УДК 681.323

В.Л. Баранов, д.т.н., проф.
С.В. Водоп'ян, к.т.н., с.н.с.
Р.М. Костюченко, аспір.
Житомирський військовий інститут ім. С.П. Корольова
Національного авіаційного університету

МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛІННЯ РОЗПОДІЛЕНИМИ СИСТЕМАМИ НА ОСНОВІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

Запропоновано метод моделювання процесів оптимального управління розподіленими системами в галузі диференціальних перетворень. Наведено приклад моделювання.

Постановка проблеми. Задачі оптимального управління розподіленими системами виникають в різних галузях науки і техніки. Наприклад задачі оптимального управління тепловими і дифузними процесами необхідно розв'язувати в теплоенергетиці, ядерній енергетиці, авіації, космонавтиці й у ряді інших областей. Щодо освоєння космічного простору важливе практичне значення має оптимальне управління коливаннями сонячної батареї, яка розглядається як гнучка пластина із закріпленим кінцем [1].

Математична модель процесів оптимального управління містить опис процесу, яким управляють, у вигляді диференціальних рівнянь з частинними похідними, початкові й граничні умови, обмеження і оптимізуючий функціонал. Обмежимось розглядом задач оптимального управління, в яких система знаходиться під дією розподіленого лише в часі управління. Місце впливу вважається заданим.

Розв'язок задачі оптимального управління в реальному часі вимагає моделювання процесів оптимального управління в прискореному часі з метою формування на основі моделювання управляючого впливу на розподілену систему.

Відомо, що моделювання розподілених систем методами чисельного моделювання потребує виконання значного об'єму обчислень на ЕОМ в межах заданого часового інтервалу. Виконання значного об'єму обчислень для моделювання розподіленої системи з частотою, більшою ніж 1Гц, вимагає застосування високопродуктивних суперЕОМ [2]. Таким чином, існує проблема моделювання процесів оптимального управління розподіленими системами в реальному і прискореному часі.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Аналіз останніх досліджень і публікацій [3–7] дозволяє зробити висновок про те, що розв'язок проблеми моделювання фізичних процесів у реальному і прискореному часі можливий на основі застосування методів операційного числення, до яких відносять інтегральні і диференціальні перетворення.

На відміну від чисельних методів, які заміняють рівняння з частинними похідними наближеними дискретними аналогами у вигляді цифрової сітки, методи операційного числення дозволяють виконувати точні еквівалентні перетворення рівнянь з частинними похідними в області зображень, в якій вихідне рівняння перетворюється в алгебраїчне. Моделювання фізичних процесів щодо зображень значно простіше, ніж розв'язок крайових задач в області оригіналів. Аналітичний опис фізичного процесу в області зображень виконується на стадії проектування системи управління об'єктами з розподіленими параметрами. Безпосередньо в процесах управління використовується оригінал фізичного процесу, на основі якого будується правління розподіленими системами після переводу оберненими перетвореннями фізичного процесу з області зображень в область оригіналів.

На даний час найбільше розповсюдження для моделювання фізичних процесів отримали інтегральні перетворення [6, 7]. Однак застосування інтегральних пертворень обмежується моделюванням фізичних процесів, які описуються лінійними диференціальними рівняннями з частинними похідними. На відміну від інтегральних, диференціальні перетворення дозволяють моделювати фізичні процеси, які описуються як лінійними, так і нелінійними диференціальними рівняннями з частинними похідними з лінійними і нелінійними крайовими умовами [8–10].

На даний час дослідження проблеми моделювання процесів оптимального управління розподіленими системами на основі диференціальних перетворень не проводились.

В роботах [4, 5] розглядались методи моделювання процесів оптимального управління в області диференціальних перетворень тільки з об'єктами із зосередженими параметрами.

Метою роботи є розробка методу моделювання процесів оптимального управління розподіленими системами на основі диференціальних перетворень.

Постановка задачі. Розглянемо фізичні процеси, що описуються функцією $Q(x, t)$ двох незалежних змінних в області, що визначається обмеженнями:

$$0 \le x \le H_x\,,\ \ 0 \le t \le H_t\,, \tag{1}$$

де H_t, H_x – задані додатні сталі.

Обмежимось розглядом розподілених систем, математична модель яких допускає опис фізичних процесів у вигляді диференціальних рівнянь з частинними похідними в одній з двох форм:

$$\frac{\partial^2 Q(x,t)}{\partial x^2} = \varphi_1(x,\ t,\ Q,\ \frac{\partial Q}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial t},\ \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial t},\ \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2}), \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 Q(x,t)}{\partial t^2} = \varphi_2(x,\ t,\ Q,\ \frac{\partial Q}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial t},\ \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial t},\ \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}). \tag{3}$$

До вигляду (2), (3) можна звести лінійні й квазілінійні рівняння.

Надалі будемо розглядати такі рівняння вигляду (2), (3), для яких можна застосувати принцип суперпозиції [11].

В момент часу $t = 0$ стан фізичного процесу задається початковими умовами вигляду:

$$Q(x,0) = \psi_1(x)\,,\ \left.\frac{\partial Q}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi_2(x)\,, \tag{4}$$

де ψ_1 і ψ_2 – задані неперервні функції. Будемо вважати, що управляючий вплив $u(t)$ зосереджено в граничних умовах:

$$Q(0,t) = u(t)\,,\ Q(H_x, t) = 0\,. \tag{5}$$

Задача оптимального управління полягає в синтезі такого керування $u(t)$, яке на фіксованому інтервалі часу $[0, H_t]$ переводить фізичний процес з початкового стану (4) в заданий термінальний стан:

$$Q(x, H_t) = 0\,,\ \left.\frac{\partial Q}{\partial t}\right|_{t=H_t} = 0\,, \tag{6}$$

а функціонал вигляду:

$$I(u) = \int_0^{H_t} u^2(t)dt\,, \tag{7}$$

повинен досягати мінімального значення.

Функціонал (7) характеризує витрати енергії на управління, яке переводить фізичний процес в заданий термінальний стан (6).

Метод розв'язку задачі оптимального управління полягає в реалізації таких етапів:

1. Управління моделюємо функцією заданого вигляду:

$$u(t) = \Theta(t, C)\,, \tag{8}$$

де $C = (c_1, c_2, ..., c_n)$ – вектор вільних коефіцієнтів апроксимуючої функції або ряду.

2. На основі принципу суперпозиції [11] розв'язок рівняння (2) або (3), яке описує фізичний процес, що моделюють, представимо у вигляді суми двох доданків:

$$Q(x,t,C) = Q_1(x,t) + Q_2(x,t,C)\,, \tag{9}$$

де функція $Q_1(x,t)$ описує вільну складову розв'язку, що виникає від ненульових початкових умов (4) при $u(t) = 0$, а функція $Q_2(x,t,C)$ описує вимушену складову розв'язку, яка виникає під дією управління $u(t)$ при нульових початкових умовах:

$$Q(x,0) = \left.\frac{\partial Q}{\partial t}\right|_{t=0} = 0\,. \tag{10}$$

3. Визначаємо вектор вільних коефіцієнтів управління (8) шляхом розв'язку задачі мінімізації функції:

$$I(C) = \int_0^{H_t} \Theta^2(t,C)dt \ , \tag{11}$$

при виконанні термінальних умов:

$$Q(x,H_t C) = 0 \ , \ \left.\frac{\partial Q}{\partial t}\right|_{t=H_t} = 0 \, . \tag{12}$$

Метод (8)–(12) реалізуємо в області диференціальних перетворень [8–10] на основі двох одномірних перетворень вигляду:

$$\overline{Q}(x,k_1) = \frac{H_t^{k_1}}{k_1!}\left(\frac{\partial^{k_1} Q(x_1,t)}{\partial x^{k_1}}\right)_{t=0} , \qquad Q(x,t) = \sum_{k_1=0}^{\infty}\left(\frac{t}{H_t}\right)^{k_1}\overline{Q}(x,k_1) \, ; \tag{13}$$

$$\overline{Q}(k_2,t) = \frac{H_x^{k_2}}{k_2!}\left(\frac{\partial^{k_2} Q(x,t)}{\partial x^{k_2}}\right)_{x=0} , \qquad Q(x,t) = \sum_{k_2=0}^{\infty}\left(\frac{x}{H_x}\right)^{k_2}\overline{Q}(k_2,t) \, , \tag{14}$$

де цілочисельні аргументи k_1 і k_2 приймають значення 0, 1, 2, 3, ..., $\overline{Q}(x,k_1)$ і $\overline{Q}(k_2,t)$ – зображення фізичного процесу $Q(x, \ t)$, який моделюється. $\overline{Q}(x,k_1)$ і $\overline{Q}(k_2,t)$ називають диференціальними спектрами.

Моделювання процесів оптимального управління розподіленими системами (1)–(7) на основі реалізації методу (8)–(12) в області диференціальних перетворень (13)–(14) розглянемо на прикладі оптимального управління затуханням коливань пружного середовища [11]. Нехай диференціальний процес описується хвильовим рівнянням:

$$\frac{\partial^2 Q(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 Q(x,t)}{\partial x^2} \, , \tag{15}$$

в області:

$$0 \le x \le \pi \ , \ \ 0 \le t \le T \, . \tag{16}$$

В початковий момент часу $t = 0$ маємо збурення фізичного процесу, яке описується початковими умовами:

$$Q(x,0) = 0 \ , \ \left.\frac{\partial Q}{\partial t}\right|_{t=0} = \cos\frac{x}{2} \, . \tag{17}$$

Задано граничні умови:

$$Q(\pi,t) = 0 \ , \ Q(0, \ t) = u(t). \tag{18}$$

З (18) випливає, що управління $u(t)$ зосереджено в точці $x = 0$.

Потрібно знайти таке управління $u(t)$ на фіксованому інтервалі часу $[0, \ T]$, щоб фізичний процес за час $T = 2\pi$ досяг термального стану, заданого умовами:

$$Q(x,T) = 0 \ , \ \left.\frac{\partial Q}{\partial t}\right|_{t=T} = 0 \, , \tag{19}$$

причому функціонал (7) при $H_t = T$ повинен досягати мінімального значення.

З теорії оптимального управління розподіленими коливальними системи [11] випливає, що оптимальне управління можна апроксимувати відрізками ряду Фур'є:

$$u(t) = \begin{cases} u_1(t), & 0 \le t \le \pi \\ u_2(t), & \pi \le t \le 2\pi \end{cases} \, , \tag{20}$$

де $u_i(t) = C_{0i} + C_{1i}\sin C_{3i}t + C_{2i}\cos C_{3i}t$

$i = 1, \ 2$; C_{0i}, C_{1i}, C_{2i}, C_{3i} – вільні коефіцієнти, які потрібно визначити.

Згідно з другим пунктом методу вільну складову $Q_1(x,t)$ розв'язку знаходимо як розв'язок рівняння (15) з початковими умовами (17) і нульовими граничними умовами (18). Розв'язок цієї задачі виконаємо в області диференціальних перетворень (13). Математична модель рівняння (15) в області зображень (13) має вигляд:

$$\overline{Q}_1(x,k_1+2) = \frac{H_t^2}{(k_1+1)(k_1+2)}\frac{\partial^2 \overline{Q}_1(x,k_1)}{\partial x^2} \, . \tag{21}$$

Початкові дискрети диференціального спектра $\overline{Q}_1(x,k_1)$ визначаються з початкових умов (17) з першого виразу диференціальних перетворень (13):

$$\overline{Q}_1(x,0)=0\,,\ \overline{Q}_1(x,1)=H_t\cos\frac{x}{2}\,. \tag{22}$$

За рекурентним виразом (21), використовуючи початкові дискрети (22), розрахуємо диференціальний спектр при $k_1 = 0, 1, 2, 3 \ldots$

$$\begin{gathered}\overline{Q}_1(x,0)=0\,,\ \overline{Q}_1(x,1)=H_t\cos\frac{x}{2}\,,\ \overline{Q}_1(x,2)=0\,,\ \overline{Q}_1(x,3)=-\frac{1}{3!}\frac{H_t^3}{4}\cos\frac{x}{2}\,,\\ \overline{Q}_1(x,4)=0\,,\\ \overline{Q}_1(x,5)=\frac{1}{5!}\frac{H_t^5}{16}\cos\frac{x}{2}\,,\ \overline{Q}_1(x,6)=0\,,\ldots\end{gathered} \tag{23}$$

За другим виразом диференціальних перетворень (13) і диференціального спектра (23) відновимо оригінал вільної складової розв'язку рівняння (15):

$$\begin{aligned}Q_1(x,t)&=\sum_{k_1=0}^{\infty}\left(\frac{t}{H_t}\right)^{k_1}\overline{Q}_1(x,k_1)=\\ &=2\left(\frac{t}{2}\right)\cos\frac{x}{2}-\frac{2}{3!}\left(\frac{t}{2}\right)^3\cos\frac{x}{2}+\frac{2}{5!}\left(\frac{t}{2}\right)^5\cos\frac{x}{2}-\ldots=\\ &=2\left[\frac{t}{2}-\frac{1}{3!}\left(\frac{t}{2}\right)^3+\frac{1}{5!}\left(\frac{t}{2}\right)^5-\ldots\right]\cos\frac{x}{2}=2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\,.\end{aligned} \tag{24}$$

Вимушену складову $Q_2(x,t,C)$ розв'язку рівняння (15) знаходимо при нульових початкових умовах (10) з граничними умовами (18) і управлінням (20).

Розв'язок цієї задачі виконаємо в області диференціальних перетворень (14), в якій зображення рівняння (15) має вигляд:

$$\overline{Q}_2(k_2+2,t)=\frac{H_x^2}{(k_2+1)(k_2+2)}\frac{\partial^2\overline{Q}_2(k_2,t)}{\partial t^2}\,. \tag{25}$$

Початкові дискрети диференціального спектра $\overline{Q}(k_2,t)$ визначаються за другою граничною умовою (18):

$$\overline{Q}_2(0,t)=u(t)\,,\ \overline{Q}_2(1,t)=0\,. \tag{26}$$

Дискрета $\overline{Q}(1,t)=0$ дорівнює нулю, бо управління затуханням коливань фіксоване в точці $x = 0$ і не залежить від зміни змінної x. Тому $\left.\frac{\partial Q_2}{\partial x}\right|_{x=0}=0$, а з першого виразу (14) випливає $\overline{Q}_2(1,t)=0$.

Диференціальний спектр $\overline{Q}_2(k_2,t)$ розраховується за рекурентним виразом (25) і початковим дискретам (26) шляхом послідовного надання цілочисельному аргументу значень $k_2 = 0, 1, 2, 3 \ldots$:

$$\begin{gathered}\overline{Q}_2(0,t)=u(t)\,,\ \overline{Q}_2(1,t)=0\,,\ \overline{Q}_2(2,t)=\frac{H_x^2}{2}u^{(2)}(t)\,,\\ \overline{Q}_2(3,t)=0\,,;\overline{Q}_2(4,t)=\frac{H_x^4}{4!}u^{(4)}(t)\,,\ \overline{Q}_2(5,t)=0\,,\ldots,\end{gathered} \tag{27}$$

де використано позначення $u^{(n)}(t)=\frac{d^nu(t)}{dt^n}$, $n = 1, 2, 3,\ldots$

За другим виразом обернених диференціальних перетворень (14) знайдемо вимушену складову $Q_2(x,t,C)$ розв'язку рівняння (15) шляхом підстановки управління $u(t)$ (20) і його похідних $u^{(n)}(t)$ в (27):

$$\begin{aligned}Q_2(x,t,C)&=\sum_{k_2=0}^{\infty}\left(\frac{x}{H_x}\right)^{k_2}\overline{Q}\ (k_2,t)=\\ &=C_{0i}+\left(C_{1i}\sin C_{3i}t+C_{2i}\cos C_{3i}t\right)\left[1-\frac{(C_{3i}x)^2}{2!}+\frac{(C_{3i}x)^4}{4!}-\ldots\right]=\\ &=C_{0i}+\left(C_{1i}\sin C_{3i}t+C_{2i}\cos C_{3i}t\right)\cos C_{3i}x\,.\end{aligned} \tag{28}$$

Перша гранична умова (18) виконується, якщо у виразі (28) при $x=\pi$ коефіцієнтам надати значення $C_{0i}=0$, $C_{3i}=\frac{1}{2}$. З врахуванням цих значень коефіцієнтів математична модель фізичного процесу (9) описується сумою вільної (24) і вимушеної (28) складових, що складають розв'язок рівняння (15):

$$Q(x,t,C)=2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{x}{2}+\left(C_{1i}\sin\frac{t}{2}+C_{2i}\cos\frac{t}{2}\right)\cos\frac{x}{2}. \qquad (29)$$

Вираз (29) описує процес затухання коливань на часовому проміжку $[0,\pi]$ при i = 1. Як випливає в момент часу $t=\pi$, управління має розрив, який має місце в результаті переходу від управління $u_1(t)$ до управління $u_2(t)$. В результаті цьогов момент часу $t=\pi$ маємо збурення фізичного процесу, яке описується виразом (29) при $t=\pi$:

$$Q(x,\pi)=(2+C_{11})\cos\frac{x}{2},\ \left.\frac{\partial Q}{\partial t}\right|_{t=\pi}=-\frac{C_{21}}{2}\cos\frac{x}{2}. \qquad (30)$$

Введемо новий часовий аргумент $\bar{t}=t-\pi$ і розглянемо фізичний процес затухання коливань на часовому проміжку $t\in[\pi;2\pi]$ або $\bar{t}\in[0;\pi]$. З врахуванням введення часового аргументу $\bar{t}=t-\pi$ вираз (30) задає початкові умови при $\bar{t}=0$:

$$Q(x,\bar{t}=0)=(2+C_{11})\cos\frac{x}{2},\ \left.\frac{\partial Q}{\partial \bar{t}}\right|_{\bar{t}=0}=-\frac{C_{21}}{2}\cos\frac{x}{2}. \qquad (31)$$

Математична модель рівняння (15) в області зображень (21) не залежить від часового аргументу і тому може використовуватись для моделювання фізичного процесу на часовому проміжку $\bar{t}\in[0;\pi]$. Послідовно надаючи цілочисельному аргументу значення $k_1=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots$ за рекурентним виразом (21) при початкових дискретах, заданих умовами (31):

$$\overline{Q}_1(x,0)=(2+C_{11})\cos\frac{x}{2},\ \overline{Q}_1(x,1)=-H_i\frac{C_{21}}{2}\cos\frac{x}{2}.$$

Розрахуємо диференціальний спектр зображення вільної складової розв'язку рівняння (15) на часовому проміжку $\bar{t}\in[0;\pi]$

$$\begin{aligned}&\overline{Q}_1(x,0)=(2+C_{11})\cos\frac{x}{2},\ \overline{Q}_1(x,1)=-H_i\frac{C_{21}}{2}\cos\frac{x}{2},\\&\overline{Q}_1(x,2)=-\frac{1}{4}(2+C_{11})\frac{H_i^2}{2}\cos\frac{x}{2},\ \overline{Q}_1(x,3)=\frac{C_{21}}{8}\frac{H_i^3}{3!}\cos\frac{x}{2},\\&\overline{Q}_1(x,4)=\frac{1}{16}(2+C_{11})\frac{H_i^4}{4!}\cos\frac{x}{2},\ \overline{Q}_1(x,5)=-\frac{C_{21}}{32}\frac{H_i^5}{5!}\cos\frac{x}{2},\ldots\end{aligned} \qquad (32)$$

Оригінал вільної складової розв'язку рівняння (15) на часовому проміжку $\bar{t}\in[0;\pi]$ відновлюємо за другим виразом диференціальних перетворень (13) на основі диференціального спектра (32):

$$\begin{aligned}&Q_1(x,\bar{t})=\sum_{k_1=0}^{\infty}\left(\frac{\bar{t}}{H_i}\right)^{k_1}\overline{Q}_1(x,k_1)=\\&\left\{(2+C_{11})\left[1-\frac{1}{2!}\left(\frac{\bar{t}}{2}\right)^2+\frac{1}{4!}\left(\frac{\bar{t}}{2}\right)^4-..\right]-C_{21}\left[\frac{\bar{t}}{2}-\frac{1}{3!}\left(\frac{\bar{t}}{2}\right)^3+\frac{1}{5!}\left(\frac{\bar{t}}{2}\right)^5-...\right]\right\}\cos\frac{x}{2}=\\&=\left[(2+C_{11})\cos\frac{\bar{t}}{2}-C_{21}\sin\frac{\bar{t}}{2}\right]\cos\frac{x}{2}.\end{aligned} \qquad (33)$$

Вимушена складова розв'язку рівняння (15) на часовому проміжку $\bar{t}\in[0;\pi]$ визначається виразом (28) при i = 2 C_{02} = 0, $C_{32}=\frac{1}{2}$, оскільки зображення (25) рівняння (15) і початкові дискрети (26) зберігають свій вигляд крім зміни управління $u_1(t)$ на управління $u_2(t)$. Отже, вимушена складова $Q_2(x,\bar{t},C)$ (28) розв'язку рівняння (15) на часовому проміжку $\bar{t}\in[0;\pi]$ має вигляд:

$$Q_2(x,\bar{t},C)=\left(C_{12}\sin\frac{\bar{t}}{2}+C_{22}\cos\frac{\bar{t}}{2}\right)\cos\frac{x}{2}. \tag{34}$$

Математична модель фізичного процесу затухання коливань на часовому проміжку визначається сумою вільної (33) і вимушеної (34) складових розв'язку рівняння (15):

$$Q(x,\bar{t},C)=\left[(2+C_{11}+C_{22})\cos\frac{\bar{t}}{2}+(C_{12}-C_{21})\sin\frac{\bar{t}}{2}\right]\cos\frac{x}{2}. \tag{35}$$

Підстановка (35) в термінальні умови (19) при $t=T=2\pi$ або $\bar{t}=\pi$ дає такі співвідношення між коефіцієнтами:

$$C_{12}-C_{21}=0,\quad 2+C_{11}+C_{22}=0. \tag{36}$$

Перейдемо до реалізації третього пункту методу. Підстановка управління (20) при $C_{0i}=0$, $C_{3i}=\frac{1}{2}$, $i=1,2$ у функціонал (7) дозволяє перетворити його в функцію вільних коефіцієнтів:

$$I(C)=\int_0^{\pi}u_1^2(t)dt+\int_{\pi}^{2\pi}u_2^2(t)dt=\frac{\pi}{2}\left(C_{11}^2+C_{21}^2+C_{12}^2+C_{22}^2\right). \tag{37}$$

Задача визначення вільних коефіцієнтів управління (20) звелась до задачі мінімізації функції (37) при виконанні умов у формі рівностей (36). Ця задача може бути розв'язана методом прямої підстановки, або методом множників Лагранжа [12]. Розв'яжемо задачу умовної оптимізації (36), (37) методом прямої підстановки. З рівностей (36) випливає:

$$C_{12}=C_{21},\quad C_{22}=-2-C_{11}. \tag{38}$$

Підстановка (38) в (37) дозволяє звести оптимізаційні задачі (36), (37) до задачі безумовної мінімізації функції двох змінних:

$$I(C_{11},C_{12})=\frac{\pi}{2}\left[C_{11}^2+2C_{12}^2+(2+C_{11})^2\right]. \tag{39}$$

З необхідних умов екстремуму функції (39) отримаємо систему двох рівнянь для визначення C_{11} і C_{12}:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial I}{\partial C_{11}}=\pi\left(C_{11}+2+C_{11}\right)=0\\&\frac{\partial I}{\partial C_{12}}=2\pi\,C_{12}=0\end{aligned} \tag{40}$$

З рівнянь (40) випливає: $C_{11}=1$, $C_{12}=0$. Підстановка цих значень вільних коефіцієнтів у (38) визначає інші невідомі коефіцієнти:

$$C_{12}=C_{21}=0,\quad C_{11}=-1,\quad C_{22}=-1. \tag{41}$$

Дослідження достатніх умов існування екстремуму в точці (41) показує, що функція (39) досягає в цій точці мінімуму.

До системи коефіцієнтів (41) слід дати коефіцієнти, які були знайдені раніше з граничної умови (18):

$$C_{01}=C_{02}=0,\quad C_{31}=C_{32}=\frac{1}{2}. \tag{42}$$

Підстановка значень вільних коефіцієнтів (41), (42) у вираз (20) дає оптимальне управління затухання коливань пружного середовища в такому вигляді:

$$u(t)=\begin{cases}-\sin\dfrac{t}{2}, & 0\le t\le\pi\\[2mm] -\cos\dfrac{t}{2}, & \pi\le t\le 2\pi\end{cases}. \tag{43}$$

Таким чином, моделювання процесів оптимального управління затуханням коливань пружного середовища в області диференціальних перетворень дозволило отримати в прикладі, який розглянуто, оптимальне управління в аналітичному вигляді (43).

Реалізація оптимального управління (43) засобами обчислювальної техніки в реальному або прискореному часі не є складною. З цією метою можуть бути використані різні аналогові, цифрові або гібридні генератори періодичних функцій.

Висновки. Запропоновано метод моделювання процесів оптимального управління розподіленими системами на основі системи одномірних диференціальних перетворень.

Метод дозволяє на стадії проектування системи управління отримувати оптимальне управління в аналітичному вигляді, реалізація якого в реальному або прискореному часі в системі управління може бути виконана будь-якими засобами обчислювальної техніки: аналоговими, цифровими або гібридними.

Предметом подальших досліджень є узагальнення запропонованого методу моделювання на оптимальні процеси в нелінійних розподілених системах.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Згуровский М.З., Бидюк П.И.* Анализ и управление большими космическими конструкциями. – К.: Наук. думка, 1997. – 452 с.
2. Высокоскоростные вычисления. Архитектура, производительность, прикладные алгоритмы и программы суперЭВМ: Пер. с англ./ Под ред. Я.Ковалика. – М.: Радио и связь, 1988. – 432 с.
3. *Колодницький М.М.* Основи теорії математичного моделювання систем. – Том 1. – Житомир: ЖІТІ, 2001. – 718 с.
4. *Фролова О.Г.* Моделювання оптимальних процесів керування зміщеними диференціальними перетвореннями // Вісник ЖІТІ. – 2001. – № 18. – С. 155–160.
5. *Баранов В.Л., Фролова Е.Г., Баранов Г.Л.* Метод смещённых дифференциальных преобразований для решения многокритериальных задач управления // Электроника и связь. – 2002. – № 16. – С. 25–28.
6. *Булавацький В.М.* Задача оптимального керування тепловим процесом в рамках некласичної математичної моделі // Зб. наук. пр. Київського університету економіки і технологій транспорту / Транспортні системи і технології. – К.: КУЕТТ, 2004. – Вип. 6. – С. 136–141.
7. *Мокін В.Б.* Математичні моделі для контролю і управління якістю річкових вод. – Вінниця: УНІВЕРСУМ, 2005. – 172 с.
8. *Пухов Г.Е.* Дифференциальные преобразования функций и уравнений. – Киев: Наук. думка, 1984. – 420 с.
9. *Пухов Г.Е.* Дифференциальные преобразования и математическое моделирование физических процессов. – Киев: Наук. думка, 1986. – 160 с.
10. *Пухов Г.Е.* Дифференциальные спектры и модели. – Киев: Наук. думка, 1990. – 184 с.
11. *Фельдбаум А.А., Бутковский А.Г.* Методы теории автомаического управления. – М.: Наука, 1971. – 744 с.
12. *Сейдж Э.П., Уайт Ч.С.* Оптимальное управление системами. – М.: Радио и связь, 1982. – 392 с.

БАРАНОВ Володимир Леонідович – Заслужений діяч науки і техніки України, доктор технічних наук, професор, провідний науковий співробітник Житомирського військового інституту ім. С.П. Корольова Національного авіаційного університету.

Наукові інтереси:
- моделювання;
- оптимізація;
- диференціальні перетворення.

ВОДОП'ЯН Сергій Васильович – кандидат технічних наук, докторант, старший науковий співробітник Житомирського військового інституту ім. С.П. Корольова Національного авіаційного університету.

Наукові інтереси:
- моделювання;
- оптимізація.

КОСТЮЧЕНКО Руслана Михайлівна – аспірант, викладач кафедри фундаментальних дисциплін Житомирського військового інституту ім. С.П. Корольова Національного авіаційного університету.

Наукові інтереси:
- моделювання;
- диференціальні перетворення.

Подано 25.01.2008