

Б.Л. Тишевич, к.т.н., доц.
В.Г. Городецький, к.ф-м.н., ст. викл.
Національний технічний університет України „КПІ”

МЕТОД ДОСЛІДЖЕННЯ СКЛАДНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ У ПРОСТОРІ СТАНІВ

Розглядається метод моделювання складних систем управління із використанням наближаючих функцій.

Вступ. В останні роки аналіз і синтез систем управління із використанням нечіткої логіки, нейронних мереж неможливий без використання сучасного програмного забезпечення. По-перше, це пов'язано з ростом складності об'єктів управління, які досліджуються, відповідно до доцільності застосування нечіткої логіки та нейронних мереж, а по-друге, синтез складних алгоритмів систем управління і подальша реалізація можливі тільки на комп'ютерній техніці.

Математичний опис складних систем високого порядку, у сучасному програмному забезпеченні, виконується за допомогою матричних рівнянь і система розглядається у просторі станів. Традиційні методи моделювання з використанням методів чисельного інтегрування не забезпечують сталості і точності для систем високого порядку, при низькій швидкості отримання рішення. Точне моделювання об'єктів управління і систем управління в цілому потребує методів, які забезпечують сталість, точність рішення при високій швидкодії і не потребують великої продуктивності комп'ютера.

Виклад основного матеріалу. Існуючі методи розв'язання рівнянь систем можна розділити на 3 групи: обчислювальні методи теорії матриць [1]; методи, засновані на представленні лінійних систем у дискретному просторі [2]; методи чисельного інтегрування стосовно до різних форм представлення систем [3]. Оскільки всі перераховані методи мають недоліки, пов'язані з точністю результатів чи складністю реалізації, то можливе використання методу, заснованого на представленні змінних стану системи в лінійному просторі наближаючими функціями, що визначені на інтервалах часу $t_{i-1} \leq t \leq t_i$, $t_{i-1} - t_i = T$, з наступним аналітичним визначенням значень усіх змінних на границях інтервалів.

Моделювання фізичної системи в просторі станів можливо при адекватному описі рівняннями стану

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx + Du, \end{cases} \quad (1)$$

де x – вектор стану; u – вектор керування; y – вихідний вектор; A – системна (параметрична) матриця; B – матриця керування (вхідна); C – вихідна матриця; D – матриця наскрізної передачі керування.

Рівняння (1) відповідають звичайному диференціальному рівнянню в символічній формі (при $y(0) = 0$, $u(0) = 0$) виду:

$$\sum_{i=0}^n a_i p^i Y(p) = \sum_{j=0}^m b_j p^j U(p), \quad n \geq m, \quad (2)$$

розв'язок якого зводиться до розв'язку при заданих початкових умовах $x(t_0) = x_0$, матричного алгебраїчного рівняння стану:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (3)$$

відповідного представлення рівняння системи (2) у нормальній формі Коші.

У просторі станів використовують, в основному, дві стандартні форми представлення диференціальних рівнянь [3], що описуються рівнянням (1), але відрізняються структурою і набором елементів матриць. Для однієї із форм представлення, прийнявши $Y(p) = y$, $U(p) = u$, $X(p) = x$, а також

$$x = \frac{u}{\sum_{i=0}^n a_i p^i} = \frac{y}{\sum_{j=0}^m b_j p^j}, \quad m \leq n \quad (4)$$

вводяться позначення для змінних вектора станів $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$

$$x = x_j,$$

$$\begin{aligned}
 px_1 &= x_2, \\
 &\dots\dots\dots, \\
 px_{n-1} &= x_n, \\
 px_n &= \frac{1}{a_n}u - \frac{a_0}{a_n}x_1 - \frac{a_1}{a_n}x_2 - \dots - \frac{a_{n-1}}{a_n}x_n.
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

Звідки значення матриць

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & -\frac{a_2}{a_n} & -\frac{a_3}{a_n} & \dots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix}; \mathbf{B}=[0 \ 0 \ \dots \ 1/a_n]; \mathbf{C}=[b_0 \ b_1 \ \dots \ b_m]; \mathbf{D}=0.$$

Дана форма представлена у вигляді структурної схеми, яка показана на рис.1.

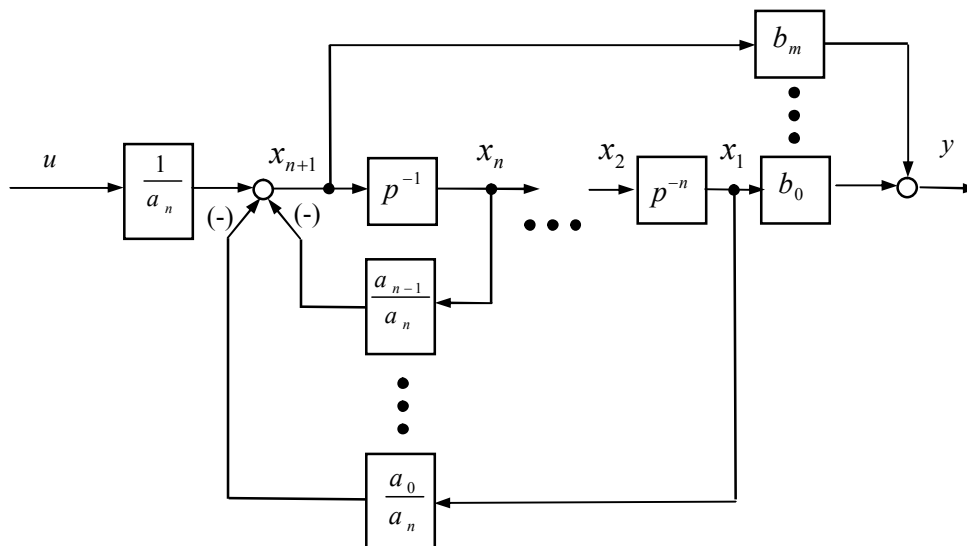


Рис. 1. Структурна схема представлення рівнянь стану

Оскільки при аналізі складних систем аналітично описати функції, які поєднують зміну вхідних, внутрішніх, вихідних координат системи в лінійному просторі при $0 < t < \infty$ практично неможливо, то у випадку використання дискретно-аналітичної апроксимації всіх змінних, аналітичного визначення функціональних залежностей між змінними і алгоритмічного стикування значень змінних на границях часових інтервалів можливо одержати стале комп'ютерне розв'язання рівнянь системи при високій точності.

Функціональні залежності для внутрішніх змінних досить просто визначити, як видно з (5), відносно похідної старшої змінної px_n . При цьому, якщо позначити $px_n = x_{n+1}$, значення змінної будуть визначатися виразами:

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} &= \frac{1}{a_n}u - \frac{a_0}{a_n}x_1 - \frac{a_1}{a_n}x_2 - \dots - \frac{a_{n-1}}{a_n}x_n, \\
 x_n &= p^{-1}x_{n+1}, \\
 &\dots\dots\dots, \\
 x_1 &= p^{-n}x_{n+1}.
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

Як видно з (6), усі змінні стану вектора x можна визначити відносно x_{n+1} , записавши отримані залежності як диференціальні рівняння, які у загальному вигляді представлені виразами:

$$p^{(n+1-k)}x_k = x_{n+1}.
 \tag{7}$$

Комп'ютерне розв'язання рівнянь (7), звичайно, виконується за допомогою класичних чисельних методів. Рівняння високого порядку представляється алгоритмічно як система рівнянь першого порядку, у якій вихідна змінна попереднього рівняння є вхідний змінної наступного:

$$\begin{aligned}
 px_n &= x_{n+1}, \\
 &\dots\dots\dots,
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

$px_i = x_i$,
 для $x_i(t_0) = x_i(0); i = 1, 2, \dots, n$.

Тоді чисельні рішення для рівнянь (8) у залежності від обраного методу:

$$\begin{aligned} x_n(k+1) &= f(x_n(0), x_n(k), x_{n+1}(k), \Delta t, \dots); \\ &\dots\dots\dots; \\ x_i(k+1) &= f(x_i(0), x_i(k), x_2(k), \Delta t, \dots), \end{aligned} \tag{9}$$

де $k = 0, 1, 2, \dots, \infty$; Δt – крок інтегрування.

Оскільки функціональні залежності (9), при алгоритмічній реалізації, визначають чисельне значення величин вихідних змінних кожного рівняння, то основний недолік полягає в послідовному збільшенні похибки в розв'язанні при переході від одного рівняння до іншого.

Отже, для підвищення точності необхідно використовувати методи, що дозволяють визначити всі змінні вектора x відносно x_{n+1} , за допомогою безпосередніх функціональних залежностей. Якщо прийняти $x_{n+1} = f(t)$ для $0 < t < \infty$, то аналітичний розв'язок для (7) можна одержати, перейшовши від операторної форми до символічної, з урахуванням початкових умов, використовуючи перетворення, наприклад, Лапласа–Карсона:

$$x_k(p) = x_{n+1}(p)p^{-(n+1-k)} + \sum_{r=k}^n x_r(0)p^{-(k-r-1)}, k = 1, 2, \dots, n, \tag{10}$$

чи при виділенні змінних із початковими умовами

$$x_k(p) = x_{n+1}(p)p^{-(n+1-k)} + x_k(0) + \sum_{r=k+1}^n x_r(0)p^{-(r-k)}, k = 1, 2, \dots, n, \tag{11}$$

а враховуючи, що $x_k^{(m)}(0) = p^m x_k(0) = x_{k+m}(0), k = 1, 2, \dots, n; m = 1, 2, \dots, n$:

$$x_k(p) = x_{n+1}(p)p^{-(n+1-k)} + x_k(0) + \sum_{r=k+1}^n x_r(0)p^{-(r-k)}, k = 1, 2, \dots, n. \tag{12}$$

Вирази (10,...,12) зручно представити модифікованою структурною схемою, як показано на рис. 2.

Як видно з (10), рішення в області оригіналів для змінної стану можна визначити, якщо відомо аналітичний опис змінної $x_{n+1}(t)$ для $0 \leq t \leq \infty$, але оскільки вона залежить згідно з (6) від змінних x_1, \dots, x_n і u , то практично такий опис одержати неможливо.

При комп'ютерному моделюванні зручно апроксимувати x_{n+1} наближаючою дискретно-аналітичною функцією $x_{n+1} = \psi(t)$ визначеної на інтервалі $t = T$, тоді рішення для (10) також будуть визначені на цьому інтервалі. Одержати значення всіх змінних стану, з огляду на особливості представлення даних у комп'ютері, можна тільки на границях інтервалів. У такому випадку рішення для $x_k = f(mT)$ для будь-якого інтервалу буде представляти суму рішень для кожного інтервалу $x_k = f(x_{n+1}(T), x_k(0), T, m)$:

$$x_k(mT) = \sum_{m=1}^{\infty} f[x_{n+1}(mT), x_k[(m-1)T], T], m = 1, \dots, \infty. \tag{13}$$

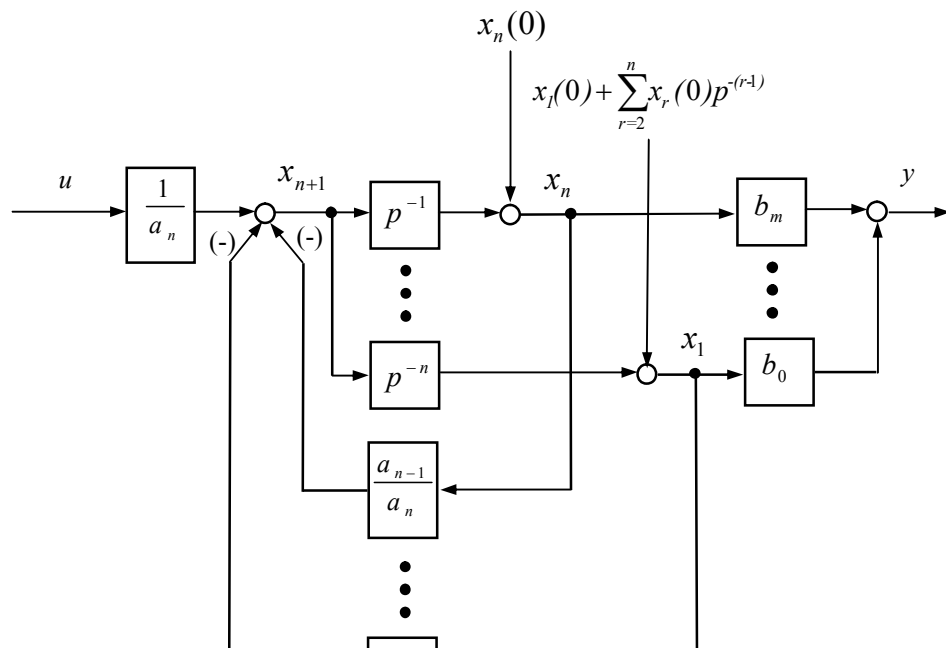


Рис. 2. Модифікована структурна схема представлення рівнянь стану

Аналітичне вираження для $x_k(mT) = f(x_{n+1}(mT))$, при конкретному способі апроксимації $x_{n+1} = \psi(t) = \psi(mT)$, можна одержати при використанні зворотнього перетворення Лапласа – Карсона, визначивши оригінал рішення при $0 \leq t \leq T$, а потім перейшовши до виразів для змінних з врахуванням $(m-1)T \leq t \leq mT$.

Існує досить велика кількість способів апроксимації функцій [1]. Найбільший інтерес, у даному випадку, представляють способи, що забезпечують високий ступінь наближення до оригіналу при мінімальній кількості точок апроксимації. Так, у системах, які моделюються при побудові процесів із прогресивним кроком, необхідно враховувати, що згідно з (6) алгоритм обчислення x_{n+1} при апроксимації наближаючими функціями вимагає використання значень змінних стану на кожному інтервалі, тобто для (6):

$$x_{n+1}(mT) = \frac{1}{a_n} u(mT) - \frac{a_0}{a_n} x_1((m-1)T) - \dots - \frac{a_{n-1}}{a_n} x_n((m-1)T). \quad (14)$$

Рішення для $x_k(mT)$, $k = 1, \dots, n$ відповідно (13) визначено тільки на верхній границі поточного інтервалу mT , яке потім використовується для визначення значення x_{n+1} на наступному інтервалі $[(m+1)T]$. При великій кількості вихідних точок апроксимації, наприклад $x_{n+1}(mT) \approx f(0, T/4, T/2, 3T/4, T)$ можливо визначити тільки $x_k(mT) \approx f(0, T)$ і при наступному обчисленні (14) значення $x_{n+1}[(m+1)T]$ будуть перевернуті, а отже будуть перевернуті і $x_k[(m+1)T]$.

Щонайкраще підходять двоточкові способи апроксимації, при яких функція визначена на інтервалі $0 \leq t \leq T$ при використанні двох значень $x_{n+1} = f(T) = f(mT)$ і $x_{n+1} = f(0) = f((m-1)T)$, а також значень $x_{n+1}(mT)$ при $m \leq m-2$. До таких способів апроксимації відносяться лінійна і сплайнова.

Лінійна апроксимація полягає в тому, що задані точки з'єднуються прямолінійними відрізками, і функція $x_{n+1}(t)$ наближається ламаною з вузлами в даних точках. Для кожного з інтервалів у якості інтерполяційного багаточлена використовується рівняння прямої, що проходить через дві точки. Зокрема, для m -го інтервалу, визначеного для $0 \leq t \leq T$:

$$x_{n+1}(t) = kt + x_{n+1}(0), \quad (15)$$

де $k = (x_{n+1}(T) - x_{n+1}(0))/T$.

Зображення за Лапласом – Карсоном для (15):

$$x_{n+1}(p) = kp^{-1} + x_{n+1}(0). \quad (16)$$

Зображення рішення (10) для лінійної апроксимації (16):

$$x_k(p) = kp^{-(n+2-k)} + x_{n+1}(0)p^{-(n+1-k)} + \sum_{r=k}^n x_k(0)p^{-(k-r-1)}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (17)$$

У виразу (17) останній доданок, куди входять похідні від початкових умов, можливо реалізувати алгоритмічно, якщо врахувати, що початкові умови $x_k(0)$ при визначенні $x_k(mT)$ для інтервалу m відповідають $x_k[(m-1)T]$, а порядок похідної від $x_k(0)$ визначається порядком рівняння (7) і відповідно значенням змінної $x_k[(m-1)T]$:

$$x_k^{(n-r)}(0) = x_k^{(n-r)}[(m-1)T]. \quad (18)$$

Із (17) оригінал для будь-якого інтервалу m при $t = T$

$$x_k(mT) = kT^{(n+2-k)}/(n+2-k)! + x_{n+1}[(m+1)T]T^{(n+1-k)}/(n+1-k)! + x_k[(m-1)T] + \sum_{r=1}^{n-k} x_k^{(r)}[(m-1)T]T^r/r!, \quad (19)$$

де $k = (x_{n+1}(mT) - x_{n+1}[(m-1)T])/T$.

Більш складним різновидом апроксимації функцій, для яких не існує аналітичного опису, є сплайн-апроксимація [4]. Лінійна, поліноміальна апроксимації, на відміну від сплайнової, не забезпечують безперервність похідних апроксимуючої функції на границях інтервалу і дають значні похибки в проміжках між опорними точками. Крім того, вони погано пристосовані для екстраполяції і не точно описують поведінку функції, яка апроксимується за межами інтервалу апроксимації.

Для апроксимації функції на інтервалі щонайкраще підходить кубічний сплайн, заданий локально:

$$f(t) = f_i(t_{i+1}-t) [2(t-t_i) + T]/T + f_{i+1}(t-t_i) [2(t_{i+1}-t) + T]/T + \varphi_i(t_{i+1}-t) (t-t_i)/T + \varphi_{i+1}(t-t_i)(t-t_{i+1})/T, \tag{20}$$

де φ_i, φ_{i+1} – перші похідні $f(t)$ у відповідних точках.

Перша похідна φ може бути визначена за формулою чисельного диференціювання, при використанні параболічної апроксимації:

$$\varphi_i = (3f_i - 4f_{i-1} + f_{i-2})/2T. \tag{21}$$

Для визначення змінних стану вектора x спочатку необхідно знайти зображення за Лапласом–Карсоном старшої похідної x_{n+1} , яка апроксимована сплайн-функцією (19) з урахуванням того, що зображення визначається на інтервалі $0 \leq t \leq T$:

$$x_{n+1}(p) = x_{n+1}(0)[12p^{-3} - 6Tp^{-2} + T^3]/T^3 + x_{n+1}(p)[-12p^{-3} + 6Tp^{-2}]/T^3 + \varphi_{n+1}(0)[6p^{-3} - 4Tp^{-2} + T^2p^{-1}]/T^2 + \varphi_{n+1}(p)[6p^{-3} - 2Tp^{-2}]/T^2. \tag{22}$$

Після підстановки (21) в (10) і повернення до оригіналів змінні вектора x у загальному вигляді визначаються наступним виразом:

$$x_k(mT) = x_{n+1}[(m-1)T] \frac{(n+4-k)!}{(n+4-k)3^{(n+1-k)}} \frac{(n+3-k)!}{(n+3-k)3^{(n+4-k)}} + T T \frac{(n+3-k)!}{(n+1-k)3^{(n+3-k)}} / T + x_{n+1}(mT) \frac{(n+4-k)!}{(n+4-k)3^{(n+4-k)}} \frac{(n+3-k)!}{(n+4-k)3^{(n+3-k)}} - 6TT \frac{(n+3-k)!}{(n+3-k)3^{(n+3-k)}} / T + \varphi_{n+1}[(m-1)T] \frac{(n+4-k)!}{(n+4-k)3^{(n+4-k)}} \frac{(n+3-k)!}{(n+3-k)3^{(n+3-k)}} - 4TT \frac{(n+3-k)!}{(n+3-k)3^{(n+3-k)}} / T + T T \frac{(n+2-k)!}{(n+2-k)3^{(n+2-k)}} / T + \varphi_{n+1}(mT) \frac{(n+4-k)!}{(n+4-k)3^{(n+4-k)}} \frac{(n+3-k)!}{(n+3-k)3^{(n+3-k)}} / T + x_k[(m-1)T] + \sum_{r=1}^{n-k} x_k^{(r)} [(m-1)T]^r / r!. \tag{23}$$

Одним із важливих моментів моделювання є вибір кроку інтегрування T , оскільки від нього залежить похибка округлення і похибка апроксимації для обраного методу. Причиною виникнення похибки є амплітудні і фазові перекручування, що виникають при комп'ютерному моделюванні, у порівнянні з точним розв'язанням. Тому, за певних умов може виникнути нестійкість комп'ютерного розв'язання для аналітично стійкого процесу.

Вибір кроку інтегрування T може проводитися, виходячи із радіуса R кола, що охоплює усі власні числа λ_i ($i = 1, \dots, n$) матриці \mathbf{A} рівняння (3):

$$T = 1/R. \tag{24}$$

Величина T може змінюватися в широких межах, при цьому основною умовою є перебування спектра матриці \mathbf{A} усередині кола радіуса R , величина якого визначається співвідношенням:

$$R \geq c\|\mathbf{A}\|, \tag{25}$$

де $\|\mathbf{A}\| = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ – норма матриці; a_{ij} – елементи матриці; c – множник, що округляє значення

$\|\mathbf{A}\|$ до найближчого цілого кратного 10.

Для оцінки погрешностей моделювання можна скористатися способом, що враховує специфіку диференціальних рівнянь аналізованої системи (чи окремих елементів), а похибка досить просто обчислюється. Такий спосіб складається в порівнянні аналітичних рішень для вихідних змінних ланок, окремих частин, характерних основних елементів систем з результатами комп'ютерного моделювання. Згідно з (6) потрібно знайти комп'ютерний розв'язок диференціальних рівнянь виду:

$$p^k U_{k, \text{eux}}(p) = U_{\text{ex}}(p), k = 1, \dots, 8, \tag{26}$$

для $U_{\text{ex}}(t) = t$, при апроксимації $U_{\text{ex}}(t)$ для $t_{i-1} \leq t \leq t_i, \Delta t = T = t_i - t_{i-1}, i = 1, \dots, \infty$:

1. Східчастою функцією: $U_{\text{ex}}(t) = U_{\text{ex}}(t_i)$.
2. Лінійною функцією: $U_{\text{ex}}(t) = kt + U_{\text{ex}}(t_{i-1})$, де $k = [U_{\text{ex}}(t_i) - U_{\text{ex}}(t_{i-1})] / \Delta t$.
3. Параболічною функцією: $U_{\text{ex}}(t) = at^2 + bt + c$,

де $a = U_{\text{ex}}(t_{i-2}) / 2\Delta t^2 - U_{\text{ex}}(t_{i-1}) / \Delta t^2 + U_{\text{ex}}(t_i) / 2\Delta t^2$; $b = -U_{\text{ex}}(t_{i-2}) / 2\Delta t + 2U_{\text{ex}}(t_{i-1}) / \Delta t - 3U_{\text{ex}}(t_i) / 2\Delta t$; $c = U_{\text{ex}}(t_i)$.

4. Сплайн-функцією: $U_{\text{ex}}(t) = U_{\text{ex}}(t_{i-1})(t_{i+1} - t)^2 [2(t - t_i) + \Delta t] / \Delta t^3 + U_{\text{ex}}(t_i)(t - t_i)^2 [2(t_{i+1} - t) + \Delta t] / \Delta t^3 + \varphi_{i-1}(t_{i+1} - t)^2 (t - t_i) / \Delta t^2 + \varphi_i(t - t_i)^2 (t_{i+1} - t) / \Delta t^2$, де $\varphi_i = dU_{\text{ex}}(t_i) / dt_i, \varphi_{i-1} = dU_{\text{ex}}(t_{i-1}) / dt_{i-1}$ – перші похідні $U_{\text{ex}}(t)$ у відповідних точках.

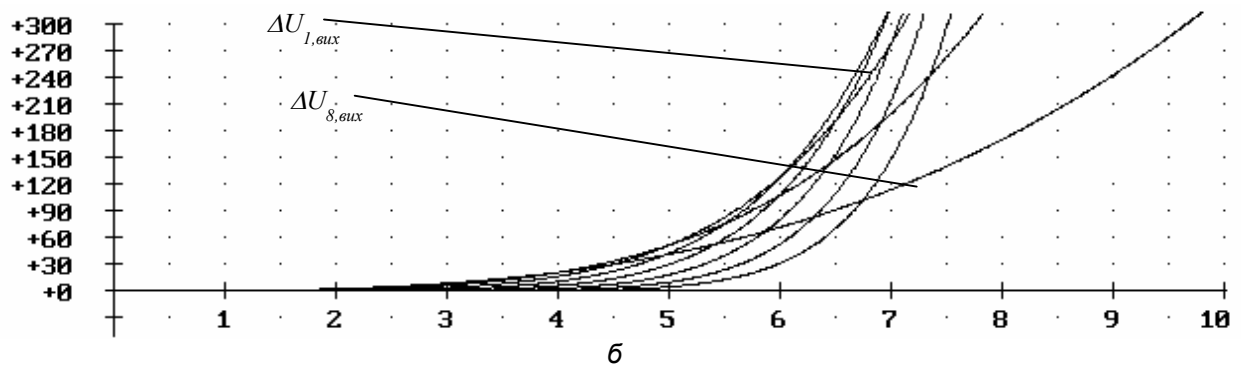
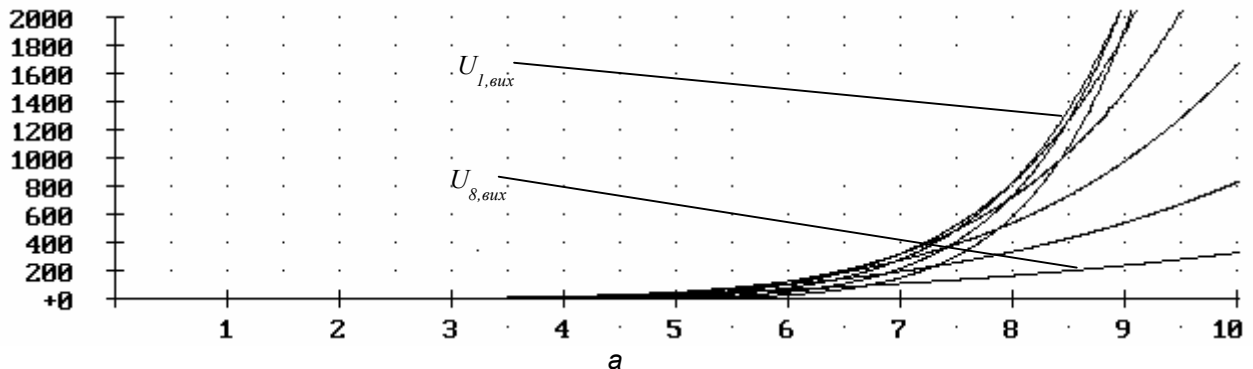
Для визначення локальної погрішності ΔU_k , що дорівнює:

$$\Delta U_k = U_{k, \text{eux}}(mT) - U_{k, \text{eux}}(t_m),$$

де $U_{k, \text{eux}}(t_m) = U_{k, \text{eux}}(t)|_{t=mT}$ – аналітичний розв'язок, визначений для m , необхідно знати аналітичний розв'язок (25) для усіх видів $U_{\text{ex}}(t)$. У загальному вигляді $U_{k, \text{eux}}(t)$ для $k = 1, \dots, 8$, визначається

виразом $U_{k, \text{eux}}(t) = t^k / k!$.

Графіки зміни, $U_{1, \text{eux}}(t), \dots, U_{8, \text{eux}}(t)$ для $k = 1, \dots, 8$, для вхідного сигналу $U_{\text{ex}}(t) = 1$ і східчастої апроксимації показаний на рис. 3, а. Графік зміни локальної похибки $\Delta U_k, k = 1, \dots, 8$, для східчастої апроксимації показаний на рис. 3, б, для лінійної, параболічної ($U_{\text{ex}}(t) = t$), сплайнової ($U_{\text{ex}}(t) = t^2$) графіки показані відповідно на рис. 3, в, г, д. Як видно із отриманих графіків, зменшення похибки $\Delta U_{k, \text{eux}}$ пропорційне підвищенню порядку апроксимуючої наближаючої функції і при збільшенні порядку інтегрування.



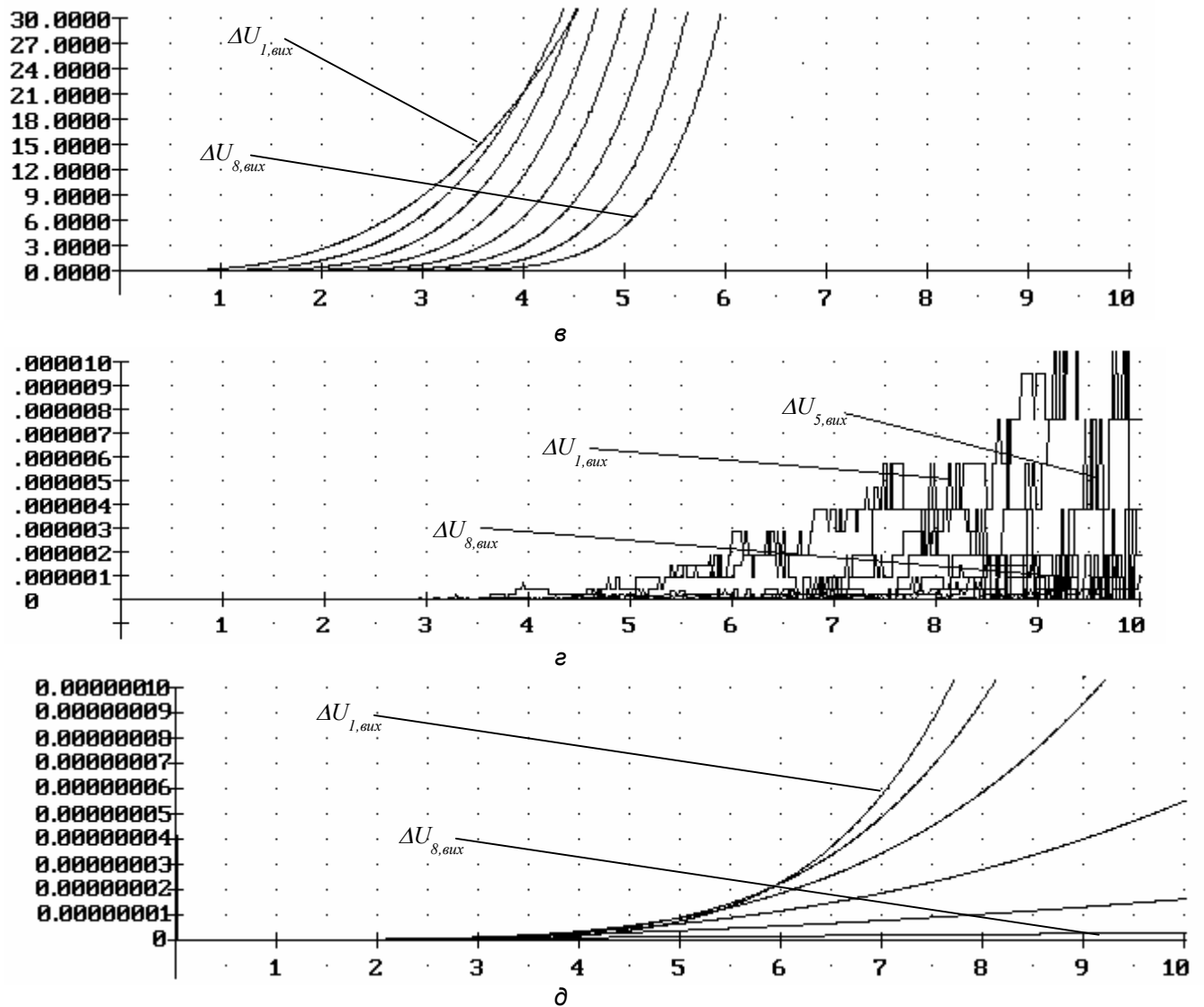


Рис. 3. Графіки зміни вихідних сигналів $U_{1\text{вих}}(t), \dots, U_{8\text{вих}}(t)$ (а), величини похибки $\Delta U_{1\text{вих}}(t), \dots, \Delta U_{8\text{вих}}(t)$ для східчастої (б), лінійної (в), параболічної (г), сплайнової (д) апроксимацій

Висновки. Пропонований метод моделювання складних систем у просторі станів може бути використано при дослідженні нелінійних і нестационарних систем у сучасних прикладних програмах (MATLAB, MATHCAD).

ЛІТЕРАТУРА:

1. Дидук Г.А. Машинные методы исследования автоматических систем. – Л., 1983.
2. Куо Б. Теория и проектирование цифровых систем управления. – М.: Машиностроение, 1986. – 448 с.
3. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А.А. Красовского. – М.: Наука, 1987. – 712 с.
4. Дьяконов В.П. Справочник по алгоритмам и программам на языке Бейсик для персональных ЭВМ: Справочник. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 240 с.

ТИШЕВИЧ Борис Леонардович – кандидат технічних наук, доцент кафедри автоматизації управління електротехнічними комплексами Національного технічного університету України „КПІ”.

Наукові інтереси:

– нейронні мережі, нечітка логіка, оптимальне управління.
Тел. раб.: (044) 241-76-25.
E-mail: zodiactg@gmail.com

ГОРОДЕЦЬКИЙ Віктор Георгійович – кандидат фізико-математичних наук, старший викладач кафедри електромеханічного обладнання енергоємних виробництв Національного технічного університету України „КПІ”.

Наукові інтереси:

– моделювання складних електромеханічних систем, системний аналіз, нейронні мережі.
Тел. раб.: (044) 241-76-27.
E-mail: vigc2000@mail.ru

Подано 10.10.2007