 Знаходяться значення функцій $\varphi_{ij}\left(\overline{Z}^i, \overline{Z}^j\right)$ та $\varphi_i^\Omega\left(\overline{Z}^i\right)$, $\forall i, j \in [1:m], i \ne j$ для наближення $\overline{Z}^k$. Якщо всі отримані значення функцій рівні нулю, то параметр C обирається рівним $C_{\min}$ і здійснюється перехід до п. 5. Інакше – перехід до п. 4.3.

4.3 Визначається новий параметр штрафу з використання знайдених значень функцій $\varphi_{ij}\left(\overline{Z}^i,\overline{Z}^j\right)$ та $\varphi_i^{\Omega}\left(\overline{Z}^i\right)$, $\forall i,j\in\left[1:m\right]$, $i\neq j$ з урахуванням того, що функція штрафу повинна штрафувати отриманий неприпустимий розв'язок задачі (22).

5. Розв'язується одна задача з сім'ї задач другим методом послідовних наближень. Якщо всі задачі з сім'ї розв'язано, завершення роботи алгоритму. Інакше здійснюється перехід до п. 3.

За даним алгоритмом вихідна задача розв'язується декілька разів. За розв'язок обирається найкращий результат відповідно до умов задачі.

Розроблений підхід до розв'язання мінімаксної може бути застосований для розміщення об'єктів багатокутної форми для будь-якої функції цілі, яка задовільняє сформульовані вище умови.

У даній роботі розглянуто наступні мінімаксні задачі:

1. Мінімізація максимальної відстані від полюсів джерел до точки області.

Нехай джерело D_i має параметр розміщення Z^i (полюс джерела). Деяка точка області $Z^{\Omega}=\left(\xi^{\Omega},\eta^{\Omega}\right)$. Тоді математична постановка такої задачі матиме вигляд:

$$\chi\left(Z\right)=\max_{i\in\left[0:n\right]}\left\|Z^i-Z^{\Omega}\right\|^2\to\min\,. \tag{22}$$

2. Мінімізація максимального значення стаціонарного поля, на заданій множині точок.

Нехай маємо деяку задану множину точок $K_i\in R^2, K_i\in\Omega, i\in\left[0:n\right]$. Наведемо математичну постановку цієї задачі.

$$\chi\left(Z\right)=\max_{i\in\left[0:n\right]}u\left(K_i,Z\right)\to\min\,, \tag{23}$$

де $u\left(x,y\right)$ – розв'язок наступної крайової задачі:

$$-\Delta u+\beta^2 u=f \tag{24}$$

$$f=\begin{cases}A_i,\left(x,y\right)\in D_i\\ 0,\left(x,y\right)\notin\bigcup\limits_i D_i\end{cases} \tag{25}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega}=\phi\left(x,y\right). \tag{26}$$

3. Мінімізація максимального значення нестаціонарного поля в заданій точці протягом вказаного часу.

Розв'язок крайової задачі параболічного типу крім того, що визначається на деякій області, визначається на заданому проміжку часу $\left[0,t_k\right]$. Мінімізувати поле в заданій точці на всьому проміжку часу доволі складно. Тому оберемо деяке число q і будемо оптимізувати поле не у всі моменти часу, а лише в наступні:

$$\left\{t_i\middle|t_i=i\cdot t_k/q, i\in\left[0,q\right]\right\}. \tag{27}$$

Нехай необхідно мінімізувати нестаціонарне поле в точці $K\in R^2, K\in\Omega$. Тоді математична постановка задачі має вид:

$$\chi\left(Z\right)=\max_{i\in\left[0:n\right]}u_i\left(Z\right)\to\min \tag{28}$$

$$u_i\left(Z\right)=u\left(K,t_i,Z\right), \tag{29}$$

де $u\left(x\right)$ – розв'язок наступної крайової задачі:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\Delta u-\beta^2 u+f\left(x,t,Z\right) \tag{30}$$

$$f=\begin{cases}A_i,\left(x,y\right)\in D_i\\ 0,\left(x,y\right)\notin\bigcup\limits_i D_i\end{cases} \tag{31}$$

$$\left.u\right|_{t=0}=\phi_1\left(x\right),\ \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega}=\phi_2\left(x,t\right)\cdot \tag{32}$$

Фізичне поле обраховується за допомогою методу скінченних різниць.

Наведемо приклади побудови годографів для областей, які задаються нерівностями (4) та (5).

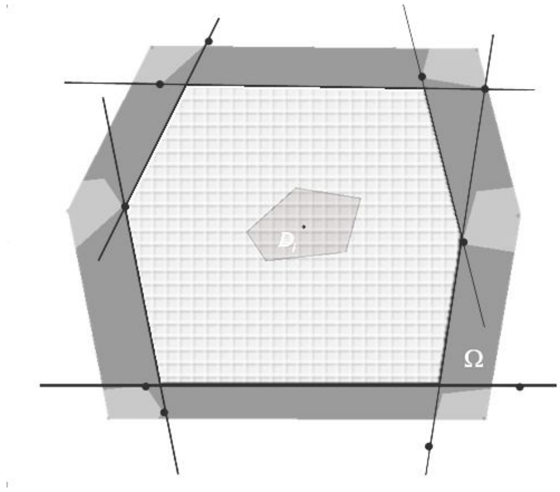


Рис. 1. Побудова годографа у випадку задання умов невиходу об'єкта за межі області

На рис. 1 наведено приклад побудови годографа для системи лінійних обмежень (6).

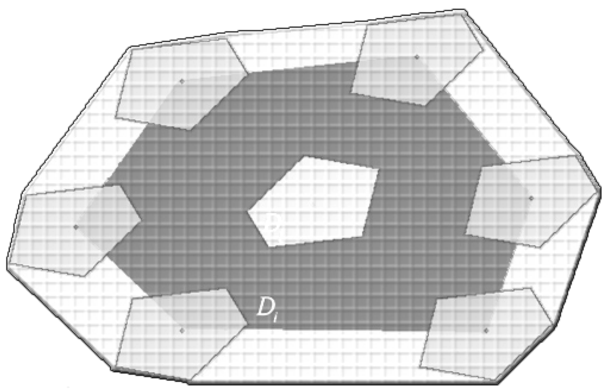
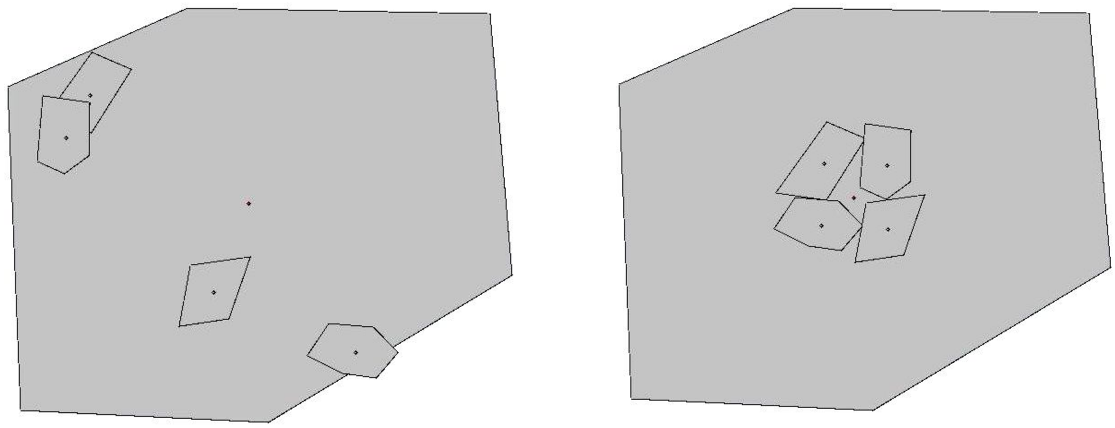


Рис. 2. Побудова годографа у випадку задання умов неперетину двох об'єктів



а) *б)*

Рис 3. Розміщення джерел фізичного поля на заданій області: а) початкове; б) результуюче

На рис. 2 наведено приклад побудови годографа для системи лінійних обмежень (13).

На рис. 1 та на рис. 2 годографи зображено заштрихованими квадратами.

Наведемо приклади роботи алгоритму у випадку задачі (22).

Початкове розміщення джерел було отримано випадковим чином. При такому розміщенні (рис. 3, *а*) функція цілі має значення 84434,0488012289. У результаті роботи алгоритму отримано розміщення джерел, представлене на рис. 3, *б* і функція цілі має в такому випадку значення 5378,894768235.

Висновки. В результаті даного дослідження приведено змістовну і математичну постановки задачі геометричного проектування систем, що містять джерела фізичного поля; формалізовано умови неперетинання джерел фізичного поля і їх належності області розміщення у випадку, коли область і джерела мають форму опуклих багатокутників; здійснено перехід від задачі умовної до задачі безумовної оптимізації з використанням методу штрафних функцій; побудовано відповідні диференційовані функції штрафу на розміщення джерел в області з використанням годографа та апарату R-функцій Рвачева; розроблено механізм застосування методу штрафних функцій для розв’язання задач оптимального розміщення дискретних джерел фізичних полів; розроблено механізм використання другого методу послідовних наближень до поставленої задачі; створено програмний продукт, призначений для розв’язання практичних задач оптимізації систем, що містять джерела фізичного поля.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Пономаренко Л.Д., Туранов И.Н.* Один подход к построению плотных упаковок выпуклых многогранников в заданной области трехмерного пространства. – Харьков, 1979. – 13 с.
2. *Карташов О.В.* Математична модель і метод розв’язання задачі розміщення взаємно орієнтованих багатокутників у багатокутній області: Автореф. дис...к.ф.-м.н.: 01.05.02 / НАН України; Інститут проблем машинобудування. – Харків, 1995. – 23 с.
3. Моделирование размещения нагрузок, обеспечивающего предельный продольный изгибающий момент в строительных сооружениях / С.И. Яремчук, В.В. Рудюк, Ю.А. Шаповалов, Л.В. Рудюк // Электронное моделирование. – 2009. – Т. 31. – № 3. – С. 111–121.
4. *Стоян Ю.Г., Путятин В.П.* Оптимизация технических систем с источниками физических полей. – К.: Наук. думка, 1988. – 192 с.
5. *Яремчук С.І., Жовновський Д.О.* Застосування методу штрафних функцій для розв’язання задач оптимального розміщення джерел фізичних полів // Математичне моделювання. – Дніпродзержинськ: Дніпродз. держ. техн. ун-т, 1998. – С. 37–39.
6. *Бурда Р.В.* Размещение источников, минимизирующее максимпльное по времени поле в точке // Проблемы теоретической и прикладной математики. – 2003. – С. 193–197.
7. *Стоян Ю.Г., Гиль Н.И.* Методы и алгоритмы размещения плоских геометрических объектов. – К.: Наук. думка, 1976. – 248 с.
8. Алгебра логики и интегральные преобразования в краевых задачах / В.Л. Рвачев, А.П. Слесаренко. – К.: Наук. думка, 1976. – С. 71.
9. *Демьянов В.Ф., Малоземов В.Н.* Введение в минимакс. – М.: Наука, 1972. – 368 с.

ДАНИЛЬЧЕНКО Олександр Михайлович – кандидат технічних наук, завідувач кафедри інформатики та комп’ютерного моделювання Житомирського державного технологічного університету.

Наукові інтереси:
– теорія розкладів;
– паралельне програмування;
– системи керування база даних.

МОРГАЛЮК Олег Миколайович – магістр Житомирського державного технологічного університету.

Наукові інтереси:
– методи оптимізації;
– комп’ютерне моделювання.

ЯРЕМЧУК Світлана Іванівна – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри програмного забезпечення обчислювальної техніки Житомирського державного технологічного університету.

Наукові інтереси:
– екстремальні задачі;
– математичне моделювання.

Подано 14.08.2009

Данильченко О.М., Моргалюк О.М., Яремчик С.І. Використання методу штрафних функцій при розв'язанні мінімаксної задачі розміщення джерел

Данильченко А.М., Моргалюк О.Н., Яремчук С.И. Применение метода штрафных функций к решению минимаксной задачи размещения источников

Danilchenko O.M., Morgalyuk O.M., Yaremchuk S.I. The application of the method of penalty functions to solve the minimax problem of source's allocation

УДК 519.67

Применение метода штрафных функций к решению минимаксной задачи размещения источников / Данильченко А.М., Моргалюк О.Н., Яремчук С.И.

Разработана схема применение метода штрафных функций с использованием теории годографа к решению минимаксной задаче размещения источников в случае, когда источники и область размещения имеют форму выпуклых многоугольников.

УДК 519.67

The application of the method of penalty functions to solve the minimax problem of source's allocation / Danilchenko O.M., Morgalyuk O.M., Yaremchuk S.I.

The scheme of method of penalty functions application to solve the minimax problem of source's allocation was deleoped. This scheme is using the hodographs theory. The problem is solving when objects and allocation area have convex polygon form .