ІНФОРМАТИКА, ОБЧИСЛЮВАЛЬНА ТЕХНІКА ТА АВТОМАТИЗАЦІЯ

УДК 681.3

І.В. Гаращенко, аспір.
Житомирський державний технологічний університет

ЕВРИСТИЧНИЙ АЛГОРИТМ ПОШУКУ КІСТЯКА МІНІМАЛЬНОЇ ВАГИ З МІНІМАЛЬНОЮ КІЛЬКІСТЮ ВИСЯЧИХ ВЕРШИН

(Представлено д.т.н., проф. Панішевим А.В.)

В статті пропонується модифікація алгоритму побудови кістяка мінімальної ваги, в якій використовуються механізми для зменшення кількості висячих вершин. Це дозволяє підвищити точність розв'язку задачі комівояжера наближеними методами.

Постановка проблеми у загальному вигляді. Задача комівояжера не втратила актуальності й на сьогоднішній день, оскільки значна кількість задач комбінаторної оптимізації може бути зведена до неї за поліноміальний час.

Для розв'язку задач цього типу існують точні та наближені алгоритми. Недоліком точних алгоритмів є тривалий час їх роботи навіть на сучасних машинах, що є неприйнятним при розв'язанні задач розмірністю більше 25. За допомогою наближених методів можна отримати роз'язок за прийнятний час, але з деякою похибкою. Алгоритм Кристофидеса найточніший з відомих наближених алгоритмів, але має досить тривалий час роботи. Запропонований в роботі [1] алгоритм, як показав експеримент, не поступається за точністю алгоритму Кристофідеса та має значно менший час роботи.

Отже отримуємо постановку проблеми у вигляді задачі зменшення похибки наближеного розв'язку, запропонованого в [1], що матиме незначний вплив на час роботи алгоритму.

Аналіз досліджень і публікацій. В [1] представлено алгоритм, що має прийнятну точність та швидкодію. Метод знаходить розв'язок у два етапи: на першому формується деяке *i*-дерево, а на другому відбувається перетворення отриманного *i*-дерева в гамільтонів цикл (ГЦ).

Аналіз алгоритму показав, що швидкість його роботи і точність залежать від кількості висячих вершин кістяка мінімальної ваги, з якого формується *i*-дерево, що перетворюється. А отже точність розв'язку даним методом можна підвищити, якщо наприкінці другого етапу для формування *i*-дерева серед ізоморфних кістяків мінімальної ваги (КМВ) обрати КМВ з мінімальною кількістю висячих вершин.

Цілі статті. Головною метою статті є викладення методу пошуку кістяка мінімальної ваги з найменшою кількістю висячих вершин в повному зваженому графі із симетричною матрицею вартостей.

Основний матеріал. Будемо шукати розв'язок симетричної задачі комівояжера (СЗК). Під *v*-деревом $T = (V,\ E_i)$ будемо розуміти підграф повного графа $G_n = (V, E)$, що містить дерево, яке охоплює множину вершин $V \setminus \{v\}$ і два ребра, інцидентні вершині v, $v \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $|V| = n$.

У симетричній матриці вартостей $\left[d_{ij}\right]_n$, $d_{ij} \in R_0^+$, $i \neq j$, $d_{ii} = \infty$, $i, j = \overline{1, n}$, R_0^+ – множина невід'ємних дійсних чисел, кількість попарно різних значень d_{ij}, $i \neq j$ не перевищує $n(n-1)/2$. Матриця $\left[d_{ij}\right]_n$, що має значну кількість однакових елементів над головною діагоналлю, в загальному випадку породжує декілька *v*-дерев мінімальної вартості, які відрізняються кількістю висячих вершин $n(v)$. При перетворенні *v*-дерева в гамільтонів цикл похибку наближеного розв'язку τ_v можна зменшити побудовою такого дерева T_v, у якого число $n(v)$ – мінімальне.

Твердження. Задача знаходження в повному зваженому графі $G = (V, E)$ дерева T_v з найменшою кількістю висячих вершин NP-важка.

*Доведення***.** Розглянемо повний зважений граф G' з $n + 1$ вершинами, в якому граф $G = = (V, E)$, $|V| = n$, є його підграфом, а кожному ребру $\{n+1,\ i\}$, $i \in V$ приписано вагу 1. Нехай τ – кістяк мінімальної ваги (КМВ) графа G. Визначимо в графі G' дерево T_v' і його вагу:

$$d\left(T_v'\right) = 2 + d(\tau),$$

де $d(\tau)$ – вага КМВ у графі G.

Для побудованого графа G' сформулюємо запитання.

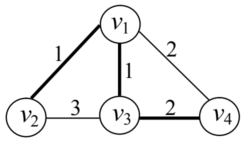
Чи існує в G' дерево T_v^0 з вагою рівною $d\left(T_v'\right)$ та з кількістю висячих вершин $n^0\left(v\right) \le 2$?

Задача побудови дерева T_v^0 NP-важка при $n^0\left(v\right) \le 2$ як класична задача знаходження в графі G гамільтонового ланцюга мінімальної вартості.

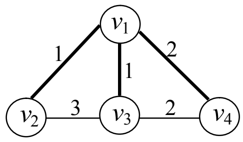
Наслідок. Задача побудови в повному зваженому графі G КМВ з мінімальною кількістю висячих вершин NP-важка.

Таким чином, складність пошуку дерева T_v з найменшим $n(v)$ можна співставити зі складністю симетричної задачі комівояжера (СЗК). Тому на першій стадії знаходження її наближеного розв'язку τ_v скористаємося поліноміальним алгоритмом, який буде стримувати зростання кількості висячих вершин у процесі побудови КМВ, що охоплює множину вершин $V/\{v\}$.

Такий алгоритм являє собою модифікацію градієнтного або жадного алгоритму побудови КМВ, який визначає на кожному кроці безпечне ребро, тобто ребро з найменшою вагою, яке не утворює циклів з уже обраними ребрами. У випадку появи на деякому кроці декількох безпечних ребер будь-яке з них може бути добавлене до частково побудованого КМВ, утворюючи нове дерево або ліс. При цьому ступінь вершини дерева, до якого додається ребро, збільшується на 1. Якщо обране ребро інцидентне висячій вершині дерева, що нарощується, то кількість висячих вершин в ньому залишається незмінною. У протилежному випадку вона збільшується на 1 (рис. 1). Звідси випливає, що точність розв'язку τ_v можна збільшити, якщо алгоритм побудови КМВ у повному графі з множиною вершин $V/\{v\}$ доповнити засобами, що обмежують кількість висячих вершин.



а)



б)

Рис. 1: а) з двох безпечних ребер $\left(v_1, v_4\right)$ і $\left(v_3, v_4\right)$ обране ребро $\left(v_3, v_4\right)$, що призводить до КМВ з двома висячими вершинами; б) при виборі ребра $\left(v_1, v_4\right)$ КМВ містить три висячі вершини

Розглянемо градієнтний алгоритм побудови КМВ, який виконується в два етапи. Перший етап полягає у сортуванні всіх ребер повного зваженого графа $G = (V, E)$, $|V| = n$, а другий – у побудові з них КМВ за допомогою жадної процедури [2]. Основна ідея використання цього алгоритму для обмеження кількості висячих вершин в КМВ графа G полягає в наступному. Будемо зберігати поточне значення степеня $\deg(i)$ кожної вершини $i \in V$. Перед початком побудови КМВ T_0 з обмеженою кількістю висячих вершин n_0 встановимо $\deg(i) = 1$, $i = \overline{1, n}$, $\mathrm{T}_0 = \varnothing$, $n_0 = 0$, та розіб'ємо на підмножини, кожна з яких містить всі ребра однієї ваги. На другому етапі серед всіх ребер рівної вартості послідовно обираються та додаються до T_0 безпечні ребра. З врахуванням того, що КМВ, який нарощується, взагалі є лісом, вибір і додавання до нього безпечних ребер однієї ваги точніше виконується у дві стадії.

На першій стадії до частково побудованого КМВ додаються:

1) ребра, які утворюють з ним компоненту зв'язності, а отже збільшують поточне значення n_0 на 2;

2) ребра, які не збільшують поточне значення n_0.

Ребром другої групи може бути:

а) ребро, інцидентне висячій вершині дерева, що будується T_0;

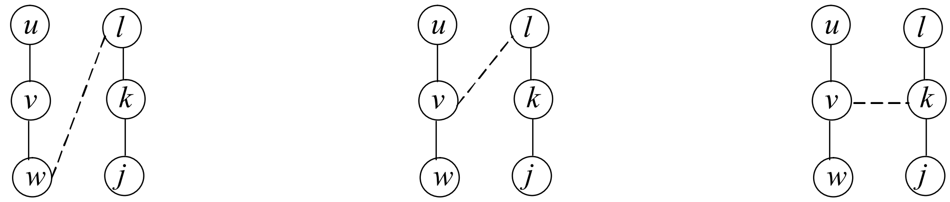
б) ребро, додавання якого до КМВ, що нарощується, утворює з двох компонент зв'язності одну.

Якщо ребро вигляду (б) інцидентне висячим вершинам лісу T_0, то поточне значення n_0 зменшується на 2 (рис. 2, *а*). Воно зменшується на 1, якщо ребро вигляду (б) інцидентне тільки одній висячій вершині в T_0 (рис. 2, *б*). Значення n_0 залишається незмінним при додаванні ребра вигляду (б), інцидентного вершинам, степені яких не менше 2 (рис. 2, *в*).

Зазначимо, що степінь вершини в T_0, інцидентній ребру, яке додається, збільшується на 1 незалежно від його вигляду.

На другій стадії серед ребер однієї ваги, не доданих в T_0, шукається кожне безпечне ребро та додається до КМВ, що нарощується. У цьому випадку $n_0 = n_0 + 1$, $\deg(i) = \deg(i) + 1$ для тієї вершини i в T_0, до якої додається безпечне ребро.

Дії із знаходження КМВ T_0 більш детально представимо таким чином.



а) *б)* *в)*

Рис. 2: пунктирними лініями представлені ребра, які додаються; а) $n_0 = 4 - 2 = 2$, $\deg(w) = \deg(l) = 1 + 1 = 2$; *б)* $n_0 = 4 - 1 = 3$, $\deg(v) = 2 + 1 = 3$, $\deg(l) = 1 + 1 = 2$; *в)* $n_0 = 4$, $\deg(v) = \deg(k) = 2 + 1 = 3$

S0. У повному графі $G = (V, E)$, $|V| = n$ ребру $e_j \in E$ приписана невід'ємна вага $d(e_j)$; множина E впорядкована за неспаданням ваг ребер; для кожної вершини $i \in V$ її ступінь $\deg(i) = 1$, КМВ $T_0 = \varnothing$, $|\mathrm{T}_0| = 0$; кількість висячих вершин КМВ $n_0 = 0$; $k = 1$.

S1. Поки $|\mathrm{T}_0| \le n - 1$ виконувати

початок

$z = d(e_k)$;

поки $z = d(e_k)$ виконувати

початок

знайти для T_0 безпечне ребро;

якщо ребро e_k не має загальної вершини з T_0, то $n_0 = n_0 + 2$;

якщо одна з вершин ребра e_k є висячою вершиною в T_0, то встановити $\deg(i) = \deg(i) + 1$;

якщо ребро $e_k = (i, j)$ поєднує висячі вершини *i* та *j* двох компонент зв'язності T_0, то $n_0 = n_0 - 2$, $\deg(i) = \deg(i) + 1$, $\deg(j) = \deg(j) + 1$;

якщо ребро $e_k = (i, j)$ поєднує вершини компонент зв'язності, одна з яких є висячою, то $n_0 = n_0 - 1$; збільшити ступінь вершин *i* та *j* на 1;

якщо ребро $e_k = (i, j)$ поєднує невисячі вершини *i* та *j* компонент зв'язності, то $\deg(i) = \deg(i) + 1$, $\deg(j) = \deg(j) + 1$; $\mathrm{T}_0 = \mathrm{T}_0 \cup \{e_k\}$, $|\mathrm{T}_0| = |\mathrm{T}_0| + 1$;

відмітити ребро e_k;

$k = k + 1$

кінець

поки $z = d(e_k)$ виконувати

початок

знайти безпечне непомічене ребро e_k для T_0;

$\mathrm{T}_0 = \mathrm{T}_0 \cup \{e_k\}$; $|\mathrm{T}_0| = |\mathrm{T}_0| + 1$; $n_0 = n_0 + 1$;

збільшити на 1 ступінь тієї вершини в T_0, до якої приєднане ребро e_k;

$k = k + 1$

кінець

кінець

Змінна *z* фіксує перше та останнє ребро підмножини ребер однакової ваги. У першому вкладеному циклі з цієї підмножини обираються та додаються до T_0 безпечні ребра, які зберігають або зменшують поточне значення n_0, а також ребра, вершини яких не містяться в T_0. У другому вкладеному циклі до КМВ T_0 приєднуються безпечні ребра, які залишилися в підмножині.

Час побудови КМВ T_0 можна співставити з часом роботи градієнтного алгоритму знаходження КМВ, що виконує сортування ребер за вагою. Використовуючи ефективну організацію зберігання вершин і ребер графа *G*, можна виконати крок S1 з трудомісткістю, що оцінюється величиною $O\left(|E|\log|E|\right)$ [3].

Висновки. Розроблено модифікацію методу пошуку КМВ у повному зваженому графі, що містить засоби, які дозволяють зменшити в ньому кількість висячих вершин. Це підвищує точність розв’язку симетричної задачі комівояжера.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Гаращенко І.В., Морозов А.В., Панішев А.В.* Наближений метод розв’язання задач типу комівояжера, заданих матрицею спеціального вигляду // Вісник ЖДТУ. – 2007. – № 1(40). – С. 147–154.
2. *Пападимитриу Х., Стайглиц К.* Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. – М.: Мир, 1985. – 510 с.
3. *Харари Ф.* Теория графов. – М.: Мир, 1973. – 300 с.

ГАРАЩЕНКО Ірина Володимирівна – аспірант Житомирського державного технологічного університету.

Наукові інтереси:

– комп’ютерно-інформаційні технології;

– комбінаторна оптимізація.

Подано 10.10.2007