

УДК 539.374

Н.І. Вовкодав, к.ф.-м.н., доц.*Національний університет харчових технологій***І.Ф. Киричок, д.ф.-м.н., с.н.с.***Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України***В.В. Михайленко, д.ф.-м.н., проф.***Житомирський державний технологічний університет*

ДЕМПФІРУВАННЯ ЗГИННИХ КОЛИВАНЬ КРУГЛОЇ В'ЯЗКОПРУЖНОЇ ПЛАСТИНКИ П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНИМИ АКТУАТОРАМИ З ВРАХУВАННЯМ ДЕФОРМАЦІЇ ЗСУВУ

Досліджується вплив деформації зсуву на ефективність демпфірування вимушених коливань круглої в'язкопружної пластинки за допомогою п'єзокерамічних накладок-актуаторів, до яких підводиться різниця електричних потенціалів.

Вступ. В сучасній техніці для обмеження амплітуд вимушених коливань тонкостінних елементів конструкцій ефективно застосовуються активні способи, коли в структуру елемента вводяться п'єзоелектричні включення (актуатори), до яких з частотою механічного збудження підводиться різниця електричних потенціалів відповідної амплітуди і фази для демпфірування найбільш енергоємних мод коливань [1, 2, 3]. Ефективність демпфірування тонкостінних елементів залежить від умов механічного закріплення, форми і геометричних розмірів актуатора, властивостей пасивних і п'єзоелектричних матеріалів, їх температурної чутливості при вимушених коливальних процесах. Більшість робіт цього наукового напрямку виконано для тонкостінних елементів конструкцій в рамках стандартних гіпотез Кірхгофа–Лява, що узагальнюються на випадок електромеханіки та плоского напруженого стану. Ряд результатів досліджень з цієї проблематики одержано в [4, 5, 6] та ін.

Метою даної роботи є дослідження впливу деформації зсуву на ефективність демпфірування вимушених осесиметричних коливань круглої пластинки за допомогою п'єзоелектричних актуаторів.

Постановка задачі. Розглядається суцільна кругла пластинка товщиною h і радіусом R , яка віднесена до радіальної системи координат з початком $z = 0$, $r = 0$ в центрі серединної площини. Зовнішні площини $z = \pm h/2$ пластинки жорстко скріплені з п'єзокерамічними накладками-актуаторами однакової товщини δ та радіуса r_0 . Актуатори мають взаємно протилежний напрямок товщинної поляризації п'єзокераміки. Далі приймається, що поляризація в напрямку $z > 0$ характеризується п'єзомодулем d_{31} , а при $z < 0$ – $(-d_{31})$. На зовнішні площини актуаторів, а також між актуаторами і пасивним шаром нанесені нескінченно тонкі електроди. Пластинка навантажена рівномірно розподіленим поверхневим тиском, який змінюється в часі t за гармонічним законом $P = P_0 \cos \omega t$ з круговою частотою ω , близькою до резонансної. Крім того, до зовнішніх електродів актуаторів підводиться різниця електричних потенціалів $\psi(h/2 + \delta) - \psi(-h/2 - \delta) = Re(2V e^{i\omega t})$ з тією ж частотою, що і механічне навантаження. Внутрішні електроди підтримуються при нульовому потенціалі. В силу конструктивної симетрії пластинки, способу поляризації актуаторів та характеру навантаження в пластинці виникають чисто згинні осесиметричні коливання.

Моделювання електромеханічної поведінки такої пластинки ґрунтується на гіпотезі прямої лінії для механічних величин по всьому пакету шарів [7]. Відносно електричних змінних приймаємо, що складова вектора електричної індукції D_z в напрямку поляризації п'єзоактуатора не залежить від товщинної координати, а складовими D_r , D_θ , перпендикулярними до напрямку поляризації, можна знехтувати [8, 9]. При цьому рівняння електростатики [9] задовольняються тотожно, а складові вектора електричної напруженості E_r , E_θ знаходяться з визначальних рівнянь.

В результаті застосування цих припущень до тривимірних визначальних рівнянь електров'язкопружності [10] та переходу від напружень до статично еквівалентних їм за товщиною пакета зусиль і моментів електромеханічна поведінка пластинки описується системою диференціальних рівнянь вимушених гармонічних коливань згину (множник $e^{i\omega t}$ опускається):

$$\begin{aligned} \frac{dQ_r}{dr} + \frac{1}{r} Q_r + \rho h \omega^2 w + P_0 &= 0, \\ \frac{dM_r}{dr} + \frac{1}{r} (M_r - M_\theta) - Q_r + \frac{\rho h}{12} \omega^2 \psi_r &= 0; \end{aligned} \quad (1)$$

співвідношеннями електров'язкопружності:

$$M_r = D_{11}\chi_r + D_{12}\chi_\theta + M_E ; M_\theta = D_{12}\chi_r + D_{12}\chi_\theta + M_E , \quad (2)$$

$$Q_r = k_s c_{55} \varepsilon_{rz} = k_s c_{55} (\Psi_r - \vartheta) ;$$

залежностями між деформаціями та переміщеннями:

$$\chi_r = \frac{d\Psi_r}{dr} , \chi_\theta = \frac{\Psi_r}{r} , \vartheta = -\frac{dw}{dr} \quad (3)$$

і електростатичними виразами:

$$E_z = -\frac{V}{\delta} + \frac{b_{31}}{b_{33}} \left(\frac{h+\delta}{2} \pm z \right) \chi \left(-\frac{h}{2} - \delta \leq z \leq -\frac{h}{2} ; \frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} + \delta \right) ;$$

$$D_z = -b_{33} \frac{V}{\delta} + b_{31} \frac{h+\delta}{2} \chi ; \chi = \chi_r + \chi_\theta ,$$

Механічні граничні умови приймаються такими:

$$w = 0 , \vartheta = 0 \quad (r = R) . \quad (5)$$

В рівняннях (1)–(5) прийнято такі позначення:

$$D_{11} = \frac{1}{12} (c_{11} h^3 + 2c_{11}^E \delta_*^3 + 2\gamma_{31} \delta^3) ; D_{12} = \frac{1}{2} (c_{12} h^3 + 2c_{12}^E \delta_*^3 + 2\gamma_{31} \delta^3) ;$$

$$c_{55} = 2c_{55}^E \delta + Gh ; \delta_*^3 = 4\delta^3 + 6\delta^2 h + 3\delta h^2 ; \overline{\rho h} = \rho h + 2\rho_* \delta ;$$

$$c_{11} = \frac{E}{1-\nu^2} ; c_{11}^E = \frac{1}{S_{11}^E (1-\nu_E^2)} ; \nu_E = -\frac{S_{12}^E}{S_{11}^E} ; c_{12} = \nu c_{11} ; c_{12}^E = \nu_E c_{11}^E ;$$

$$\gamma_{31} = \frac{b_{31}^2}{b_{33}} ; b_{31} = \frac{d_{31}}{S_{11}^E (1-\nu_E)} ; b_{33} = \varepsilon_{33}^T (1-K_p^2) ; c_{55}^E = \frac{1}{S_{55}^E (1-K_{15}^2)} ;$$

$$K_p^2 = \frac{2d_{31}^2}{S_{11}^E \varepsilon_{33}^T (1-\nu_E)} ; K_{15}^2 = \frac{d_{15}^2}{S_{55}^E \varepsilon_{11}^T} ; M_E = b_{31} (h+\delta) V ; G = \frac{E}{2(1+\nu)} ;$$

$$\overline{\rho h}^3 = \rho h^3 + 2\rho_* \delta_*^3 ; E = E' + iE'' ; S_{jk}^E = S_{jk}^S (1-i\delta_{jk}^S) ;$$

$$d_{jk} = d_{jk}' (1-i\delta_{jk}^d) ; \varepsilon_{kk}^T = \varepsilon_{kk}' (1-i\delta_{kk}^e) ;$$

$w = w' + iw''$ і $\Psi_r = \Psi_r' + i\Psi_r''$ – комплексні амплітуди переміщення згину і кута повороту в площині rz ; Q_r, M_r, M_θ – аналогічні величини перерізуючої сили, радіального і кутового моментів; E, ν – модулі Юнга і коефіцієнт Пуассона пасивного матеріалу; $S_{jk}^E, d_{jk}, \varepsilon_{kk}^T$ – відповідно податливості, п'єзомодулі і діелектричні проникливості п'єзокераміки; ρ, ρ_* – відповідно густина пасивного і п'єзоактивного матеріалів; k_s – коефіцієнт зсуву, визначення якого можна провести на основі уточнених теорій шаруватих пружних пластинок і оболонок [7]. Тут і далі приймаються стандартні позначення комплексних електромеханічних величин і параметрів: $a = a' + ia''$; $|a| = (a'^2 + a''^2)^{1/2}$.

Метод розв'язування задачі. Для розв'язання поставленої задачі співвідношення електромеханіки (1)–(3) записуються у формі звичайних диференціальних рівнянь нормального вигляду:

$$\frac{d\vec{Y}}{dr} = [\vec{A}] \vec{Y} + \vec{B} \quad (7)$$

з граничними умовами

$$B_1 \vec{Y} = 0 \quad (r = 0) ; B_2 \vec{Y} = 0 \quad (r = R) , \quad (8)$$

де $\vec{Y}^T = \{y_1, y_2, y_3, y_4\} = \{Q_r, \Psi_r, w, M_r\}$ – шукана комплекснозначна вектор-функція; $[\vec{A}]$ – комплекснозначна квадратна матриця, відмінними від нуля елементами якої є:

$$a_{11} = -\frac{1}{r} ; a_{13} = -\overline{\rho h} \omega^2 ; a_{22} = \frac{1}{r} \nu_{12}^* ; a_{24} = \frac{1}{D_{11}} ; a_{32} = -1 ; \nu_{12}^* = -\frac{D_{12}}{D_{11}} ;$$

$$a_{31} = \frac{1}{k_s c_{55}} ; a_{41} = 1 ; a_{42} = \frac{1}{r^2} D_{11} (1-\nu_{12}^*) - \frac{\overline{\rho h}^3}{12} \omega^2 ; a_{44} = -\frac{1+\nu_{12}^*}{r} ;$$

$\vec{B}^T = \left\{ -P_0 ; -\frac{M_E}{D_{11}} ; 0 ; \frac{1}{r} (1+\nu_{12}^*) M_E \right\}$ – комплекснозначний вектор-стовпчик; B_1, B_2 –

комплекснозначні прямокутні матриці, ненульові елементи яких визначаються граничними умовами (5).

Крайова задача (7), (8) розв'язується методом дискретної ортогоналізації [11] з використанням безрозмірної просторової координати $x = r/R$. При цьому в процесі чисельного розв'язання задачі використовується підхід [11], згідно з яким в особливій точці $x = 0$ виконуються умови регулярності $Q_r = 0, \vartheta = 0$ та розв'язується спрощена система рівнянь (7).

Залежність оптимального значення електричного потенціалу V_A від поверхневого механічного тиску P_0 приймається у вигляді:

$$V_A = -k_A P_0, \tag{9}$$

де k_A – комплексний коефіцієнт керування.

Коефіцієнт k_A на основі підходу [5] обчислюється за формулою:

$$k_A = + \frac{R}{b_{31}(h + \delta)} \int_0^1 w x dx \bigg/ \int_0^{x_0} (\chi_r + \chi_\theta) x dx \left(x_0 = \frac{r_0}{R} \right), \tag{10}$$

і справедливий на резонансних частотах вимушених коливань пластинки. Знаком «мінус» у (9) враховується протифазне підведення електричного потенціалу V_A для компенсації впливу механічного гармонічного навантаження.

Результати розрахунків. Розрахунки проводились для пластинки з радіусом $R = 0,2$ м, виготовленої із полімеру [12] з механічними в'язкопружними характеристиками $G' = 794,2$ [МПа], $G'' = 73,1$ [МПа], $\nu = \nu' = 0,3636$ ($\nu'' = 0$), $\rho = 929$ кг/м³. Актуатори виготовлено з п'єзокераміки ЦТС_ТБС-2 [13] з такими значеннями параметрів для комплексних модулів (6):

$$\begin{aligned} S'_{11} &= 12,5 \cdot 10^{-12} \text{ мФ}^2; S'_{55} = 39,7 \cdot 10^{-12} \text{ мФ}^2; d'_{31} = -1,6 \cdot 10^{-10} \text{ Кл/м}; d'_{15} = 4,5 \cdot 10^{-10} \text{ Кл/м}; \\ \varepsilon'_{33} &= 21 \cdot 10^{-2} \varepsilon_0; \varepsilon'_{11} = 18,5 \cdot 10^{-2} \varepsilon_0; \varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}; \delta^s_{11} = 0,16 \cdot 10^{-2}; \delta^s_{55} = 0,14 \cdot 10^{-2}; \\ \delta^d_{31} &= 0,4 \cdot 10^{-2}; \delta^d_{15} = 0,35 \cdot 10^{-2}; \delta^e_{33} = 0,35 \cdot 10^{-2}; \delta^e_{11} = 0,5 \cdot 10^{-2}; \nu_E = \nu'_E = 0,37 \text{ } (\nu''_E = 0); \\ \rho_* &= 7520 \text{ кг/м}^3. \end{aligned}$$

При врахуванні деформації зсуву приймається, що $k_S = 5/6$ [7].

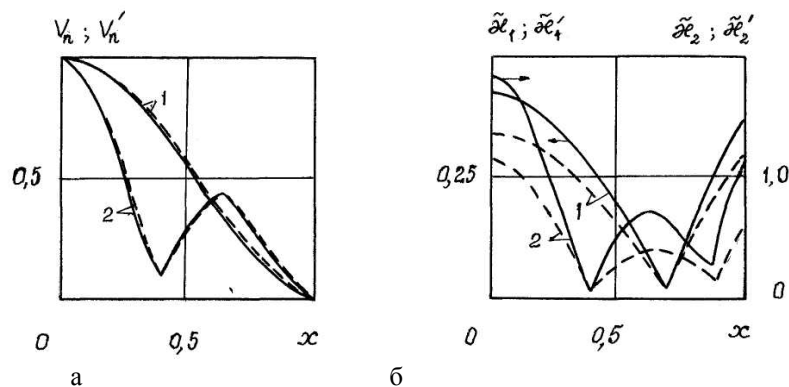


Рис. 1

На рис. 1, а і 1, б для пластинки товщиною $h = 0,04$ м з актуаторами товщиною $\delta = 0,1 \cdot 10^{-3}$ м та радіусом $x_0 = 0,8$ м, яка навантажена гармонічним тиском інтенсивності $P_0 = 1$ Па, показано відповідно радіальний розподіл нормованих модулів амплітуди прогинів $(V_n; V'_n) = |W| \cdot 10^{-2} / (A_n; A'_n)$ і сумарних кривизн $(\tilde{\chi}_n; \tilde{\chi}'_n) = |\chi| \cdot 10^{-2} / (A_n; A'_n)$, $n = 1, 2$. Розрахунки проводилися на резонансних частотах ω_p згідно з теорією Кірхгофа–Лява (суцільні лінії) та з врахуванням деформації зсуву (штрихові лінії). При цьому криві 1 ($n = 1$) відповідають першій моді коливань та значенням $\omega_p = 0,532 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}$, $A_1 = 0,2045 \cdot 10^{-7}$ м (суцільні лінії) і $\omega'_p = 0,473 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}$, $A'_1 = 0,2501 \cdot 10^{-7}$ м (штрихові лінії), а криві 2 ($n = 2$) – другій моді коливань при $\omega_p = 0,219 \cdot 10^5 \text{ с}^{-1}$, $A_2 = 0,1016 \cdot 10^{-8}$ м (суцільні лінії) і $\omega'_p = 0,156 \cdot 10^5 \text{ с}^{-1}$, $A'_2 = 0,1749 \cdot 10^{-8}$ м (штрихові лінії).

З наведених результатів випливає, що деформація зсуву (штрихові лінії) призводить до зміщення резонансних частот вліво ($\omega'_p < \omega_p$), збільшення параметра максимального прогину ($A'_{1,2} > A_{1,2}$) і практично не змінює форму коливань (рис. 1, а). В більшій мірі деформація зсуву проявляється в перерозподілі вздовж радіуса пластинки нормованої сумарної кривизни (рис. 1, б) як першої, так і,

особливо, другої моди коливань. Цей фактор, зокрема, є визначальним при обчисленні коефіцієнта керування k_A за формулою (10).

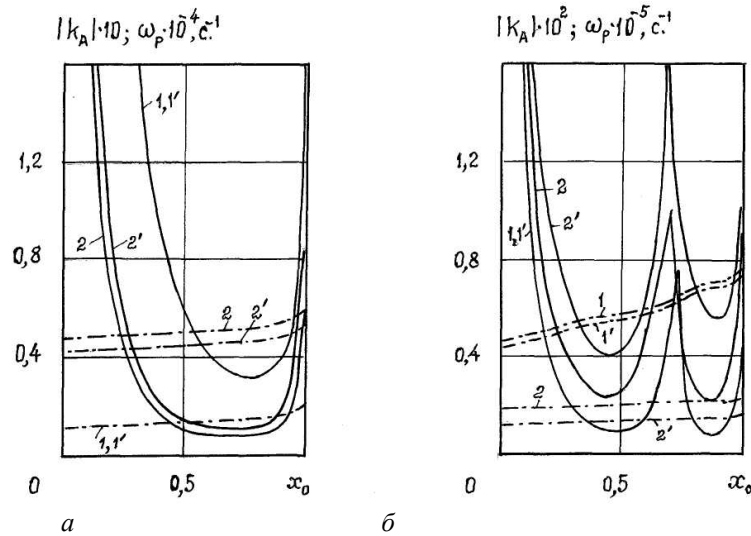


Рис. 2

Відмітимо, що проведені чисельні розрахунки для тонких пластинок ($h/R \leq 1/20$) показали, що деформація зсуву не вносить помітного вкладу в характеристики коливань першої моди і проявляється при коливаннях пластинки на більш високих резонансних частотах, починаючи з другої.

На рис. 2, а, б в залежності від безрозмірного радіуса актуатора $x_0 = r_0/R$ ($\delta = 0,1 \cdot 10^{-3}$ м) наведено криві розподілу резонансних частот ω_p (штрих-пунктирні лінії) і модуля коефіцієнта керування $|k_A|$ (суцільні лінії) для демпфірування першої (рис. 2, а) та другої (рис. 2, б) мод вимушених згинних коливань, розрахованих на основі гіпотез Кірхгофа–Лява (криві 1, 2) і з врахуванням деформації зсуву (криві 1', 2'). При цьому криві 1, 1' отримані для пластинки товщиною $h = 0,01$ м, а криві 2, 2' – для $h = 0,04$ м.

Аналіз кривих на рис. 2 показує, що деформація зсуву не впливає на коефіцієнт керування актуатора для тонких пластинок (криві 1, 1'). Для порівняно товстих пластинок (криві 2, 2') вона призводить до збільшення коефіцієнта $|k_A|$ як в області частот першого, так і, особливо, другого резонансів. В той же час деформація зсуву не впливає на оптимальний (мінімальний) розмір x_0 кругів актуатора.

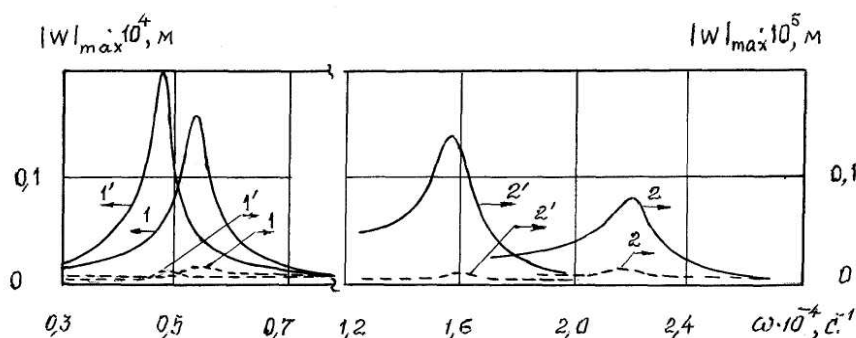


Рис. 3

На рис. 3 показано амплітудно-частотні характеристики (АЧХ) коливань пластинки товщиною $h = 0,04$ м з актуатором, що має радіус $x_0 = 0,8$ і товщину $\delta = 0,1 \cdot 10^{-3}$ м, при гармонічному збудженні в діапазоні частот першого (криві 1, 1') та другого (криві 2, 2') резонансів. Криві 1, 2 розраховані на основі гіпотез Кірхгофа–Лява, а 1', 2' – з врахуванням деформації зсуву. Суцільні лінії відповідають випадку збудження коливань поверхневим тиском $P_0 = 0,8 \cdot 10^3$ Па. АЧХ при спільній дії механічного навантаження і протифазно підведеного до актуатора електричного потенціалу V_A характеризуються

штриховими лініями. Останні розраховані для наступних значень активної V'_A і реактивної V''_A складових амплітуд потенціалу: $V'_A = -6,932$ В, $V''_A = -0,2856 \cdot 10^{-1}$ В (криві 1); $V'_A = -8,848$ В, $V''_A = -0,5365 \cdot 10^{-1}$ В (криві 1'); $V'_A = -1,99$ В, $V''_A = -0,3166$ В (криві 2); $V'_A = -5,541$ В, $V''_A = -0,3418$ В (криві 2'). Тут знак «мінус» вказує на протилежність фаз механічного та електричного навантажень.

Порівняння кривих рис. 3 (суцільні і штрихові лінії) дозволяє зробити висновок про можливість гасіння механічно збуджених коливань пластинки шляхом вибору відповідної амплітуди електричного потенціалу, що протифазно з частотою механічного навантаження підводиться до актуаторів.

Висновок. На основі проведених числових експериментів виявлено, що вплив деформації зсуву на коливальні параметри, особливо нетонких пластинок, з'являється у зміщенні резонансних частот вліво та збільшенні амплітуд прогинів при вимушених коливаннях на цих частотах. Ця обставина супроводжується ростом значень електричного потенціалу V_A для компенсації механічного навантаження. Показано, що за допомогою актуатора одного і того ж розміру можна гасити вимушені згинні коливання пластинки на першій і другій модах. Проте, в силу великої енергоємності першої моди, для її гасіння необхідно підводити електричний потенціал більшої амплітуди, ніж при гасінні другої моди.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Карнаухов В.Г., Михайленко В.В. Нелинейные одночастотные колебания и диссипативный разогрев неупругих пьезоэлектрических тел // Прикл. механика. – 2002. – 38. – № 3. – С. 13–45.
2. Trou H.S., Bergman L.A. Dynamics and Control of Distributed Systems. – Cambridge: Cambridge University Press. – 1998. – 400 p.
3. Trou H.S. Piezoelectric shells (Distributed Sensing and Control of Continua). – Kluwer Academic Pub.: Dordrecht/Boston/London. – 1993. – 400 p.
4. Карнаухов В.Г., Козлов В.І., П'ятецька О.В. Активне демпфірування осесиметричних резонансних коливань круглої пластини за допомогою п'єзоелектричних включень // Вісник Київського університету. Сер.: Фізико-математичні науки. – 2003. – № 2. – С. 81–85.
5. Карнаухов В.Г., Карнаухова Т.В., П'ятецька О.В. Вплив температури дисипативного розігріву на активне демпфірування вимушених осесиметричних коливань круглої пластини за допомогою п'єзоелектричного актуатора // Вісник Київського університету. Сер.: Фізико-математичні науки. – 2004. – № 3. – С. 107–114.
6. Киричок І.Ф., П'ятецька О.В., Карнаухов М.В. Згинні коливання та дисипативний розігрів кільцевої в'язкопружної пластинки з п'єзоелектричними актуаторами при електромеханічному моногармонічному навантаженні // Вісник Київського університету. Сер.: Фізико-математичні науки. – 2006. – № 2. – С. 184–192.
7. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Теория оболочек переменной толщины. – К.: Наук. думка, 1981. – 516 с.
8. Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф., Козлов В.И. Электромеханические колебания и диссипативный разогрев вязкоупругих тонкостенных элементов с пьезоэффектом // Прикл. механика. – 2001. – 37. – № 2. – С. 45–76.
9. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Электроупругость. – К.: Наук. думка, 1989. – 290 с. – (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5-ти т.; Т. 5).
10. Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф. Связанные задачи теории вязкоупругих пластин и оболочек. – К.: Наук. думка, 1986. – 222 с.
11. Григоренко Я.М., Мукоїд А.П. Розв'язування лінійних і нелінійних задач теорії оболонок на ЕОМ. – К.: Либідь, 1992. – 148 с.
12. Несторенко Н.П., Червинко О.П., Сенченков И.К. Моделирование ультразвукового разогрева структурных элементов полимерных волокнистых композитов при нормальном нагружении // Вестник Национального технического университета Украины «КПИ». – 2002. – № 9. – С. 3–8.
13. Болкисев А.М., Карлаш В.Л., Шульга Н.А. О зависимости свойств пьезокерамических материалов от температуры // Прикл. механика. – 1984. – 20. – № 7. – С. 70–74.

ВОВКОДАВ Наталія Іванівна – кандидат фізико-математичних наук, доцент Національного університету харчових технологій.

Наукові інтереси:

– зв'язані задачі термоелектромеханіки пластин та оболонок із в'язкопружних п'єзоактивних матеріалів при гармонічному навантаженні.

Т. 287-96-16.

КИРИЧОК Іван Федорович – доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник, провідний науковий співробітник Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України.

Наукові інтереси:

– розробка теорії і методів розв'язування зв'язаних задач термомеханіки і електромеханіки пластин та оболонок із в'язкопружних пасивних і п'єзоактивних матеріалів.

Т. 454-77-63.

МИХАЙЛЕНКО Василь Васильович – доктор фізико-математичних наук, професор кафедри вищої математики Житомирського державного технологічного університету.

Наукові інтереси:

– термомеханіка непружних п'єзоелектричних тіл.

Подано 07.06.2007