ІНФОРМАТИКА, ОБЧИСЛЮВАЛЬНА ТЕХНІКА ТА АВТОМАТИЗАЦІЯ

УДК 519. 161

І.В. Гаращенко, аспір.
А.В. Морозов, магістрант
А.В. Панішев, д.т.н., проф.
Житомирський державний технологічний університет

НАБЛИЖЕНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ТИПУ КОМІВОЯЖЕРА, ЩО ЗАДАНІ МАТРИЦЕЮ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ

Розглядається один з варіантів підвищення точності наближених розв'язків для класу задач типу комівояжера.

Постановка проблеми у загальному вигляді. Задача комівояжера (ЗК) та її різновиди й узагальнення знаходять широке використання при дослідженні чисельних моделей циклічних процесів. Для таких моделей необхідно впорядкувати періодично повторювані послідовності операцій відповідно до обґрунтовано обраного показника ефективності.

Більшість прикладних задач типу комівояжера є NP-трудними. Статус задачі, яка важко розв'язується, означає, що для знаходження її точного розв'язання можна застосовувати тільки переборні методи, що вимагають на практиці значних обчислювальних ресурсів. Вони не гарантують знаходження оптимуму у встановленому часовому проміжку і тому часто є непридатними в системах реального часу. Альтернативою точним переборним методам є ефективні наближені методи, що будують допустимий розв'язок з прийнятною точністю [1, 3].

Аналіз досліджень і публікацій. Пошук оптимальних розв'язків в задачах типу комівояжера призвів до появи як точних, так і наближених алгоритмів, до яких відносяться «1-дерево» (1-Tree), «i*-дерево» (i*-Tree), «найближчого сусіда» (NN), «найближчого міста» (NT), «найдешевшого включення» (MC), «кістяка мінімальної ваги» (MST) [2, 4]. Неперевершено за точністю алгоритм Крістофідеса [2].

Мета статті. Розробити наближений метод розв'язання задач типу комівояжера з матрицею спеціального вигляду. Вона містить деяку кількість однакових значень. На таких матрицях точні переборні методи працюють неприйнятно довго. Наприклад, чим більший відсоток однакових елементів матриці, тим більш розгалужене дерево буде будувати метод гілок та границь, а це призводить до тривалої роботи цього алгоритму.

Викладення основного матеріалу. Кожну задачу типу комівояжера можна представити як комбінаторну оптимізаційну задачу про перестановки, що визначається трійкою (P, X, f), елементами якої є такі об'єкти [4]:

1. P – простір розв'язків: множина всіх циклічних перестановок (обходів) $\tau = (\tau[1], \tau[2] \ldots, \tau[n])$ множини $\{1, 2\ldots, n\}$. Обходу τ відповідає маршрут комівояжера у вигляді послідовності $(\tau[1], \tau[2] \ldots, \tau[n], \tau[1])$ різних номерів $\tau[1], \tau[2] \ldots, \tau[n]$ елементів 1, 2…, n.

2. X – простір параметрів, кожен елемент якого x є квадратною матрицею вартостей $\left[d_{ij}\right]_n$ порядку n, $d_{ij} \in R_0^+$, $i \neq j$, $d_{ii} = \infty$, $i, j = \overline{1, n}$, R_0^+ – множина невід'ємних дійсних чисел.

3. f – функціонал вартості ($f\ P \times X \to R_0^+$), де $f(\tau, x)$ – вартість розв'язку τ при значенні параметра x.

Оптимальним розв'язком для значення параметра x є розв'язок $\tau^* \in P$, такий, що для всіх $\tau \in P$ $f(\tau^*, x) \le f(\tau, x)$ у випадку мінімізації функціонала f та $f(\tau^*, x) \ge f(\tau, x)$ у випадку його максимізації.

Наявність додаткових обмежень в умовах задачі звужує простір розв'язків P, а показник ефективності f та значення параметра x визначають їх властивості.

Симетричною задачею класу комівояжера (СЗКК) будемо називати задачу (P, X, f) з матрицею вартостей $\left[d_{ij}\right]_n$, в якій $d_{ij} = d_{ji} \neq \infty$, $i \neq j$, $d_{ii} = \infty$, $i, j = \overline{1, n}$. Їй відповідає повний зважений граф $G = (V, E)$ з множиною вершин V, $|V| = n$, та множиною ребер E, $|E| = = (1/2)n(n-1)$, де ребру $\{i, j\}$ приписана вага $d_{ij} = d_{ji}$. Допустимим рішенням СЗКК є обхід, вартість якого визначається з матриці $\left[d_{ij}\right]_n$ і виразу для функціонала вартості f. В СЗКК з матрицею вартостей порядку n $|P| = (n-1)!$.

Основний результат в даній роботі отриманий для симетричної задачі комівояжера (СЗК), в якій, як відомо, мінімізується функціонал

$$D(\tau) = \sum_{i=1}^{n} d_{i\tau[i]}$$

Будемо будувати наближені СЗК з матрицею вартостей $\left[d_{ij}\right]_n$, що містить велику кількість рівних або наближених одне до одного значень d_{ij}. Такий розв'язок знаходиться при використанні визначення *i*-дерева, узагальнюючого відоме визначення 1-дерева.

Під *i*-деревом $T = (V,\ E_i)$ будемо розуміти підграф повного графа $G_n = (V,\ E)$, що містить дерево, яке охоплює множину вершин $V \setminus \{i\}$, і два ребра, що інцидентні вершині *i*, $i \in \{1, 2\ldots, n\}$, $|V| = n$. Розглянемо особливості *i*-дерева *T*, які відкривають можливість зменшення похибки наближених алгоритмів СЗКК.

В *i*-дереві *T* позначимо δ_k, $k = \overline{1,\ n}$, ступінь вершини *k*. Множину його вершин *V* представимо розбиттям на три підмножини $V_1,\ V_2,\ V_3$, де V_1 – множина вершин зі ступенем 1 (висячих вершин), V_2 – множина вершин зі ступенем 2, а $V_3 = V \setminus (V_1 \cup V_2)$.

Лемма. Для будь-якого *i*-дерева графа $G_n = (V,\ E)$, $|V| = n$, $i \in \{1,\ 2,\ldots,\ n\}$, $n \geq 3$, справедлива рівність

$$|V_1| = \sum_{k=1}^{n} \max\{\delta_k - 2,\ 0\}. \tag{1}$$

Доведення. В *i*-дереві графа G_n число ребер рівне $|V|$. В будь-якому графі сума ступенів вершин рівна подвоєному числу ребер. Тому для *i*-дерева

$$2\,|V| = 2(|V_1| + |V_2| + |V_3|) = \sum_{k=1}^{n} \delta_k$$

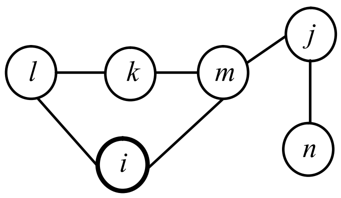
Тоді

$$|V_1| = \left(\sum_{i \in V_1} \delta_i - |V_1|\right) + \left(\sum_{i \in V_2} \delta_i - |V_2|\right) + \left(\sum_{i \in V_3} \delta_i - |V_3|\right) = \sum_{i \in V_3} (\delta_i - 2) = = \sum_{k=1}^{n} \max\{\delta_k - 2, 0\}.$$

В *i*-дереві графа $G_n = (V,\ E)$, що представлений гамільтоновим циклом, $V_2 = V$. Будь-яке *i*-дерево, за визначенням, містить єдиний цикл. Звідси випливає, що в *i*-дереві $V_2 \neq \varnothing$. Обернено, зв'язний граф $T = (V,\ E_i)$, $|V| = |E_i| = n$, в якому кількість вершин ступеня 2 менша *n*, не є гамільтоновим. Крім того, з (1) випливає, що якщо в *i*-дереві *T* $V_3 \neq \varnothing$, то і $V_1 \neq \varnothing$. Відмітимо, що для будь-якого *i*-дерева графа $G_n = (V,\ E)$

$$1 \leq |V_1| \leq |V| - 3.$$

На рис. 1, *а* представлено *i*-дерево з єдиною висячою вершиною, а на рис. 1, *б* – *i*-дерево, що містить $|V|$-3 висячих вершин.



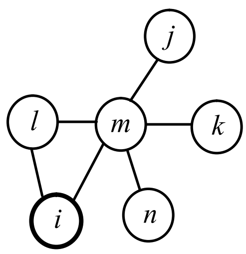


Рис. 1

Нехай $T = (V,\ E_i)$ – зв'язний підграф повного графа $G_n = (V,\ E)$, $|V| = |E_i| = n$. Назвемо операцією 1-заміни в *T* заміну ребра з E_i на ребро з E–E_i, яка перетворює *T* в зв'язний граф з єдиним циклом та з кількістю висячих вершин на одиницю меншою, ніж в *T*.

Покажемо, що перетворення *i*-дерева $T = (V,\ E_i)$ в гамільтонів цикл повного графа G_n можна виконати операціями 1-заміни за поліноміальний час.

Кожне ребро $(k,\ l)$ i-дерева відобразимо впорядкованою парою $(\delta_k,\ \delta_l)$, де δ_k, δ_l – ступені вершин k, l в T, $\delta_k \le \delta_l$, $k,\ l \in \{1, 2\ldots, n\}$. В T виділимо лівий та правий ланцюги, що починаються в вершині i. Кожен ланцюг закінчується першою вершиною, ступінь якої більший 2. Позначимо останнє ребро лівого ланцюга – $(\delta_k,\ \delta_l)$, $\delta_k = 2$, $\delta_l > 2$, а останнє ребро правого ланцюга $(\delta_j,\ \delta_m)$, $\delta_j = 2$, $\delta_m > 2$ (рис. 2).

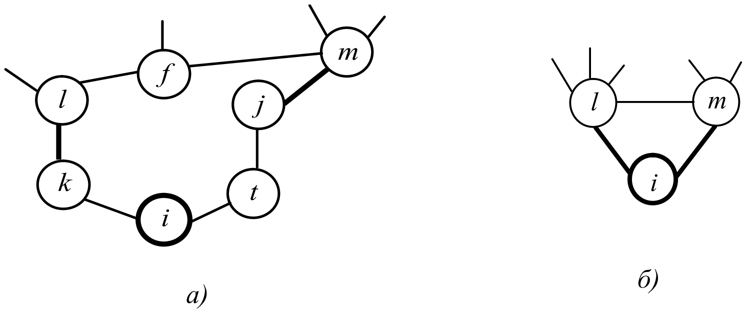


Рис. 2

i-дерево T перетворюється в гамільтонів цикл повного графа $G_n = (V,\ E)$ в результаті виконання такої процедури.

S0. В i-дереві $T = (V,\ E_i)$, $|E_i| = n$, знайти останнє ребро $(\delta_k,\ \delta_l)$ або останнє ребро $(\delta_j,\ \delta_m)$ правого ланцюга. Побудувати послідовність E' зі всіх ребер $(\delta_r,\ \delta_s)$, в яких $\delta_r \ge 2$, $\delta_s \ge 2$, таким чином: в E' першим розташовується ребро $(\delta_k,\ \delta_l)$ або $(\delta_j,\ \delta_m)$, а компоненти послідовності E', що залишилися, розташовуються в довільному порядку. E_i – список з n ребер i-дерева T, $E' \subset E_i$.

S1. Поки $|E'| \le |E_i| - 1$ виконувати таке:

видалити з E' компоненту $(\delta_r,\ \delta_s)$;

встановити $\delta_s = \delta_s - 1$ в кожній компоненті множини $E_i \setminus (\delta_r,\ \delta_s)$, що містить δ_s;

знайти ребро $(\delta_p,\ \delta_q)$, для котрого $\delta_p = 1$;

встановити $\delta_p = \delta_r = 2$, $E' = E' \cup (\delta_r,\ \delta_p)$, $|E'| = |E'| + 1$;

розташувати компоненту $(\delta_r,\ \delta_p)$ на місце видаленої пари $(\delta_r,\ \delta_s)$;

визначити ланцюг $(p,\ q, \ldots,\ t,\ w)$, в якому $\delta_p = \delta_q = \ldots = \delta_t = 2$, $\delta_w > 2$;

встановити $r = t$, $s = w$.

S2. За побудованою множиною E' визначити гамільтонів цикл.

На кроці S0 формується послідовність E' ребер $(\delta_r,\ \delta_s)$, $\delta_r \ge 2$, $\delta_s \ge 2$, яка починається або з останнього ребра $(\delta_k,\ \delta_l)$ лівого ланцюга, або з останнього ребра $(\delta_j,\ \delta_m)$ правого ланцюга, $\delta_k = \delta_j = 2$, $\delta_l,\ \delta_m > 2$. Першим ребром, що видаляється в циклі S1, є одне з них. Компоненті, що видаляється $(\delta_r,\ \delta_s)$, $\delta_r = 2$, $\delta_s > 2$, зіставляється висяча вершина p ребра $(\delta_p,\ \delta_q) \subset\ \subset E_i \setminus E'$. Вершини r и p визначають ребро $(\delta_r,\ \delta_p)$, $\delta_r = \delta_p = 2$, яке додається в E' з $E - E_i$. Чергова компонента, яка вилучається з отриманої послідовності E', знаходиться проходженням по ланцюгу $(p,\ q\ldots,\ t,\ w)$ ребер, в яких $\delta_p = \delta_q = \ldots = \delta_t = 2$, $\delta_w > 2$. Видаленню підлягає ребро $(\delta_t,\ \delta_w)$. Якщо $\delta_q > 2$, то ланцюг є парою $(p,\ q)$. Крок S1 закінчується при досягненні рівності $|E'| = |E_i|$ побудовою множини E' ребер, що утворюють гамільтонів цикл.

Теорема. Підграф повного графа $G_n = (V,\ E)$, представлений i-деревом $T = (V,\ E_i)$, $|V| = |E_i = n|$, $i \in \{1,\ 2\ldots,\ n\}$, коректно перетворюється в гамільтонів цикл за час $O(n|V_1|)$, де $|V_1|$ – кількість висячих вершин в T.

Доведення. Покажемо, що гамільтонів цикл будується в результаті виконання на кроці S1 $|V_1|$ операцій 1-заміни з трудомісткістю кожної $O(n)$.

При видаленні останнього ребра $(\delta_r,\ \delta_s)$, $\delta_r = 2,\ \delta_s > 2$ лівого або правого ланцюга розривається єдиний цикл *i*-дерева *T*. Отриманий в результаті граф виявляється деревом з кількістю висячих вершин $|V_1|+1$. Зв'язавши ребром висячі вершини *p* и *r*, отримаємо компоненту $(\delta_r,\ \delta_p)$, $\delta_r = \delta_p = 2$, що збільшує на одиницю потужність множини E', та граф, що містить єдиний цикл і $|V_1|-1$ висячих вершин.

Побудований граф містить дерево, яке охоплює множину вершин $V \setminus \{p\}$, і пару ребер, що інцидентні вершині *p*: $(\delta_p,\ \delta_q)$, $(\delta_r,\ \delta_p)$, $\delta_r = \delta_p = 2$. За визначенням він є *p*-деревом графа $G_n = (V,\ E)$, в якому кількість висячих вершин на одиницю менша, ніж в *i*-дереві *T*. Тоді одне з ребер $(\delta_p,\ \delta_q)$ або $(\delta_p,\ \delta_r)$ можна розглядати як перше ребро лівого ланцюга, а друге ребро – як перше ребро правого ланцюга з початковою вершиною *p*. Звідси випливає, що операція 1-заміни для *p*-дерева будує деяке *v*-дерево графа $G_n = (V,\ E)$, що містить $|V_1|-2$ висячих вершин. Таким чином, на кроці S1 виконується точно $|V_1|$ операцій 1-заміни, які перетворюють *i*-дерево *T* в гамільтонів цикл. На виконання кожної з них потрібен час, який оцінюється величиною $O(n)$.

Запропоновану процедуру будемо використовувати як одну зі стадій побудови наближеного розв'язання СЗК.

Позначимо T_i *i*-дерево мінімальної вартості в повному зваженому графі $G = (V,\ E)$, $|V| = n$. Для його побудови знайдемо в повному зваженому графі з множиною вершин $V \setminus \{i\}$, кістяк мінімальної ваги (КМВ) та додамо до нього пару ребер з найменшими вагами, що інцидентні вершині *i*. Вартість $d(T_i)$ дерева T_i рівна сумі ребер, що входять в нього, є оцінкою знизу вартості оптимального розв'язання τ^* СЗК:

$$d(T_i) \le D(\tau^*),\ i = \overline{1,\ n}.$$

Трудомісткість знаходження дерева T_i оцінюється часом роботи градієнтного алгоритму побудови КМВ, наприклад, алгоритму Прима [5]. Відомо, що КМВ графа $G = (V,\ E)$ можна отримати за час $O(|E|\log|E|)$.

Сформулюємо СЗК в термінах введених понять.

Нехай побудоване дерево $T_v = (V,\ E_v)$, $v \in \{1, 2\ldots, n\}$, в повному зваженому графі $G = =(V,\ E)$ з вагами ребер $\{i, j\}$, $i, j = \overline{1,\ n}$, $d_{ij} \ge 0$, $i \ne j$, $d_{ii} = \infty$. Кожне ребро $\{k,\ l\}$ дерева T_v представимо парою $(\delta_k,\ \delta_l)$, де δ_k, δ_l – ступені вершин *k*, *l* в T_v, $\delta_k \le \delta_l$, $k,\ l \in \{1, 2\ldots, n\}$. Потрібно знайти в дереві T_v всі такі ребра, заміна яких на ребро з *G* перетворює T_v в маршрут комівояжера мінімальної вартості, представлений *n* парами $(\delta_x,\ \delta_y)$, $\delta_x = \delta_y = 2$, $x = \overline{1,\ n}$, $y \in \{1, 2\ldots, n\}$, $x \ne y$.

Ясно, що таке формулювання не призводить до простого та швидкого способу побудови оптимального розв'язання. Перетворення дерева T_v в обхід мінімальної вартості τ^* в силу NP-повноти задачі залишається в кращому випадку обмеженим перебором множини всіх маршрутів комівояжера *P*. Однак за допомогою скінченої кількості операцій 1-заміни, що визначається співвідношенням (1), можна отримати наближений розв'язок τ_v за час, що можна зіставити з часом побудови T_v.

Позначимо $n(v)$ кількість висячих вершин в дереві T_v, $v = \overline{1,\ n}$. Якщо в результаті знаходження дерева T_v побудовано маршрут комівояжера, то він є розв'язанням СЗК тобто у випадку $n(v) = 0$, $v \in \{1,$ $2,\ldots, n\}$, отримаємо $d(T_v) = D(\tau^*)$, $\tau^* = T_v$.

Матриця вартостей $\left[d_{ij}\right]_n$, в якій не всі елементи d_{ij}, $i \ne j$ набувають різних значень, в загальному випадку породжує декілька *v*-дерев мінімальної ваги, що відрізняються кількістю висячих вершин. Очевидно, серед них переважне те *v*-дерево, в якого $n(v)$ мінімальна. Побудову такого дерева можна виконати за допомогою модифікації процедури знаходження КМВ, яка містить засіб, що стримує зростання ступенів його вершин.

Алгоритм побудови наближеного розв’язання τ_v СЗК складається з двох стадій.

На першій стадії будується дерево T_v. Його вартість:

$$d(T_v) = \sum_{\{i,j\} \in T_v} d_{ij} .$$

На другій стадії виконується процедура перетворення *v*-дерева $T = (V,\ E_v)$, що відповідає T_v, в гамільтонів цикл повного графа $G_n = (V,\ E)$, що відповідає повному зваженому графа *G*. Вартість отриманого розв’язку τ_v дорівнює сумі ваг ребер графа *G*, що входить в гамільтонів цикл графа G_n:

$$D(\tau_v) = d(T_v) - \sum_{\{i,j\} \in E_v^-} d_{ij} + \sum_{\{k,\,l\} \in E_v^+} d_{k\,l} ,$$

де E_v^- – множина ребер, видалених з E_v; E_v^+ – множина ребер графа G_n, доданих до $E_v - E_v^-$, $\left|E_v^-\right| = \left|E_v^+\right| = n(v)$.

Так як в будь-якому градієнтному алгоритмі побудови КМВ ребро найменшої ваги $d_{\min}$ графа *G* включається в T_v, а в результаті виконання другої стадії воно може бути замінене на ребро найбільшої ваги $d_{\max}$ в *G*, то в найгіршому випадку

$$D(\tau_v) = d(T_v) + n(v)(d_{\max} - d_{\min}) . \qquad (2)$$

З (2) випливає, що запропонований алгоритм забезпечує невисоку похибку СЗК у випадку незначного розходження між елементами матриці ваг, тобто тоді, коли використання методу гілок та границь пов’язане з граничними об’ємами обчислювальних ресурсів [1].

Можна спробувати покращити наближене розв’язання СЗК, що отримане викладеним способом, шляхом побудови та перетворення кожного дерева T_i в обхід τ_i, $i = \overline{1,\ n}$. Шуканим результатом є розв’язок τ_μ вартістю

$$D(\tau_\mu) = \min_{1 \le i \le n} D(\tau_i) .$$

Його відносна похибка обчислюється за формулою:

$$\Delta = \frac{D(\tau_\mu) - d(T_M)}{d(T_M)} ,$$

де

$$d(T_M) = \max_{1 \le i \le n} d(T_i) .$$

Використовуючи розроблений алгоритм *i**-Tree було проведено обчислювальний експеримент, в ході якого було порівняно поведінку абсолютної та відносної похибок методів «1-дерево» (1-Tree), «*i**-дерево» (*i**-Tree), «найближчого сусіда» (NN), «найближчого міста» (NT), «найдешевшого включення» (MC), «кістяка мінімальної ваги» (MST).

Експеримент проводився для метричної ЗК для трьох видів матриць – матриць, що не містять однакових чисел, містять 40 % та 80 % однакових чисел.

Для розмірностей вихідної матриці ЗК від 3 до 35 розв’язувалось по 100 задач наближеними методами та методом Літтла. Досліджувались відношення вартостей обходів, отриманих наближеними методами, до вартостей оптимальних маршрутів. Результати наведені на рис. 3, 4 та 5.

Для розмірностей вихідної матриці ЗК від 3 до 100 розв’язувалось по 100 задач наближеними методами. Як нижню границю використано *i*-дерево максимальної ваги. Досліджувалась поведінка відносної похибки наближених алгоритмів. Результати наведені на рис. 6, 7, та 8.

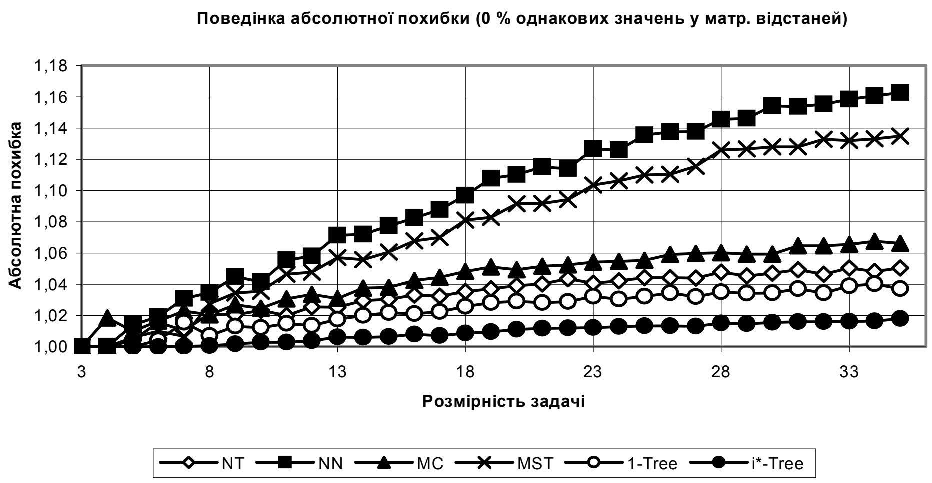


Рис. 3

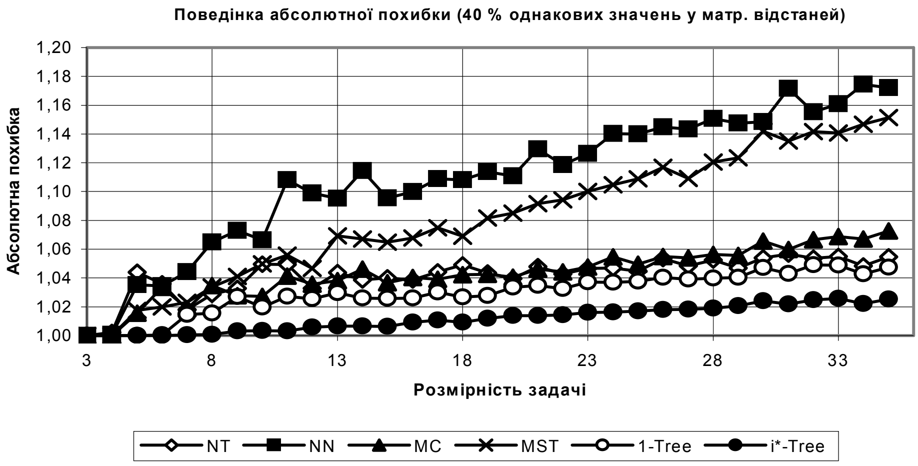


Рис. 4

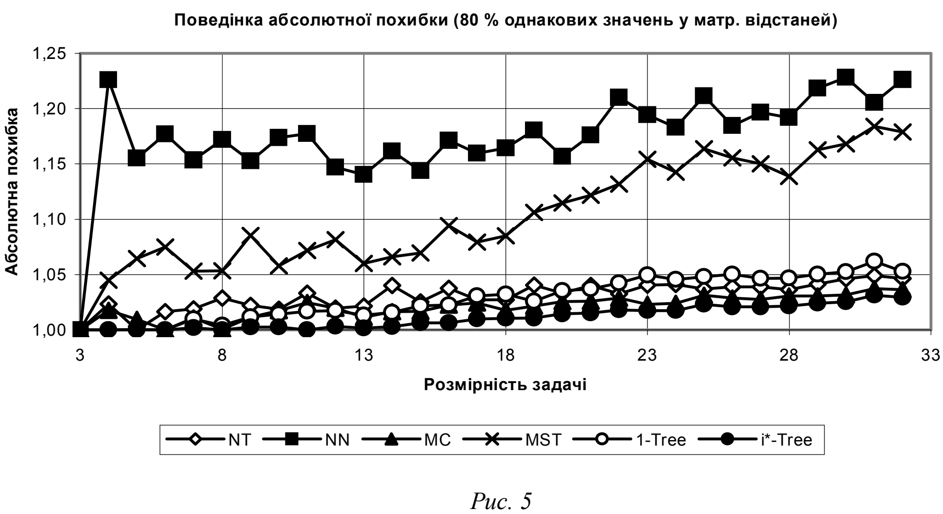


Рис. 5

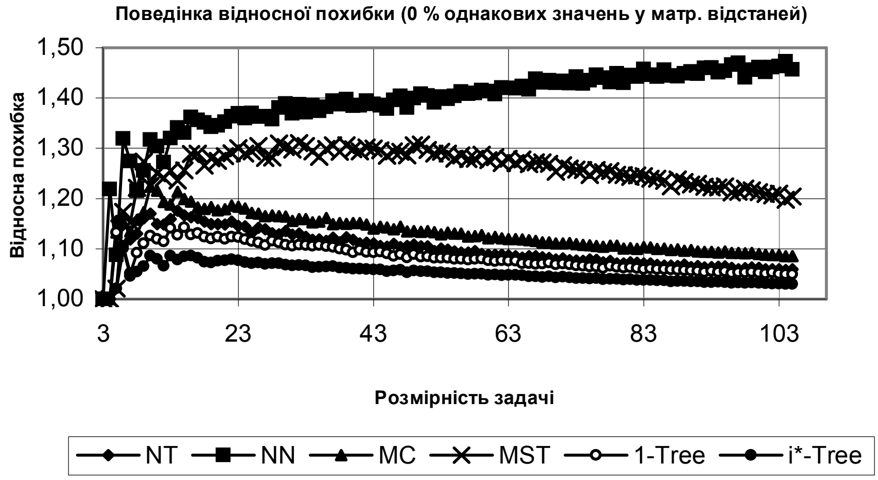


Рис. 6

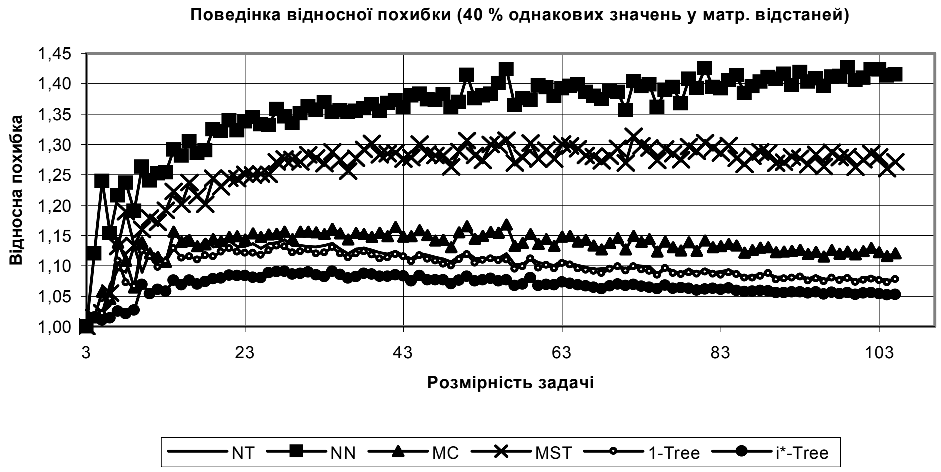


Рис. 7

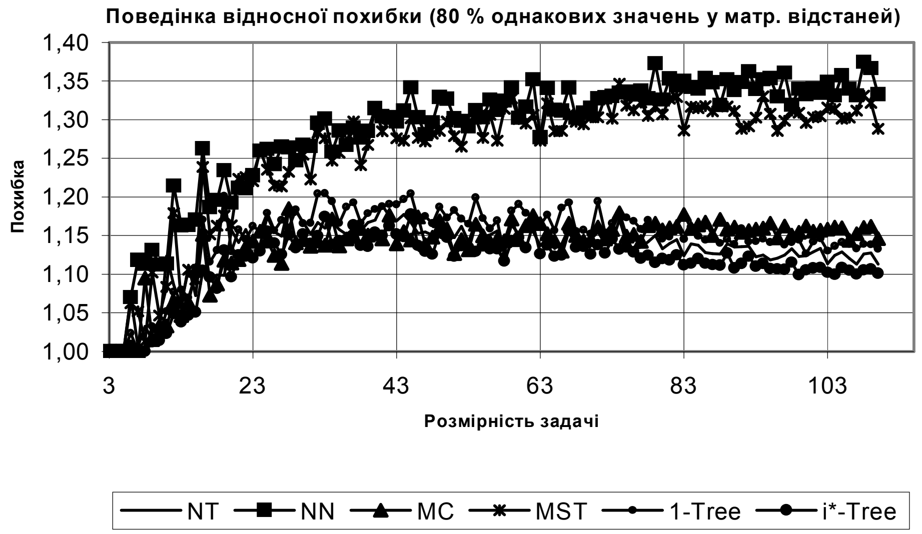


Рис. 8

Порівняльний аналіз отриманих даних та графіків дозволяє зробити такі **висновки**:

1. Для матриць, які не містять однакових чисел та містять 40 % однакових, відносна похибка методу «*i**-дерево» значно менша, ніж для інших наближених методів, які порівнювалися.
2. Для матриць, які містять 80 % однакових чисел на розмірності задачі, меншій за 75,

наближені методи «1-дерево», «i*-дерево», «найближчого міста», «найдешевшого включення» мають приблизно однакову відносну похибку. Для задач, розмірність яких більша за 75, найточнішим є метод «i*-дерево».

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Гаращенко И.В., Панишев А.В., Плечистый Д.Д.* Приближенный алгоритм решения симметричной задачи коммивояжера. Искусственный интеллект. – Выпуск 3. – Донецк: ИПШИ, 2006. – С. 371–378.
2. *Кристофидес Н.* Теория графов. Алгоритмический подход. – М.: Мир, 1978. – 220 с.
3. *Панишев А.В., Гаращенко И.В., Шевченко В.А.* О решении задачи коммивояжера на транспортной сети / Перша міжнародна конференція «Глобальні інформаційні системи. Проблеми та тенденції розвитку // Зб. матеріалів конференції. – Харків: ХНУРЕ, 2006. – С. 244–245
4. *Панишев А.В., Плечистый Д.Д.* Модели и методы оптимизации в проблеме коммивояжера. – Житомир: ЖДТУ, 2006. – 300 с.

ГАРАЩЕНКО Ірина Володимирівна – аспірант Житомирського державного технологічного університету.

Наукові інтереси:
– комп’ютерно-інформаційні технології;
– комбінаторна оптимізація.

МОРОЗОВ Андрій Васильович – магістрант Житомирського державного технологічного університету.

Наукові інтереси:
– комп’ютерно-інформаційні технології;
– комбінаторна оптимізація.

ПАНІШЕВ Анатолій Васильович – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри інформатики та комп’ютерного моделювання Житомирського державного технологічного університету.

Наукові інтереси:
– комбінаторна оптимізація;
– теорія розкладів.

Подано 18.01.2007